



35<sup>a</sup> Gara Matematica "Città di Padova" 9 Aprile 2022

1.- Determinare le soluzioni intere positive dell'equazione

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = w$$

2.- Dato il triangolo isoscele  $T$ , di lati 5, 5, 6, determinare i triangoli isosceli con lo stesso perimetro e la stessa area di  $T$ .

3.- Consideriamo l'insieme delle rette che uniscono a due a due i punti della figura:



quante direzioni distinte esse individuano?

Si supponga ora che la figura abbia sempre tre righe, ma sia formata da  $n$  colonne. Esprimere in funzione di  $n$  il numero delle diverse direzioni delle rette che uniscono a due a due i punti della nuova figura.

4.- Un mucchio di ghiaia dev'essere caricato su un camion. Lavorando da soli gli operai A, B, C impiegherebbero, rispettivamente, 3, 4, 6 ore.

Alle 8<sup>h</sup> 30'00'' l'operaio C inizia a caricare il camion, un'ora dopo si aggiunge B e dopo un'altra ora si aggiunge anche A.

A che ora, minuto, secondo viene concluso il lavoro?

5.- Si consideri un vertice A di un cubo  $C$ , ed i centri L, M, N delle tre facce di  $C$  che non contengono A. Si trovi il rapporto tra il volume del cubo e quello del tetraedro ALMN.

6.- Due circonferenze  $C_1, C_2$  sono tangenti esternamente nel punto T.

Due rette  $r, s$  passanti per T intersecano le circonferenze in altri due punti  $R_1, S_1$  di  $C_1$  e due punti  $R_2, S_2$  di  $C_2$ .

Si dimostri che le due rette  $R_1S_1$  e  $R_2S_2$  sono parallele.

**7.-** Fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, chiameremo “razionale” un punto del piano le cui coordinate siano entrambe razionali.

Si dimostri che:

- (i) esistono circonferenze del piano prive di punti razionali;
- (ii) esistono circonferenze del piano che contengono precisamente un punto razionale;
- (iii) esistono circonferenze del piano che contengono precisamente due punti razionali;
- (iiii) non esistono circonferenze del piano che contengono soltanto tre punti razionali.

**8.-** In un torneo di calcio partecipano  $n > 1$  squadre. Ogni squadra affronta ogni altra squadra esattamente una volta.

In ogni partita vengono assegnati 3 punti alla squadra vincitrice e 0 a quella sconfitta, mentre in caso di pareggio viene assegnato 1 punto a ciascuna squadra.

Alla fine del torneo viene stilata la classifica delle squadre in base al numero di punti conquistati.

(i) sia  $k$  la somma dei punteggi delle squadre nella classifica finale.

Quali sono i valori che  $k$  può assumere?

(ii) qual è il minor numero di punti con cui una squadra potrebbe vincere il torneo (non a pari merito)?