Analisi Matematica 1 – A+B

Nome: Appello scritto del 28 Giugno 2012

Esercizio 1 (8 punti) Al variare dei numeri reali $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza della successione

$$a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Suggerimento: studiare il quoziente $b_n = a_{n+1}/a_n$.

Esercizio 2 (8 punti) Si consideri la successione numerica

$$a_n = n! + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}.$$

Al variare del numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ calcolare i seguenti

$$L^+ = \limsup_{n\to\infty} n \sin\big(x a_n \pi\big) \quad \text{e} \quad L^- = \liminf_{n\to\infty} n \sin\big(x a_n \pi\big).$$

Esercizio 3 (8 punti) Sia $p > 1$ un numero reale fissato. Determinare le migliori costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $t > 0$ risulti

$$\alpha \le \frac{t^p + 1}{(t+1)^p} \le \beta.$$

Esercizio 4 (8 punti) Sia $I :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione

$$I(x) := \int_x^{2x} \frac{1}{1 + y \log y}\, dy, \quad x > 0.$$

i) Maggiorando opportunamente l'integrale dimostrare che $I(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ (sugg: la funzione integranda è decrescente).

ii) Mostrare che I è derivabile su $]0, +\infty[$ e calcolare $I'(x)$.

iii) Determinare delle costanti $C \neq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che $I(x) \sim_{+\infty} C(\log x)^\beta$.

Tempo a disposizione: 3 ore.