



25 ° GARA MATEMATICA “CITTÀ DI PADOVA”

20 MARZO 2010

- 1.- È dato un rettangolo ABCD. Si dimostri che per un qualunque punto P del piano vale :
 $PD^2 + PB^2 = PA^2 + PC^2$ con AC una diagonale .
- 2.- Trovare tre numeri dispari successivi la somma dei cui quadrati è un numero di quattro cifre tutte uguali.

Si verifichi che la somma dei quadrati di tre numeri pari successivi non è mai un numero di quattro cifre tutte uguali.
- 3.- Una sfera di raggio r è posata sopra un cubo di lato 2r e la retta a congiungente il centro della sfera con quello del cubo passa per il punto di appoggio.
Per quali punti della retta a il cubo è tutto nascosto dalla sfera ?
- 4.- Un cane deve attraversare un fiume (rettilineo e di larghezza costante L) . La velocità del cane nell'acqua è di 2.5 Km/h . La velocità dell'acqua in ogni punto del fiume è costante e pari a 2 Km/h .

a) qual è il tempo minimo di attraversamento ? a quali traiettorie corrisponde ?
b) qual è il tempo di attraversamento minimo relativo ad una traiettoria di lunghezza minima?
- 5.- Un triangolo ha due mediane tra loro ortogonali . Si esprima l'area del triangolo in funzione della lunghezza delle due mediane .
- 6.- Si considerino i numeri naturali tali che :
a) abbiano cifre tutte diverse, ed inoltre
b) la somma di due qualsiasi delle loro cifre non sia divisibile per 3.
Qual è il massimo numero M di cifre di tali numeri ? Quanti sono siffatti numeri (con M cifre) ?
- 7.- Per quali valori di t la funzione :

$$f(x) = 1 - 2x - \sqrt{4x^2 - 2tx + t}$$

È costante per $x \leq 0$?

Per tali valori di t la $f(x)$ è costante per ogni $x \in \mathbb{R}$?

- 8.- Trovare le coppie di numeri interi positivi x, y tali che :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{5}{4}$$