



## 24<sup>a</sup> Gara Matematica “Città di Padova” 28 Marzo 2009

1.- Trovare i due più piccoli numeri naturali il cui cubo sia somma di undici naturali dispari successivi.

2.- Quanti sono i numeri di 7 cifre che soddisfano simultaneamente le seguenti condizioni :

- la seconda cifra sia dispari;
- ogni cifra sia diversa dalle precedenti, salvo la quarta = alla terza;
- la settima cifra sia pari.

3.- Con riferimento alla figura , il signor S. , partendo dalla casella *Pa*, deve raggiungere la casella *Ar* passando dal centro di una casella a quello di un'altra con direzione parallela ai lati e senza mai ritornare in una casella già passata.

<i>Pa</i>			
			<i>Ar</i>

Quanti sono i cammini di lunghezza minima che può scegliere ?  
Fra i cammini che potrebbe fare ce n'è uno che passa per tutte le caselle ?

4.- Si trovi un numero naturale che non sia una potenza di 10 e di cui una opportuna potenza (a esponente  $> 1$ ) abbia esattamente 2000 cifre.

5.- Sia  $P(x)$  un polinomio a coefficienti interi tale che  $P(x^2)$  sia divisibile per il polinomio  $x - 1 + \sqrt{3}$ .

Si provi che allora :

- $P(x^2)$  è divisibile per  $x - 1 + \sqrt{3}$  ; (Sugg. : si divida  $P(x^2)$  per  $(x^2 - 2x - 2)$  )
- $P(x)$  è divisibile per  $x - 4 + 2\sqrt{3}$  .

6.- In un tetraedro regolare è inscritta una sfera; in questa è inscritto un altro tetraedro regolare, in questo un'altra sfera, in questa un terzo tetraedro regolare.

Qual è il rapporto tra il volume del primo tetraedro e quello del terzo ?

7.- Da un punto  $P$  esterno ad un circolo  $\Gamma$  si traccino le due tangenti al circolo che toccheranno il circolo in due punti  $S$  e  $T$ . Siano  $M$  ed  $N$  i due punti del circolo  $\Gamma$  appartenenti al suo diametro per  $P$ . Sia  $R$  il punto intersezione della retta  $SN$  con la perpendicolare per  $P$  al diametro  $MN$ .

Si dimostri che :

a) i due segmenti  $PR$  e  $PS$  hanno la stessa lunghezza;

b) i tre punti  $R, M, T$  sono allineati.

8.- Due nuotatori in allenamento partono simultaneamente dai due lati opposti (più corti) di una piscina rettangolare. Quando si incontrano la prima volta sono distanti 20 m dal lato più vicino dei due di partenza. Poi, arrivati ciascuno al lato opposto, ritornano indietro e si riincontrano a 10 m dal lato, dei due, in quel momento più vicino.

Quanto è lunga la piscina ?