Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2011-2012

Roberto Monti

Versione del 9 Novembre 2011

Contents

CHAPTER 1

Cardinalità

1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi. Non diamo una definizione di "insieme". Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato "insieme ambiente", che indicheremo con X. Se un elemento x di X appartiene ad un insieme A scriveremo $x \in A$. Se x non appartiene ad A scriveremo $x \notin A$. Con $A \subset B$ si intende l'inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo $\subset$ viene talvolta indicato con $\subseteq$. Se $A \subset B$ e $B \subset A$ gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali, $A = B$.

L'unione e l'intersezione di due insiemi A e B si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$A \cup B = \big\{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\big\},$$
$$A \cap B = \big\{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\big\}.$$

L'insieme che non contiene alcun elemento, l'insieme vuoto, si indica con $\emptyset$. Due insiemi A e B si dicono disgiunti se $A \cap B = \emptyset$.

La differenza di insiemi $A \setminus B$ (leggi "A meno B") è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \big\{x \in A : x \notin B\big\}.$$

Talvolta la differenza $A \setminus B$ è indicata con $A - B$.

Il complementare di un insieme A in X è l'insieme $A' = X \setminus A$. Talvolta il complementare è indicato con A^c. Con tale notazione si ha $A \setminus B = A \cap B'$. Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Più in generale, sia Λ una famiglia di indici e siano A_λ insiemi indicizzati da $\lambda \in \Lambda$. Allora l'unione e intersezione della famiglia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sono:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \big\{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\big\},$$
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \big\{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\big\}.$$

Le formule di De Morgan sono

$$\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda, \quad \Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda, \quad X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda.$$

1.2. Funzioni fra insiemi. Una funzione $f : A \to B$ dall'insieme A all'insieme B è un'applicazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ un elemento $f(x) \in B$. L'insieme A si dice *dominio* e l'insieme B si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \big\{(x, y) : x \in A,\ y \in B\big\}.$$

Il *grafico* di una funzione $f : A \to B$ è il seguente sottoinsieme di $A \times B$:

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\big\}.$$

Osservazione 1.1. La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da A a B* è una terna ordinata (A, B, G) dove $G \subset A\times B$ è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni $x \in A$ esiste un unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$. L'insieme $G = \mathrm{gr}(f)$ è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione $f : A \to B$ per indicare una funzione.

Definizione 1.2 (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme $C \subset A$, l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \big\{f(x) \in B : x \in C\big\} \\ &= \big\{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\big\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di C rispetto ad f.

Dato in insieme $D \subset B$, l'insieme

$$f^{-1}(D) = \big\{x \in A : f(x) \in D\big\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di D ripetto ad f.

Proposizione 1.3. Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano $A_\lambda \subset A$ e $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Allora si ha:[1]

$$\begin{aligned} &f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \quad f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \\ &f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dim. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda). \end{aligned}$$

[1] Notare la correzione: $\subset$ sostituisce $=$ nell'immagine dell'intersezione. Regola: non credere alle affermazioni senza dimostrazione.

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda).
\end{aligned}
$$

Proviamo l'inclusione in alto a destra:

$$
\begin{aligned}
y \in f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ tale che per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
&\Rightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } y \in f(A_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).
\end{aligned}
$$

Notare che abbiamo tutte equivalenze tranne l'implicazione centrale che è del tipo

$$\exists x \forall \lambda \,:\, \text{Affermazione}(x,\lambda) \;\Rightarrow\; \forall \lambda \exists x \,:\, \text{Affermazione}(x,\lambda),$$

che non può essere invertita. □

DEFINIZIONE 1.4. Una funzione $f : A \to B$ si dice:

i) *iniettiva* (1-1) se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$ (equivalentemente se $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$);
ii) *suriettiva* (su) se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;
iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$$
\begin{aligned}
&f : A \xrightarrow{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva,} \\
&f : A \xrightarrow{\text{su}} B \quad \text{funzione suriettiva,} \\
&f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva e suriettiva.}
\end{aligned}
$$

DEFINIZIONE 1.5 (Funzione inversa e composta). Se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora $f : A \to f(A)$ è iniettiva eè suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa* $f^{-1} : f(A) \to A$ ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni tali che $f(A) \subset C$.Allora è ben definita la *funzione composta* $g \circ f : A \to D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$ allora si ha:

$$f^{-1} \circ f = \text{identità su } A,$$
$$f \circ f^{-1} = \text{identità su } B.$$

2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

Definizione 2.1. Siano A e B insiemi. Diremo che:

i) $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$;
ii) $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : A \to B$;
iii) $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$ se $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ ma non esiste alcuna funzione suriettiva $f : A \to B$.

Se $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ diremo che gli insiemi A e B sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile, e cioè vale sempre una delle seguenti tre possibilità: $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$ oppure $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(B) < \mathrm{Card}(A)$. Non dimostreremo questo teorema la cui prova richiede l'assioma della scelta.

Proveremo invece che l'affermazione $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ equivale all'esistenza di una funzione iniettiva $f : A \to B$ e di una funzione iniettiva $g : B \to A$. Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme A è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A:

$$\mathcal{P}(A) = \big\{E : E \subset A\big\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ contiene sempre l'elemento $\emptyset$.

Teorema 2.2 (Cantor-Schröder-Bernstein). Siano A e B due insiemi, e siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$.

Dim. Consideriamo preliminarmente una funzione $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ che preserva le inclusioni:

$$E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F). \tag{2.2}$$

Si consideri la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \big\{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\big\}$. È certamente $\mathcal{A} \neq \emptyset$ in quanto $\emptyset \in \mathcal{A}$. Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che $T(F) = F$. Infatti, usando la proprietà (1.1) e la (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\Big(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\Big) = T(F).$$

D'altra parte, applicando all'inclusione $F \subset T(F)$ nuovamente T si ottiene $T(F) \subset T(T(F))$ e quindi $T(F) \in \mathcal{A}$, da cui segue l'inclusione opposta $T(F) \subset F$.

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che T preserva l'ordine. Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso $A_1 \in \mathcal{P}(A)$ di T ovvero un insieme tale che $T(A_1) = A_1$. Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ con unioni disgiunte. La funzione $f : A_1 \to B_1$ è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che $g(B_2) = A_2$. Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque, $g : B_2 \to A_2$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$ nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

□

Proposizione 2.3. Per ogni insieme A risulta $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$.

Dim. Certamente $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$ in quanto la funzione $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$ è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$. La dimostrazione si basa sul "paradosso di Russell". Si consideri l'insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè f è suriettiva, esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = A_0$. Ci sono due casi:

Caso 1: $x_0 \in A_0$. Allora: $x_0 \notin f(x_0) = A_0$, assurdo.

Caso 2: $x_0 \notin A_0$. Allora: $x_0 \in f(x_0) = A_0$, assurdo.

□

3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ per escludere lo 0.

1. Insieme finito. Un insieme A si dice *finito* se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed una funzione $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che $\mathrm{Card}(A) = n$. Se A non è finito, diremo che A è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo $\mathrm{Card}(A) = \infty$.

Enunciamo senza provare il seguente fatto:

Proposizione 3.1. Se A è un insieme finito ed $f : A \to A$ è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) f è iniettiva;
2) f è suriettiva;
3) f è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio.

Esempio 3.2. L'insieme dei numeri pari $2\mathbb{N} = \{0, 2, \ldots, 2n, \ldots\}$ è infinito ed è equipotente con $\mathbb{N}$. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

Definizione 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

2. Insieme numerabile. Un insieme A si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : \mathbb{N} \to A$. Diremo in questo caso che:

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad \text{(Alef zero)}.$$

Il cardinale $\aleph_0$ è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se A è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$. La costruzione di f è induttiva:

i) Se definisce $f(0) \in A$ a piacere;

ii) Definiti $f(1), \ldots, f(n) \in A$ distinti, si osserva che l'insieme $A \setminus \{f(0), \ldots, f(n)\}$ non è vuoto, altrimenti A sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento $f(n + 1) \in A \setminus \{f(0), \ldots, f(n)\}$. Ne risulta una funzione $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile A possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \{a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots\}.$$

3. $\mathbb{Z}$ è numerabile. L'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

4. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ è numerabile. Proviamo che il prodotto cartesiano $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ è numerabile, ovvero che

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $f(n) = (n, 1)$ è iniettiva. D'altra parte, la funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n, m) = 2^n 3^m$ è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.2 esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esercizio 3.1. Controllare che la funzione $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita

$$h(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

5. $A \times A$ è numerabile se A è numerabile. Se A è numerabile, anche il prodotto cartesiano $A \times A$ è numerabile. Sia infatti, $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva e suriettiva. Allora $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times A$, $F(n, m) = (f(n), f(m))$ è iniettiva e surittiva. La composizione $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \to A \times A$ è allora iniettiva e suriettiva. Qui h è la funzione definita sopra.

6. $\mathbb{Q}$ è numerabile. L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e quindi l'inclusione è iniettiva da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$. Si consideri la funzione $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione g è iniettiva. Siccome $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile, esiste $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva. Dunque $h \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ è iniettiva.

7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

Proposizione 3.4. Siano A_n, $n \in \mathbb{N}$, insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ è al più numerabile.

Dim. Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi A_n siano a coppie disgiunti, ovvero $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$. Enumeriamo gli elementi di A_n in questo modo:

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,j}, \ldots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione $f : \mathbb{N} \to A$, $f(n) = a_{n,1}$ è iniettiva. Costruiamo una funzione $g : A \to \mathbb{N}$ iniettiva. È noto che l'insieme $P \subset \mathbb{N}$ dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo P:

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots\}.$$

Definiamo la funzione $g : A \to \mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$g(a_{n,j}) = p_n^j, \quad n, j \in \mathbb{N}, n, j \geq 1.$$

La funzione g è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j}) = g(a_{m,k}) \quad \Leftrightarrow \quad p_n^j = p_m^k \quad \Leftrightarrow \quad n = m,\, j = k \quad \Leftrightarrow \quad a_{n,j} = a_{m,k}.$$

□

8. $\mathbb{R}$ non è numerabile. Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile. È più che numerabile.

4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione.*

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{4.3}$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ = \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

4.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{4.4}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

4.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
ii) $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k \\ &= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]x^{n+1-k}y^k + \binom{n}{n}y^{n+1}.\end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n,k\in\mathbb{N}$ con $k\le n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$

5. Esercizi vari

Esercizio 5.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f, ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita.
2) Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
3) Dire se f è iniettiva.
4) Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

Esercizio 5.2. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ con $t > 0$. Provare la seguente disuguaglianza:

$$xy \le \frac{1}{2}\Big(tx^2 + \frac{1}{t}y^2\Big).$$

Esercizio 5.3. Verificare che $\log_{10}^2 \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 5.4. Siano $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ il disco unitario, $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| < 1$, ed $f : D \to D$ sia la funzione

$$f(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}.$$

1) Verificare che f è definita su tutto D e che $f(D) \subset D$;
2) Provare che f è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa $f^{-1} : D \to D$.

CHAPTER 2

Numeri reali

1. Relazioni d'ordine

Premettiamo le definizioni di relazione, relazione d'ordine (totale) e relazione d'ordine parziale.

DEFINIZIONE 1.1 (Relazione). Una relazione su un insieme X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$. Dati $x, y \in X$, diciamo che a è nella relazione R con y se $(x, y) \in R$. Scriveremo in questo caso xRy.

DEFINIZIONE 1.2 (Ordine totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iv) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

Se si lascia cadere ii) si ottiene una relazione di *ordine parziale.*

2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo.* Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

DEFINIZIONE 2.1. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

(S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);
(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;

(O2) se $x \le y$ e $z \ge 0$, allora $x \cdot z \le y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve. Gli assiomi (o proprietà) (S1)-(D) definiscono un *campo*. Aggiungendo gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*. Aggiungendo l'assioma di completezza si ottiene un *campo ordinato completo*. Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

I numeri razionali $\mathbb{Q}$ con le usuali operazioni e relazione d'ordine formano un campo ordinato.

Proposizione 2.2. I numeri complessi $\mathbb{C}$ sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

Dim. Per provare questa affermazione si osservi che in campo ordinato ogni elemento x verifica $x^2 \ge 0$ (vedi l'Esercizio **??**). Supponiamo per assurdo che ci sia su $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine totale $\ge$. L'unità immaginaria i dovrebbe allora verificare $-1 = i^2 \ge 0$ e quindi si avrebbe $1 \le 0$. D'altra parte si ha anche $1 = 1^2 \ge 0$. Si deduce che $1 = 0$ e questo non è possibile. $\square$

L'assioma di completezza può essere formulato in vari modi equivalenti fra loro. Elenchiamo cinque affermazioni che sono equivalenti:

1) Ogni sottoinsieme non vuoto e superioremente limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo superiore.
2) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferioremente limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo inferiore.
3) Ogni sezione di $\mathbb{R}$ ha un unico elemento separatore.
4) Ogni successione monotona e limitata in $\mathbb{R}$ è convergente.
5) Ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente

Ritorneremo su questi concetti durante il corso.

Definizione 2.3 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \le y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \le z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo
$$\sup A = x.$$
iv) Se A non è superioremente limitato porremo
$$\sup A = \infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici. La definizione di estremo superiore può essere riformulata nei seguenti termini. Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \le x$ per ogni $y \in A$;
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$.

Definizione 2.4 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \le x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \le x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo
$$\inf A = x.$$
iv) Se A non è inferiormente limitato porremo
$$\inf A = -\infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\min A = x.$$

2.1. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.5 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \le y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme
$$A = \big\{ nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \big\}$$
è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \le \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:
$$\bar{x} \ge (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$
che è una contraddizione. □

Definizione 2.6 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme
$$A_x = \big\{ p \in \mathbb{Z} : p \le x \big\}.$$
Per la proprietà di Archimede, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque estremo superiore. Poichè A_x

è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ questo estremo superiore è un massimo. Definiamo la *parte intera di x*

$$[x] = \max\big\{p \in \mathbb{Z} : p \le x\big\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di x* è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \le x < [x] + 1, \quad 0 \le \{x\} < 1.$$

Proviamo ora che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 2.7 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

DIM. Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \le ny.$$

Il numero $\bar{q} = [ny]/n \in \mathbb{Q}$ verifica dunque $x < \bar{q} \le y$. Per avere una disuguaglianza stretta anche a destra argomentiamo nel seguente modo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $m(\bar{q} - x) > 1$ e quindi

$$x < \bar{q} - \frac{1}{m} < \bar{q} \le y.$$

Il numero $q = \bar{q} - \frac{1}{m} \in \mathbb{Q}$ verifica quindi la tesi.

$\square$

2.2. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$. La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) L'unicità di un campo ordinato completo.

Illustriamo brevemente, senza dimostrazioni, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Sottolineamo che l'Assioma di Completezza è ora un Teorema. Nel seguito verrà illustrata una costruzione puramente metrica di $\mathbb{R}$, che prescinde dalla relazione d'ordine.

DEFINIZIONE 2.8. Un insieme $A \subset \mathbb{Q}$ è una sezione (di Dedekind) se:

(i) $A, A' \neq \emptyset$, dove A' è il complementare di A in $\mathbb{Q}$;
(ii) se $a \in A$ allora $b \in A$ per ogni numero razionale $b \le a$;
(iii) se $a \in A$ esiste $b \in A$ con $a < b$.

Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$ la sezione nulla e con $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$ la sezione unitaria.

1. Relazione d'ordine. Se A e B sono sezioni, diciamo che $A \le B$ se $A \subset B$. L'insieme $\mathcal{A}$ è totalmente ordinato dalla relazione $\le$.

2. Somma. Se A e B sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B\}.$$

La sezione opposta è per definizione $-A = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } a > b \text{ tale che } -a \in A'\}$. Scriviamo $A - B = A + (-B)$.

3. Prodotto. La sezione prodotto si definisce per casi. Se $A, B \geq 0$ definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B\}.$$

Se $A, B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$, se $A \geq 0$ e $B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$, e se $A \leq 0$ e $B \geq 0$ si definisce $A \cdot B = -(-A) \cdot B$. Infine, per ogni sezione $A \neq 0$ si definisce la sezione reciproca $A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } a > b \text{ tale che } a^{-1} \in A'\}$.

Con pazienti verifiche si controlla che $\mathcal{A}$ è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

4. Assioma di completezza. Proviamo la proprietà di completezza.

Teorema 2.9. L'insieme $\mathcal{A}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ e con la relazione d'ordine $\leq$ è un campo ordinato *completo*.

Dim. Ci interessa verificare la completezza. Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ un insieme superioremente limitato e non vuoto. Questo significa che esiste una sezione $A \in \mathcal{A}$ tale che $B \subset A$ per ogni sezione $B \in \mathcal{B}$. Vogliamo provare che $\mathcal{B}$ ha estremo superiore. Definiamo l'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{Q}.$$

Controlliamo che C è una sezione di $\mathbb{Q}$:

i) $C \neq \emptyset$ in quanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Inoltre, $C \subset A$ implica $A' \subset C'$ e poichè per ipotesi $A' \neq \emptyset$, segue che $C' \neq \emptyset$.
ii) Siano $x, y \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in C$ e $y \leq x$. Allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$, e siccome B è una sezione segue che $y \in B$. Dunque si ha anche $y \in B$.
iii) Se $x \in C$ allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$. Siccome B è una sezione, esiste $y \in B$ tale che $x < y$. Ma allora sia ha anche $y \in C$.

Verifichiamo infine che $C = \sup \mathcal{B}$.

i) Sicuramente $B \subset C$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, ovvero C è un maggiorante di $\mathcal{B}$.
ii) Proviamo che C è il minimo dei maggioranti. Sia $D \in \mathcal{A}$ un maggiorante di $\mathcal{B}$. Dalle inclusioni $B \subset D$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, segue che

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset D.$$

□

3. Esercizi vari

Esercizio 3.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1 \Big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 3.2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \big\{ n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1 \big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 3.3. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1 \Big\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, ed inoltre:

i) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $|x| = |-x|$;
iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x+y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ che riordinata fornisce $|x| - |y| \leq |x - y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ è allora uno *spazio metrico*. La funzione $d(x, y) = |x - y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

Possiamo anticipare la definizione generale di spazio metrico.

Definizione 4.1 (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Dato uno spazio metrico (X, d), fissato un punto $x_0 \in X$ ed un raggio $r > 0$, l'insieme

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = B_X(x_0, r) = \big\{x \in X : d(x, x_0) < r\big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x_0 e raggio r. Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Nello spazio metrico $\mathbb{R}$ con la distanza standard, le palle sono intervalli aperti che si indicano anche con la seguente notazione:

$$I_r(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\big\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

Notazione per gli intervalli. Gli intevalli di $\mathbb{R}$ possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Ecco l'elenco. Siano $-\infty < a < b < \infty$. Si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$\begin{aligned} (a,b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\big\} && \text{intervallo aperto,}\\ [a,b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\big\} && \text{intervallo aperto a destra,}\\ (a,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\big\} && \text{intervallo aperto a sinistra,}\\ [a,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\big\} && \text{intervallo chiuso.} \end{aligned}$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$\begin{aligned} (-\infty,b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x < b\big\} && \text{intervallo aperto,}\\ (-\infty,b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\big\} && \text{intervallo chiuso,}\\ (a,\infty) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x > a\big\} && \text{intervallo aperto,}\\ [a,\infty) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x \geq a\big\} && \text{intervallo chiuso,} \end{aligned}$$

cui si aggiunge l'intervallo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

La famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi convessi di $\mathbb{R}$. Inoltre, la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi connessi di $\mathbb{R}$. Vedremo la nozione di *insieme connesso* in seguito.

5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio Euclideo n-dimensionale, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ ha n coordinate reali $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di somma vettoriale

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Questa operazione è associativa e commutativa. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di *prodotto per uno scalare*. Dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

In questo modo $\mathbb{R}^n$ ha una struttura di *spazio vettoriale*, come si vedrà nel corso di geometria.

Definizione 5.1 (Prodotto scalare). Definiamo l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$;
2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
3) $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) oppure con il simbolo $x \cdot y$.

Definizione 5.2 (Norma Euclidea). La norma Euclidea su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ così definita

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente, $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma. Precisamente, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si verifica:

1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (omogeneità);
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Proposizione 5.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue estraendo le radici. □

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su $\mathbb{R}^n$ la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\big\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r > 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

CHAPTER 3

Successioni reali e complesse

1. Successioni numeriche

Una *successione reale (risp. complessa)* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (risp. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). Indicheremo con $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ (risp. $a_n \in \mathbb{C}$) l'*elemento n-esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La successione si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots .$$

Definizione 1.1 (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L.$$

Il numero L si dice *limite della successione.*

Esempio 1.2. Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

Proposizione 1.3 (Unicità del limite). Se una successione reale risp. complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) allora questo limite è unico.

Dim. Siano L ed M entrambi limiti della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|a_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che $|L - M| = 0$ e quindi $L = M$. $\square$

Osservazione 1.4. Una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può scomporre nella sua parte reale e immaginaria:

$$a_n = \operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lasciamo come esercizio la verifica di questa affermazione: una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se convergono le successioni reali $(\operatorname{Re} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\operatorname{Im} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre, in questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Definizione 1.5. Diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ ("più infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Analogamente, diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ ("meno infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leq -M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Esempio 1.6. Verifichiamo usando la definizione che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+10} = \infty.$$

Fissato $M > 0$ arbitrariamente grande, dobbiamo trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+10} \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}. \tag{1.5}$$

Usiamo il *metodo delle maggiorazioni* e riduciamo la disuguaglianza data ad una disuguaglianza elementare. Come primo passo stimiamo il logaritmo con la disuguaglianza fondamentale

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } x > -1.$$

In effetti, ci basta la disuguaglianza $\log(1+n) \leq n$ per $n \in \mathbb{N}$, che può essere verificata per induzione. Usando questa informazione, si ottiene

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+10} \geq n^2 \frac{n-1}{n^2+10}.$$

Riduciamo ulteriormente la complessità della disuguaglianza. Per $n \geq 4$ si ha $n^2 + 10 \leq 2n^2$, e quindi con tale restrizione su n si ottiene

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+10} \geq \frac{n-1}{2}.$$

Dunque ci siamo ridotti alla disuguaglianza elementare

$$\frac{n-1}{2} \geq M \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2M+1.$$

Con la scelta $\bar{n} = \max\{4, [2M+1]+1\}$, la (1.5) è verificata.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 1.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 1.5 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè $\pm\infty$.

Una successione reale risp. complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata* se l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$). Equivalentemente, la successione è limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIZIONE 1.7. Se una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

DIM. Sia $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora $|a_n| \leq C$ per ogni $n = 1, \dots, \bar{n}$, elementarmente. Inoltre, per $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

□

TEOREMA 1.8 (Proprietà generali dei limiti). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$) convergenti. Allora:

1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$
2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$
3) Se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e il limite di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è 0, allora la successione quoziente $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

DIM. Indichiamo con $L, M \in \mathbb{R}$ (risp. $L, M \in \mathbb{C}$) i limiti delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $n \in \bar{\mathbb{N}}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

1) Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

2) Per la Proposizione 1.7, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ e $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - Lb_n + Lb_n - LM| \leq |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M| \leq C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon.$$

3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $M \neq 0$ per ipotesi, esiste $\widehat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \widehat{n}$ si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per $n \geq \max\{\bar{n}, \widehat{n}\}$ si ha

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\Big| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

Teorema 1.9 (Teorema del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti $L, M \in \mathbb{R}$ delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rispettivamente. Se $L = M$, allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|c_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha anche

$$b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon,$$
$$L - b_n \leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon,$$

e quindi $|b_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$. □

Definizione 1.10. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$ diremo che l'affermazione $A(n)$ è vera *definitivamente*.

Il Teorema sulle operazioni coi limiti e il Teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

Proposizione 1.11. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima (ovvero $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora la successione prodotto $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

Dim. Sia $C > 0$ una costante tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha

$$|a_nb_n| = |a_n||b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

Esercizio 1.1. Provare le seguenti affermazioni.

1) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$
2) Siano $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$
3) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata. Provare che la successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

4) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale, positiva, staccata da 0 ovvero: esiste $\delta > 0$ tale che $b_n \geq \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

2. Esempi di successioni elementari

Esempio 2.1 (Quoziente di polinomi). Siano P e Q polinomi a coefficienti reali nella variabile $x \in \mathbb{R}$ di grado p e q, rispettivamente, con $p, q \in \mathbb{N}$. Precisamente, supponiamo di avere

$$P(x) = a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$Q(x) = b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Avremo $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$. Senza perdere di generalità supponiamo che $a_p > 0$ e $b_q > 0$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q, \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } q > p. \end{cases}$$

La verifica è elementare e utilizza il teorema sulle operazioni con i limiti partendo dalla seguente identità:

$$\frac{a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_1 n + b_0} = n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} \ldots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \ldots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}.$$

Esempio 2.2 (Successione geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Studiamo la convergenza delle successione geometrica $a_n = q^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Verificheremo le seguenti affermazioni:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

L'ultima affermazione significa che il limite non esiste nè in $\mathbb{R}$ nè $\pm\infty$.

Esaminiamo il caso $-1 < q < 1$. È sufficiente considerare il caso $0 < q < 1$. Allora $q = 1 - x$ con $x \in (0, 1)$. Per tali x valgono le disuguaglianze

$$0 \leq (1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si veda l'Esercizio 5 del Foglio 1. Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0,$$

dal Teorema del confronto segue che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1-x)^n = 0.$$

Nel caso $q > 1$ si può scrivere $q = 1 + x$ con $x > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli si ottiene

$$q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

e per confronto si trova $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Sia ora $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Dall'identità $|z^n| = |z|^n$ si deduce che per $|z| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

Se invece $|z| \geq 1$ e $z \neq 1$ il limite non esiste.

Esempio 2.3 (Radice n-esima). Per ogni numero reale $p > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

È sufficiente considerare il caso $p > 1$. Il caso $0 < p < 1$ si riduce a questo passando ai reciproci. Se $p > 1$ si ha $\sqrt[n]{p} = 1 + a_n$ con $a_n > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

si ottiene

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n},$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esempio 2.4 (Radice n-esima di una potenza di n). Per ogni numero reale $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Proviamo l'effermazione nel caso $\beta = 1$. Si ha certamente $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Usando nuovamente la disuguaglianza di Bernoulli si trova

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

e quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}.$$

Dal Teorema del confronto segue che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. In conclusione, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^2 = 1.$$

Esempio 2.5 (Confronto fra potenze ed esponenziali). Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a > 1$ e $\beta > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\beta a^n}{a^{n+1} n^\beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\beta = \frac{1}{a} < 1,$$

fissato $\frac{1}{a} < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Iterando tale disuguaglianza si ottiene

$$0 \leq b_n \leq qb_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n-\bar{n}} b_{\bar{n}} = q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}}.$$

Per confronto con la successione geometrica si deduce che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Esempio 2.6 (Confronto fra esponenziale e fattoriale). Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $a > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

fissato $0 < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Come sopra, si conclude che $b_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio 2.7 (Confronto fra potenze e logaritmi). Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0.$$

Con la sostituzione $x_n = \log n$, ovvero $n = \mathrm{e}^{x_n}$, si ottiene per $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{\mathrm{e}^{x_n \alpha}} \leq \frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}}.$$

Siccome $\mathrm{e} > 1$ e $\alpha > 0$, la base dell'esponenziale verifica $\mathrm{e}^\alpha > 1$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}} < \varepsilon$$

non appena $[x_n] > M$. Ma siccome

$$\lim_{n\to\infty} [x_n] = \lim_{n\to\infty} [\log n] = \infty,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $[x_n] > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

3. Esercizi vari

Esercizio 3.1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

Esercizio 3.2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \Big).$$

Esercizio 3.3. Al variare di $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$, studiare la convergenza della successione numerica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$a_n = \frac{1}{b^n} \binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

4. Successioni monotone

DEFINIZIONE 4.1 (Successioni monotone). Una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice:

i) *crescente* se $a_n \le a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) *strettamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) *decrescente* se $a_n \ge a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iv) *strettamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione crescente o decrescente si dice *monotona*.

PROPOSIZIONE 4.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente e (superiormente) limitata. Allora la successione è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

DIM. L'insieme $A = \big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$ è superiormente limitato e quindi esiste finito

$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Siccome L è un maggiorante di A si ha $a_n \le L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome L è il minimo dei maggioranti di A, esiste $\bar n \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar n} > L - \varepsilon$. Dal fatto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, si deduce che per $n \ge \bar n$ si ha:

$$a_n \ge a_{\bar n} > L - \varepsilon.$$

Abbiamo dunque provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar n \in \mathbb{N}$ tale che per $n \ge \bar n$ risulta

$$L - \varepsilon < a_n \le L < L + \varepsilon.$$

Questa è la tesi della proposizione. □

Se una successione crescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è superiormente limitata, allora un argomento analogo al precedente prova che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Per le successioni decrescenti valgono affermazioni analoghe. Ad esempio, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e inferiormente limitata, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 4.2 abbiamo usato l'Assioma di completezza dei numeri reali per assicurarci dell'esistenza del numero $L \in \mathbb{R}$. La Proposizione 4.2 implica a sua volta l'Assioma di completezza. La dimostrazione di questo fatto è lasciata come esercizio.

ESERCIZIO 4.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la seguente successione definita in modo ricorsivo:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \ge 0.$$

Provare che la successione converge a calcolarne il limite.

Mostriamo che la successione è crescente e superiormente limitata. Sia $f(x) = \sqrt{2+x}$ la funzione, definita per $x \ge -2$, che interviene nella definizione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$. Studiamo la disuguaglianza

$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2.$$

Dunque, fintantochè $0 \le a_n < 2$ risulta $a_{n+1} > a_n$. Proviamo per induzione che $0 \le a_n < 2$. Per $n = 0$ questo è chiaro. Inoltre, si ha

$$a_{n+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 2.$$

Questo prova che la successione è crescente (strettamente) e superiormente limitata. Dunque esiste finito

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Passando al limite nella relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ ed usando la continuità di f si trova

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L).$$

Le soluzioni dell'equazione $L = f(L)$ sono $L = -1$ che è da scartare ed $L = 2$. Dunque, il limite è $L = 2$.

5. Il numero e

Nel seguente teorema con $x = 1$ si definisce il numero e di Nepero. Anticipiamo la nozione di somma infinita, che verrà introdotta nel prossimo capitolo.

Teorema 5.1. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito:

$$\mathrm{e}^x := \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n. \tag{5.6}$$

Inoltre risulta

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{5.7}$$

Dim. Iniziamo con il caso $x > 0$. Proveremo che la successione

$$a_n = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è crescente e superiormente limitata. Dalla Proposizione 4.2 segue l'esistenza finita del limite (5.6).

Dalla formula del binomio di Newton si ottiene

$$a_n = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \frac{x^k}{k!}, \tag{5.8}$$

e in modo analogo

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) \dots \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big) \frac{x^k}{k!}.$$

Dalle disuguaglianze

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big), \dots, \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < \Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big),$$

per $k = 0, 1, \dots, n$, e dal fatto che $x^k > 0$ segue che $a_n < a_{n+1}$. Siccome

$$\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < 1, \dots, \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) < 1,$$

dall'identità (5.8) si trova anche la maggiorazione

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}. \tag{5.9}$$

Scegliamo ora un numero naturale $m \in \mathbb{N}$ tale che $x < m \le n$ e spezziamo la somma nel seguente modo:

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^n \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^n \frac{x^k}{m^{k-m}m!}.$$

Abbiamo usato la disuguaglianza $k! = k(k-1)\cdot \ldots \cdot (m+1)m! > m^{k-m}m!$. D'altra parte, dalla formula per la somma geometrica parziale, si ottiene

$$\sum_{k=m}^n \frac{x^k}{m^{k-m}m!} = \frac{x^m}{m!}\sum_{k=m}^n \frac{x^{k-m}}{m^{k-m}} = \frac{x^m}{m!}\sum_{h=0}^{n-m}\left(\frac{x}{m}\right)^h = \frac{x^m}{m!}\frac{1-(x/m)^{n-m+1}}{1-x/m} < \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}.$$

Abbiamo usato il fatto che $m > x$. In conclusione, troviamo la maggiorazione indipendente da n:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} + \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}. \tag{5.10}$$

Questo termina la prova dell'esistenza finita del limite. Passando al limite nella disuguaglianza (5.9) si trova

$$\mathrm{e}^x \le \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}.$$

Una volta provata la disuguaglianza opposta, si ottiene la tesi (5.7).

Ripartiamo dall'identità (5.8) dove, come sopra, $n \ge m > x$:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} \\ &\ge \sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{x^k}{k!} - \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}. \end{aligned}$$

In questa disuguaglianza passiamo al limite per $n \to \infty$ e otteniamo la disuguaglianza

$$\mathrm{e}^x \ge \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} - \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x},$$

che vale per ogni $m > x$. Passando ora al limite per $m \to \infty$ e osservando che

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x} = 0,$$

si ottiene la disuguaglianza cercata:

$$\mathrm{e}^x \ge \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}.$$

Discutiamo infine il caso $x < 0$. Osserviamo preliminarmente che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1.$$

Questo segue dal Teorema del confronto a partire dalle disuguaglianze (usiamo la disuguaglianza di Bernoulli)

$$1 > \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{x^2}{n}.$$

Dunque, per $x > 0$ si trova

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}.$$

Ovvero, $\mathrm{e}^{-x} = (\mathrm{e}^x)^{-1}$. □

La formula (5.7) è stata provata solo per $x > 0$, ma vale per ogni $x \in \mathbb{R}$. La prova è omessa.

Osservazione 5.2. Per il Teorema 5.1, risulta definita una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Elenchiamo alcune proprietà di questa funzione.

1) Si ha $\mathrm{e}^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo deriva dal fatto che definitivamente si ha
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n > 0,$$
e che la successione è crescente.
2) La funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$ è strettamente crescente. Questo è chiaro, quando $x > 0$, dalla formula
$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$
3) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha
$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y.$$
In altri termini, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ è un omomorfismo dal gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ al gruppo moltiplicativo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, dove $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Una prova di tale identità si può ottenere mostrando che
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{x+y}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{y}{n}\right)^n} = 1.$$

Osservazione 5.3. Il numero di Nepero è per definizione

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Sappiamo che per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $\mathrm{e} > \sum_{k=0}^{m-1} 1/k!$. Con la scelta $m = 4$ si ottiene la stima dal basso

$$\mathrm{e} > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2 + \frac{2}{3}.$$

Per ottenere una stima dall'alto si può usare la (5.10) con $x = 1$:

$$\mathrm{e} < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{m}{m!(m-1)},$$

che con $m = 4$ fornisce

$$\mathrm{e} < 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} < 3.$$

6. Limiti inferiore e superiore

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definiscano:

$$b_n = \inf\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \inf_{m\geq n} a_m,$$
$$c_n = \sup\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \sup_{m\geq n} a_m.$$

Può essere $b_n = -\infty$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ ovvero per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Può essere $c_n = \infty$ per qualche, ovvero per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che questa situazione banale non avvenga.

La successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente in quanto al crescere di n, l'insieme di cui si calcola l'estremo inferiore si restringe. Analogamente, la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente. Dunque, esistono i limiti

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Definizione 6.1 (Limiti inferiore e superiore). Si definiscono i limiti inferiore e superiore di una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rispettivamente come:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

La comodità dei limiti inferiore e superiore è che sono sempre definiti. Chiaramente, vale sempre la disuguaglianza

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Proposizione 6.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $L \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A) $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n > L - \varepsilon$;

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n < L + \varepsilon$.

Dim. Sia $L = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m$, ovvero L è il massimo dei minoranti dell'insieme $A = \{c_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, con $c_n = \sup_{m\geq n} a_m$. Siccome L è un minorante:

$$\forall \bar{n} \in \mathbb{N} : \sup_{m\geq \bar{n}} a_m \geq L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \exists n \geq \bar{n} : a_n > L - \varepsilon.$$

Abbiamo in effetti provato che L è un minorante di A se e solo se vale i).

Inoltre, L è il massimo dei minoranti. Dunque, $L+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ non è un minorante. Ovvero:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \sup_{m \geq \bar{n}} a_m < L + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n} : a_n < L + \varepsilon.$$

Abbiamo in affetti provato che L è il massimo dei minoranti se e solo se vale l'affermazione ii). □

Per il limite inferiore si ha un'analoga caratterizzazione che riportiamo senza prova.

PROPOSIZIONE 6.3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $L \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A) $L = \liminf_{n\to\infty} a_n$;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n < L + \varepsilon$;

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n > L - \varepsilon$.

Mettendo insieme l'affermazione ii) della Proposizione 6.2 con l'affermazione ii) della Proposizione 6.3 si ottiene il seguente corollario.

COROLLARIO 6.4. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Allora il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

esiste finito se e solo se

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = L.$$

Questo corollario vale anche quando $L = \infty$ oppure $L = -\infty$.

OSSERVAZIONE 6.5. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali. Valgono sempre le seguenti disuguaglianze:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n),$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \geq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n),$$

e le disuguaglianze possono essere strette. Se una delle successioni converge, tuttavia, si hanno uguaglianze. Omettiamo la prova di queste affermazioni.

ESEMPIO 6.6. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$a_n = \frac{n^2 \cos(n\pi)}{n^2 + 1}.$$

Proviamo che

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Partiamo dal limite superiore. Chiaramente, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n \leq 1 < 1 + \varepsilon.$$

D'altra parte, per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ posso trovare $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n > 1 - \varepsilon$, in quanto

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{4n^2 + 1} = 1.$$

Per il limite inferiore si argomenta in modo analogo. Da un lato si ha $a_n \geq -1 > -1-\varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n < -1+\varepsilon$ in quanto

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(2n+1)^2}{(2n+1)^2+1} = -1.$$

7. Teorema di Bolzano-Weierstrass

Vogliamo definire la nozione di sottosuccessione.

Definizione 7.1. Una selezione crescente di indici è una funzione (successione) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che è strettamente crescente, $k(n) < k(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scriveremo $k_n = k(n)$.

Definizione 7.2. Una *sottosuccessione* di una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione della forma $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ con $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ selezione crescente di indici.

Sappiamo che tutte le successioni convergenti sono limitate. Le successioni limitate in generale non sono convergenti, ma hanno sempre una sottosuccessione convergente.

Teorema 7.3. Ogni successione reale limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente.

Questo teorema vale anche per le successioni complesse (estrarre una sottosuccessione della parte reale e poi un'ulteriore sottosuccessione da quella immaginaria). La dimostrazione del Teorema 7.3 si basa sul Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Definizione 7.4. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se per ogni $\delta > 0$ si ha

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset,$$

ovvero, equivalentemente, se per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$.

Ricordiamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice *limitato* se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $A \subset [a, b]$.

Teorema 7.5 (Bolzano-Weierstrass). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato con $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Allora A ha almeno un punto di accumulazione.

NOTARE la correzione della Proposizione 1.3 a pagina 6. Vedere i commenti a pagina 7.