Analisi Matematica 1 – Matematica

Insiemi, cardinalità, induzione — Foglio 1

Esercizio 1 Sia $f : A \to B$ una funzione. Verificare le seguenti inclusioni per le immagini e le antimmagini e provare tramite esempi che le inclusioni possono essere strette.

1) Per ogni insieme $C \subset A$ si ha $C \subset f^{-1}(f(C))$.

2) Per ogni insieme $D \subset B$ si ha $f(f^{-1}(D)) \subset D$.

Sotto quali ipotesi su f l'inclusione è, in ciascuno dei due casi, un'uguaglianza?

Esercizio 2 Siano A, B, C insiemi finiti e indichiamo con $|A| = \mathrm{Card}(A)$ la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Provare preliminarmente un'analoga formula nel caso di due insiemi.

Esercizio 3 Siano $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ e $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Esibendo biiezioni concrete, provare che:

1) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}([0,1))$;

2) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}((0,1))$;

3) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

Esercizio 4 Verificare mediante induzione le seguenti identità per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2.$$

Esercizio 5 Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $0 < x < 1$. Usando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

Esercizio 6 Ad un torneo partecipano $n \in \mathbb{N}$ squadre, $n \geq 3$. Ogni squadra gioca una volta con ogni altra squadra. Ci sono tre squadre A, B, C tali che A sconfigge B, B sconfigge C e C sconfigge A. Dimostrare che alla fine del torneo ci sono almeno due squadre a pari punti.