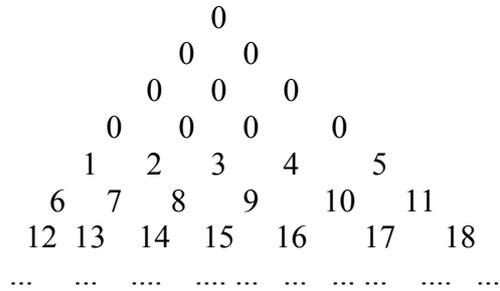
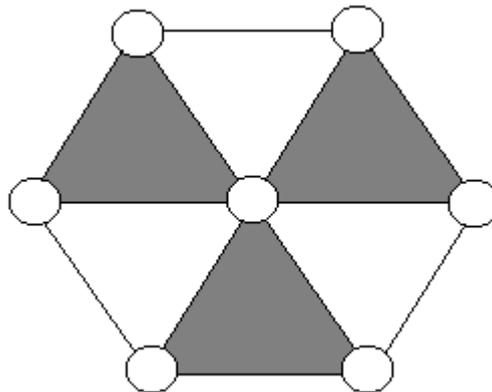


8ª GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA"
27 MARZO 1993

1.- Calcolare la somma dei numeri della n-esima riga della configurazione, con $n \geq 5$:



2.- In quanti modi si possono disporre tutti i numeri naturali da 1 a 7 nelle caselle della figura, in modo che la somma dei numeri posti ai vertici dei triangoli ombreggiati sia sempre la stessa ?



3.- Dato un triangolo scaleno ABC, sia C' il punto simmetrico di C rispetto alla retta AB. Siano : **a** la retta simmetrica della retta C'A rispetto alla retta CC', M il punto intersezione di **a** con la retta CB. Analogamente, sia **b** la retta simmetrica di C'B rispetto a CC', e sia N il punto intersezione di **b** con la retta CA. Si dimostri che le rette CC', AB, MN passano per uno stesso punto.

4.- Siano P(x), Q(x) e R(x) tre polinomi. Si provi che, se $P(x^2) + x \cdot Q(x^2) = (x^2 - 4) \cdot R(x)$ allora P(x) e Q(x) sono divisibili per (x - 4). Se, viceversa, due polinomi A(x) e B(x) sono divisibili entrambi per (x - 4), allora è vero che esiste un polinomio C(x) tale che :

$$A(x^2) + x \cdot B(x^2) = (x^2 - 4) \cdot C(x) ?$$

5.- Si consideri un triangolo ABC e si cerchi di costruire sul segmento BC, estremi esclusi, un punto D tale che $\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$. Come deve essere il triangolo perché tale punto D esista ?

- 6.- Data la successione ordinata dei numeri primi dispari : 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,
- si provi che la somma di due consecutivi è il prodotto di almeno tre numeri primi, con eventuali ripetizioni [esempio : $17 + 19 = 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$]
 - limitando la successione ai numeri primi ≤ 100 , si provi che almeno due dei fattori in questione sono ≤ 7 .
- 7.- Si consideri un quadrato di lato 18 e dei dischi di raggio 1.
Sia M il massimo numero di tali dischi che si possono disporre nel quadrato senza sovrapposizioni tra i dischi. Il calcolo di M è piuttosto laborioso : si valuti M dandone una buona approssimazione (per difetto e per eccesso), trovando cioè due numeri interi α, β tali che $\alpha \leq M \leq \beta$.
- 8.- Sia \mathcal{S} l'insieme dei punti del piano cartesiano per i quali entrambe le coordinate sono numeri razionali : $\mathcal{S} = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q} \}$.
- Esistono rette (non parallele agli assi) che non hanno alcun punto in comune con \mathcal{S} ?
 - La circonferenza di centro $O(0, 0)$ e raggio π passa per qualche punto di \mathcal{S} ?