



1.- Si suddividano due facce opposte di un cubo C ciascuna in 9 quadrati uguali. Si tolga dal cubo il parallelepipedo che ha per basi i due quadrati centrali delle suddivisioni. Si faccia poi la stessa operazione relativamente alle altre 2 coppie di facce opposte del cubo. Rimane un solido che si può pensare come unione di cubi. Su ciascuno di questi cubi si proceda come sopra. Rimane un solido R .

Qual è il rapporto tra i volumi dei due solidi R e C ?

2.- Consideriamo l'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ ed una biiezione $\varphi : S \rightarrow S$. Un elemento $a \in S$ si dice φ -periodico quando esiste un intero positivo r tale che

$$\varphi^r(a) = a.$$

(φ^r indica la composizione di φ per sé stessa r volte, p.e. $\varphi^2(a) = \varphi(\varphi(a))$).

i) ogni elemento a di S è φ -periodico?

ii) se a è φ -periodico si chiama periodo di a il minimo degli r tali che $\varphi^r(a) = a$ e si indica con $p(a)$. È vero che $p(a) \leq n$?

iii) è vero che il numero degli elementi di periodo p è multiplo di p ?

3.- Dallo stesso punto in un circuito circolare lungo 1,152 Km partono simultaneamente (partenze lanciate!) in versi opposti un ciclista C che mantiene la velocità costante v di 10 m/s, un motociclista M che parte alla stessa velocità v ma accelera costantemente di 1 m/s². Al loro primo incontro

1) quanta strada ha fatto C ?

2) a che velocità viaggia M ?

4.- In un piano siano date 3 rette parallele e distinte a, b, c ed altre 3 rette distinte ortogonali ad esse l, m, n . È vero che tutti i triangoli che hanno per vertici 3 dei 9 punti intersezione, ma nessun lato appartenente a qualcuna delle 6 rette date, hanno tutti lo stesso baricentro?

5.- Questo è un solitario da fare con quattro carte da gioco : un asso, un 2, un 3, un 4. Si incomincia disponendole l'una accanto all'altra in modo casuale e si lascia alla sinistra un posto vuoto, per esempio: $\emptyset, 4, 2, 1, 3$.

La prima mossa consiste nel portare l'asso nel posto vuoto, nel nostro esempio :

1, 4, 2, \emptyset , 3.

Per la seconda mossa si legge la carta X che precede la casella vuota e vi si sposta, se esiste, la carta di valore $X + 1$. (nel nostro esempio 1, 4, 2, 3, \emptyset). Se non esiste il solitario è fallito.

Se invece con analoghe mosse successive si perviene alla disposizione 1, 2, 3, 4, \emptyset allora il solitario risulta compiuto.

Scegliendo a caso la disposizione iniziale, qual è la probabilità che il gioco riesca?

6.- Si considerino 2 cerchi C_1 e C_2 di uguale raggio e tangenti esternamente. Si trovi un triangolo equilatero di area massima con un vertice su C_1 e 2 vertici su C_2 .

7.- Sia C il circolo di centro O e raggio R , T un suo punto. Sia C' il circolo passante per O e tangente a C nel punto T . Si prenda un punto X' su C' e la tangente t' in X' a C' ; questa interseca il circolo C nei 2 punti A e B . Consideriamo il punto X ulteriore intersezione di TX' con C e la tangente t in X a C . Siano A'' e B'' le intersezioni di t rispettivamente con le rette TA , TB , e inoltre A' e B' le intersezioni di C' con TA , TB . E' vero che TX è la bisettrice dell'angolo ATB ? Si determinino i rapporti tra le aree dei triangoli $TA''B''$, TAB , $TA'B'$.

8.- Trovare un numero naturale di 5 cifre che, diviso per 4, dia per risultato il suo simmetrico: $ABCDE : 4 = EDCBA$.