Analisi Matematica 1 – A

Nome: Appello scritto del 28 Giugno 2012

Esercizio 1 Al variare dei numeri reali $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza della successione reale

$$a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Suggerimento: studiare il quoziente $b_n = a_{n+1}/a_n$.

Esercizio 2 Si consideri la successione numerica

$$a_n = n! + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

Al variare del numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ calcolare i seguenti

$$L^+ = \limsup_{n\to\infty} n \sin\big(x a_n \pi\big) \quad \text{e} \quad L^- = \liminf_{n\to\infty} n \sin\big(x a_n \pi\big).$$

Esercizio 3 Sia (X, d) uno spazio metrico e sia δ la distanza su X definita da

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

1) Provare che (X, d) e (X, δ) hanno la stessa topologia (ovvero: un insieme $A \subset X$ è aperto relativamente a d se e solo se lo è relativamente a δ).

2) Provare che (X, d) è completo se e solo se (X, δ) è completo.

Tempo a disposizione: 2.30 ore.

Esercizio 1 Al variare dei numeri reali $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza della successione reale

$$a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Soluzione. Formiamo il quoziente

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(n+1)^\alpha}}{((n+1)!)^\beta} \cdot \frac{(n!)^\beta}{2^{n^\alpha}} =$$

$$= \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^\beta 2^{(n+1)^\alpha - n^\alpha}$$

$$= \frac{2^{(n+1)^\alpha - n^\alpha}}{(n+1)^\beta}.$$

Esaminiamo l'esponente

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - n^\alpha =$$

$$= n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right] = n^\alpha \left[\alpha \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= n^{\alpha-1} \left[\alpha + o(1)\right] \quad \text{dove} \quad o(1) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Deduciamo che definitivamente si ha:

$$\frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq 2\alpha\, n^{\alpha-1}$$

Distinguiamo ~~due~~ dunque i due casi: 1) $0<\alpha\leq 1$; 2) $\alpha>1$

1) In questo caso:

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^\alpha - n^\alpha = 0 \quad \text{se} \quad 0<\alpha<1$$

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha \equiv 1 \quad \text{se} \quad \alpha = 1.$$

Siccome $\beta>0$, deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)^\alpha - n^\alpha}}{(n+1)^\beta} = 0 \quad \text{se} \quad \alpha\leq 1.$$

Dunque $b_n \leq 1/2$ definitivamente, ovvero:

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2} a_n \quad \text{definitivamente.}$$

Questo implica che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2) In questo caso ($\alpha>1$):

$$\frac{2^{(n+1)^\alpha - n^\alpha}}{(n+1)^\beta} \geq \frac{2^{\frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1}}}{(n+1)^\beta} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

Deduciamo che $b_n \geq 2$ definitivamente, ovvero

$$a_{n+1} \geq 2\, a_n \quad \text{definitivamente.}$$

Questo implica che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty .$$

Risposta:

$$\text{Limite} = 0 \quad \text{se} \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

$$\text{Limite} = \infty \quad \text{se} \quad \alpha > 1.$$

Indipendentemente da $\beta > 0$.

$\square$

<u>Esercizio 2</u> Si consideri la successione numerica

$$a_n = n! + \frac{(-1)^n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Al variare del numero razionale $x \in \mathbb{R}$ calcolare i seguenti

$$L^+ = \limsup_{n \to \infty} n \sin(x a_n \pi),$$

$$L^- = \limsup_{n \to \infty} n \sin(x a_n \pi).$$

Soluzione. Per le formule di addizione del seno:

$$\sin\left(x\left(n! + \frac{(-1)^n}{n}\right)\pi\right) = \sin\left(x n! \pi + x \frac{(-1)^n}{n} \pi\right) =$$

$$= \sin(x\, n!\, \pi) \cos\left(x \frac{(-1)^n}{n} \pi\right) + \cos(x\, n!\, \pi) \sin\left(x \frac{(-1)^n}{n} \pi\right).$$

Siccome $x \in \mathbb{Q}$, definitivamente si ha $x\, n! \in 2\mathbb{Z}$, ovvero $x\, n!$ è un intero multiplo di 2. Dunque, definitivamente si ha:

$$\sin(x\, n!\, \pi) = 0 \quad e \quad \cos(x\, n!\, \pi) = 1.$$

Dobbiamo dunque calcolare

$$L^+ = \limsup_{n \to \infty} n \sin\left(x \frac{(-1)^n}{n} \pi\right),$$

$$L^- = \liminf_{n \to \infty} n \sin\left(x \frac{(-1)^n}{n} \pi\right).$$

Distinguendo indici pari / indici dispari:

$$\lim_{n \to \infty} 2n \sin\left(x \frac{1}{2n} \pi\right) = x\pi,$$

$$\lim_{n \to \infty} (2n+1) \sin\left(x \frac{-1}{2n+1} \pi\right) = -x\pi.$$

Deduciamo che

$$L^+ = |x|\pi,$$

$$L^- = -|x|\pi.$$

$\square$

<u>Esercizio 3</u> Sia (X,d) uno spazio metrico e sia δ la distanza su X definita da

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad x,y \in X.$$

1) Provare che (X,d) e (X,δ) hanno la stessa topologia.

2) Provare che (X,d) è completo se e solo se (X,δ) è completo.

Soluzione. Osserviamo che si ha la disuguaglianza banale

$$\delta = \frac{d}{1+d} \leq d.$$

Vediamo quando vale una maggiorazione opposta.
Ad esempio, studiamo $d \leq 2\delta$, ovvero:

$$d \leq 2\frac{d}{1+d} \iff d+d^2 \leq 2d$$
$$\iff d^2-d \leq 0$$
$$\iff d(1-d) \leq 0$$
$$\iff d \leq 1 \quad (\text{infatti } d \geq 0 \text{ per definizione}).$$

Abbiamo visto dunque che

$$d \leq 1 \implies d \leq 2\delta$$
(vero anche $\Leftarrow$)

1) Dalla disuguaglianza $\delta \leq d$ deduciamo che

$$B_d(x,r) \subset B_\delta(x,r) \qquad \forall x \in X, \forall r>0.$$

Quindi, per ogni insieme $A \subset X$ si ha l'implicazione

$$A \text{ aperto in } (X,\delta) \implies A \text{ aperto in } (X,d).$$

Usando il fatto $d \leq 1 \iff d \leq 2\delta$ vediamo che

$$\delta \leq \frac{1}{2} \implies d \leq 1 \implies d \leq 2\delta.$$

Quindi per ogni $x \in X$ e per ogni $0<r<\frac{1}{2}$ (non restrittivo) si ha

$$B_\delta(x,r) \subset B_d(x,2r).$$

Segue che

$$A \text{ aperto in } (X,d) \implies A \text{ aperto in } (X,\delta).$$

2) Sia (X,d) completo e proviamo che (X,δ) è completo. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in (X,δ). Dalla disuguaglianza $d \leq 2\delta$ (per $\delta < \frac{1}{2}$) segue che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X,d) e quindi esiste $x \in X$ tale che

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x.$$

Dal fatto che $\delta \leq d$ segue che anche $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\delta} x$.

Quindi (X,δ) è completo.

L'implicazione opposta è analoga.

$\square$