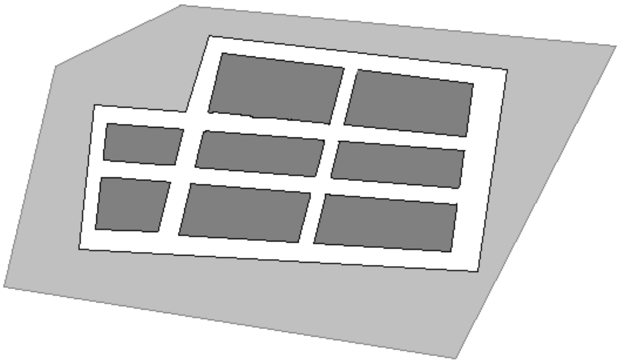
11ª GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA" – 16 Marzo 1996

1.- Quattro bambini giocano a nascondino. Essi vogliono disporsi inizialmente in quattro diversi incroci di strade, facendo in modo che ciascuno abbia la visione completa delle due strade confluenti ma nessuno possa esser visto dagli altri. In quanti modi diversi si possono disporre ?



2.- Si fissi nel piano un triangolo ABC con il lato AB doppio del lato AC, si studi il luogo dei punti P del piano per i quali i triangoli ABP e ACP hanno lo stesso perimetro : che forma ha il luogo ?
(una retta, un segmento, un arco di circonferenza, un arco di parabola, … ?)
Qual è il perimetro minimo di tali triangoli ?

3.- Trovare due polinomi A(x) e B(x) che soddisfino simultaneamente le due condizioni seguenti :

(1) $A(x) - B(x) = -2x + 4$

(2) $(x-2) \cdot A(x^2) = B(x) \cdot (x-1) \cdot (x^2-2)$.

4.- Si consideri un circolo *C* di centro O e un punto P ad esso esterno. Siano M e N le due intersezioni della retta PO con *C*. Si considerino le due tangenti per P al circolo e i rispettivi punti di tangenza S, T.
Detto R il punto di intersezione della retta MT con la retta per P ortogonale a PO, si verifichi che i due segmenti PR e PT hanno la stessa lunghezza.
Si dimostri che i punti R, S, N sono allineati.

5.- Sia A_1 un numero intero relativo.
Si consideri la successione $A_1, A_2, A_3, \dots$ definita come segue:

(i) se A_n è pari allora $A_{n+1} = \dfrac{A_n}{2}$;

(ii) se A_n è dispari allora $A_{n+1} = A_n + 7$.

Si verifichi che da un certo indice *m* in poi la successione è *periodica*, cioè c'è un gruppo di numeri che si ripete come nell'esempio … , 8, 4, 2, 1, 8, 4, 2, 1, … .
Al variare di A_1 nei numeri interi, quanti periodi diversi si possono presentare ?

6.- Si consideri un tetraedro regolare ***T*** avente il lato di 20 cm e lo si suddivida, mediante piani paralleli alle facce, in tetraedri e ottaedri regolari aventi lato di 2 cm . Si fissi una faccia *F* del tetraedro ***T*** ; quanti dei tetraedri piccoli hanno almeno un punto che appartiene a *F* ?
Quanti dei tetraedri piccoli non hanno alcun punto in comune con la superficie del tetraedro *T* ?

7.- Quanti sono i divisori interi positivi del numero 1995 ?
Se i divisori di a sono in numero di m e i divisori di $a + 1$ sono in numero di n, quanti sono i divisori di $a(a + 1)$?

8.- Tra le coppie ordinate di numeri reali (x, y) che soddisfano la condizione $x^2 + y^2 \leq 8$ quali sono quelle che rendono massima la somma $x + y$?
E' vero che se sono verificate simultaneamente le condizioni :
(i) $x^2 + y^2 \leq 8$
(ii) $y \geq -1$
allora vale anche la : $-3.9 < x + y < 4.1$?