



30ª GARA MATEMATICA “CITTÀ DI PADOVA”

7 Marzo 2015

- 1.-** Dato un segmento AB ed un suo punto interno C si determini e si costruisca il luogo dei punti P del piano tali che una bisettrice del triangolo ABP passi per C.
- 2.-** Chiamiamo “piccolino” un numero naturale p che sia minore o uguale della somma dei quadrati delle cifre della sua rappresentazione decimale.
Quanti tra questi numeri sono minori di 100 ?
È vero che i numeri piccoli sono in numero finito ?
- 3.-** Si dimostri che i quadrilateri di area massima inscritti in un circolo sono quadrati.
Si dimostri inoltre che tra i quadrilateri di area massima inscritti in una ellisse c'è un rettangolo \mathcal{R} .
Si determinino i lati di \mathcal{R} in funzione dei semiassi dell'ellisse.
- 4.-** Dato un triangolo equilatero ABC si divida ciascuno dei due lati AB e AC in n parti uguali mediante i punti B_1, B_2, \dots, B_{n-1} e C_1, C_2, \dots, C_{n-1} rispettivamente.
Si traccino poi i segmenti, paralleli al lato AC, che uniscono i punti B_i col lato BC, e quelli, paralleli al lato AB che uniscono i punti C_j col lato BC.
- (i) quanti punti interni al triangolo sono intersezione di tali segmenti a due a due ?
(ii) per quali valori di n il baricentro del triangolo cade in uno di tali punti ?
(iii) in tal caso quanti sono i triangoli equilateri con vertici nei punti considerati che hanno quel punto come baricentro ?
- 5.-** Un cubo di lato ℓ è suddiviso in 27 cubetti di lato $\ell/3$.
Qual è il numero massimo di cubetti che possiamo togliere in modo che la superficie del solido ottenuto sia uguale a quella del cubo ?
- 6.-** Nel sistema di numerazione a base 6, quali sono gli interi positivi n di due cifre tali che n moltiplicato per 6 sia uguale a 7 volte la somma dei quadrati delle due cifre di n ?
- 7.-** Sia p il prodotto di quattro numeri interi relativi successivi.
Dimostrare che p è un quadrato solo se uno dei fattori è 0.
[sugg. : considerare $p + 1 \dots$]
- 8.-** Una imbarcazione di canottieri si allena su di un fiume. Quando procede controcorrente ha, rispetto all'acqua, una velocità doppia di quella che ha, essendo i vogatori rilassati, quando procede con il favore della corrente. Ad un certo momento andando controcorrente i canottieri passano vicino ad una bottiglia tappata che galleggia. Dopo un po' alcuni di loro suggeriscono di andare a recuperare la bottiglia per vedere se per caso non contenga un messaggio, sicché dopo 15 minuti dall'avvistamento smettono di vogare e discutono per altri 15 minuti e infine decidono di recuperarla, riprendendo a vogare verso valle.
Dopo un po' ritenendo puerile la loro curiosità riprendono la rotta a monte.
Dopo 40 minuti di voga cambiano di nuovo idea e riprendono a vogare verso la bottiglia.
La ritrovano a 3 km dal punto in cui l'avevano avvistata.
Qual è la velocità della corrente del fiume ?