

# Analisi Matematica 1 – Matematica

Secondo Compitino - Simulazione

Mercoledì 18 Gennaio 2012

---

**Esercizio 1** (8 punti) Sia  $A \subset \mathbb{R}$  un insieme da determinare e consideriamo la funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1 + |x|}{1 - |x|}, \quad x \in A.$$

- i) Determinare il più grande insieme  $A \subset \mathbb{R}$  su cui  $f$  è definita.
- ii) Utilizzando la definizione  $\varepsilon - \delta$ , provare che  $f$  è continua su  $A$  (nella distanza standard).

**Esercizio 2** (8 punti) Al variare del parametro reale  $\alpha \geq 0$ , si consideri la serie di potenze nella variabile complessa  $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{n^\alpha + 1}.$$

- i) Calcolare il raggio di convergenza  $R$  della serie.
- ii) Discutere la convergenza della serie nei punti  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z| = R$ .
- iii) Discutere la convergenza totale e uniforme della serie.

Sia noto che la successione  $n \mapsto n/(n^\alpha + 1)$  è decrescente quando  $\alpha > 1$ .

**Esercizio 3** (8 punti) Si consideri la funzione  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|^{1/2}\}.$$

- i) Provare che  $(\mathbb{R}^2, d)$  è uno spazio metrico.
- ii) Disegnare l'insieme  $B_r(0)$ ,  $0 \in \mathbb{R}^2$ , nel caso  $r = 1/2$  ed  $r = 2$ .
- iii) Provare che la topologia di  $(\mathbb{R}^2, d)$  coincide con la topologia standard di  $\mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 4** (8 punti) Provare che per ogni successione reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

- (A) La successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge (ad un limite finito);
- (B) Esiste un numero  $L \in \mathbb{R}$  con questa proprietà: ogni sottosuccessione di  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ha una ulteriore sottosuccessione che converge ad  $L$ .

---

2 ore e 30 minuti a disposizione