

Analisi Matematica 1 – A

Nome:

Appello scritto del 28 Giugno 2012

Esercizio 1 (11 punti) Al variare dei numeri reali $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza della successione

$$a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Suggerimento: studiare il quoziente $b_n = a_{n+1}/a_n$.

Esercizio 2 (11 punti) Si consideri la successione numerica

$$a_n = n! + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

Al variare del numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ calcolare i seguenti

$$L^+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} n \sin(x a_n \pi) \quad \text{e} \quad L^- = \liminf_{n \rightarrow \infty} n \sin(x a_n \pi).$$

Esercizio 3 (11 punti) Sia (X, d) uno spazio metrico e sia δ la distanza su X definita da

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

- 1) Provare che (X, d) e (X, δ) hanno la stessa topologia (ovvero: un insieme $A \subset X$ è aperto relativamente a d se e solo se lo è relativamente a δ).
- 2) Provare che (X, d) è completo se e solo se (X, δ) è completo.

Tempo a disposizione: 2.15 ore.