Analisi Matematica 1 – A+B

Nome: Appello scritto del 28 Giugno 2012

Esercizio 1 (8 punti) Al variare dei numeri reali $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza della successione

$$a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Suggerimento: studiare il quoziente $b_n = a_{n+1}/a_n$.

Esercizio 2 (8 punti) Si consideri la successione numerica

$$a_n = n! + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

Al variare del numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ calcolare i seguenti

$$L^+ = \limsup_{n\to\infty} n \sin\big(x a_n \pi\big) \quad \text{e} \quad L^- = \liminf_{n\to\infty} n \sin\big(x a_n \pi\big).$$

Esercizio 3 (8 punti) Sia $p > 1$ un numero reale fissato. Determinare le migliori costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $t > 0$ risulti

$$\alpha \leq \frac{t^p + 1}{(t+1)^p} \leq \beta.$$

Esercizio 4 (8 punti) Sia $I :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione

$$I(x) := \int_x^{2x} \frac{1}{1 + y \log y}\, dy, \quad x > 0.$$

i) Maggiorando opportunamente l'integrale dimostrare che $I(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ (sugg: la funzione integranda è decrescente).

ii) Mostrare che I è derivabile su $]0, +\infty[$ e calcolare $I'(x)$.

iii) Determinare delle costanti $C \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che $I(x) \sim_{+\infty} C(\log x)^\beta$.

Tempo a disposizione: 3 ore.

Esercizio Sia $I:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ la funzione

$$I(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{1+y\log y}\,dy,\qquad x>0.$$

i) Provare che $\lim_{x\to\infty} I(x)=0$;

ii) Provare che I è derivabile e calcolare $I'(x)$;

iii) Determinare delle costanti $C\neq 0$ e $\beta\in\mathbb{R}$ t.c. $I(x)\underset{\infty}{\sim} C(\log x)^{\beta}$

Soluzione. i) Osserviamo preliminarmente che $1+x\log x>0$ per ogni $x>0$ (verifica omessa). Dunque $I(x)$ è ben definita per ogni $x>0$. Se $y>1$ abbiamo certamente

$$\frac{1}{1+y\log y}<\frac{1}{y\log y}$$

e quindi per $x>1$ si ha

$$0<\int_x^{2x}\frac{1}{1+y\log y}\,dy<\int_x^{2x}\frac{1}{y\log y}\,dy=$$

$$=\Big[\log(\log y)\Big]_{y=x}^{y=2x}=\log(\log 2x)-\log(\log x)=$$

$$=\log\left(\frac{\log 2x}{\log x}\right)=\log\left(1+\frac{\log 2}{\log x}\right)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$

Per confronto:

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{1+y\log y}\,dy = 0$$

ii) Per il teorema di derivazione delle funzioni integrali si ha $I \in C^1(0,\infty)$ (in quanto l'integranda è continua), e inoltre

$$I'(x) = 2\cdot\frac{1}{1+2x\log(2x)} - \frac{1}{1+x\log x}.$$

iii) Abbiamo visto che

$$I(x) < \log\left(1+\frac{\log 2}{\log x}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{\log 2}{\log x}$$

Questo suggerisce la scelta $c = \log 2$ e $\beta = -1$.

Certamente dovrò essere $\beta < 0$.

Cerchiamo di determinare le costanti con il Teorema di Hôspital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{I(x)}{c(\log x)^\beta} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{I'(x)}{c\beta(\log x)^{\beta-1}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{x\left(2+2x\log x - 1 - 2x\log(2x)\right)}{c\beta(\log x)^{\beta-1}\left(1+2x\log 2x\right)\left(1+x\log x\right)}}_{= f(x)}$$

dove

$$f(x) = \frac{x\left(1 + \cancel{2x \lg x} - \cancel{2x \lg x} - 2x \lg 2\right)}{C\beta\,(\lg x)^{\beta-1}\, 2x\, \lg(2x)\left(1+\frac{1}{2x\lg 2x}\right) x \lg x \left(1+\frac{1}{x\lg x}\right)}$$

$$= \frac{-\cancel{2}\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{2x\lg 2}\right)\cdot \lg 2}{C\beta\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{x^2}\cdot(\lg x)^{\beta-1}(\lg 2x)(\lg x)\left(1+\frac{1}{2x\lg 2x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x\lg x}\right)}$$

$\boxed{\text{scelta } \beta = -1}$

$$\underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-1\cdot \lg 2}{-C} = \frac{1}{C}\cdot \lg 2$$

Se richiedo $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} 1$ ottengo $C = \lg 2$.

Altra soluzione del punto iii). Abbiamo provato che per $x > 1$ si ha

$$I(x) < \lg\left(1 + \frac{\lg 2}{\lg x}\right).$$

Cerchiamo una maggiorazione che va in direzione opposta. Fissiamo $\varepsilon > 0$ (piccola). Per $x > M = M(\varepsilon)$ (Esiste $M = M(\varepsilon)$ tale che ...) avremo

$$\frac{1}{\varepsilon} < x \lg x.$$

Quindi

$$I(x) = \int_x^{2x} \frac{dy}{1 + y \lg y} > \int_x^{2x} \frac{dy}{(1+\varepsilon)\, y \lg y} =$$

$$= \frac{1}{1+\varepsilon} \lg\left(1 + \frac{\lg 2}{\lg x}\right)$$

Dunque: $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x > M$ si ha:

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < \frac{I(x)}{\lg\left(1 + \frac{\lg 2}{\lg x}\right)} < 1$$

Quindi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{I(x)}{\lg\left(1 + \frac{\lg 2}{\lg x}\right)} = 1$$

Questo prova che $I(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \dfrac{\lg 2}{\lg x}$.

Esercizio 3 Sia $p > 1$ un numero reale fissato. Determinare le migliori costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $t > 0$ risulti

$$\alpha \leq \frac{t^p + 1}{(t+1)^p} \leq \beta.$$

Soluzione. Consideriamo la funzione $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\phi(t) = \frac{t^p + 1}{(t+1)^p}.$$

É certamente $\phi \in C^\infty(0, \infty)$. La sua derivata è:

$$\phi'(t) = \frac{p \cdot t^{p-1}(t+1)^p - (t^p+1) \cdot p \cdot (t+1)^{p-1}}{(t+1)^{2p}}$$

$$= p\,(t+1)^{p-1}\, \frac{t^{p-1}(t+1) - (t^p+1)}{(t+1)^{2p}}$$

$$= p\, \frac{t^p + t^{p-1} - t^p - 1}{(t+1)^{p+1}} = p\, \frac{t^{p-1} - 1}{(t+1)^{p+1}}.$$

Dunque

$$\phi'(t) > 0 \iff t^{p-1} - 1 > 0 \overset{\text{usiamo: } p>1}{\iff} t > 1,$$

$$\phi'(t) < 0 \iff t < 1,$$

$$\phi'(t) = 0 \iff t = 1.$$

Dunque ϕ decresce in $(0,1)$ e cresce in $(1, \infty)$.
Il punto $t = 1$ è il punto (unico) di minimo assoluto di ϕ e inoltre $\phi(1) = \dfrac{2}{2^p} = 2^{1-p}$.
Questo prova che $\phi(t) \geq \alpha := 2^{1-p}$ per ogni $t > 0$, ed α è ottimale.

Inoltre
$$\lim_{t\to 0^+} \phi(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^p+1}{(1+t)^p} = 1$$

e
$$\lim_{t\to \infty} \phi(t) = \lim_{t\to \infty} \frac{1+\frac{1}{t^p}}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^p} = 1$$

Dunque $\phi(t) < 1$ per ogni $t>0$. La scelta $\beta = 1$ è ottimale.