

# Analisi Matematica 1

Nome:

Appello scritto del 23 Luglio 2012

---

**Esercizio 1** (8 punti) Al variare del numero reale  $\alpha > 0$  studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}}.$$

Suggerimento: opportuni confronti.

**Esercizio 2** (8 punti) Si consideri la successione numerica

$$a_n = n! + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

Al variare del numero razionale  $x \in \mathbb{Q}$  calcolare i seguenti

$$L^+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} n \sin(x a_n \pi) \quad \text{e} \quad L^- = \liminf_{n \rightarrow \infty} n \sin(x a_n \pi).$$

**Esercizio 3** (8 punti) Determinare il più grande valore della costante  $K > 0$  tale che per ogni  $x > 0$  risulti

$$\log x \leq \frac{\sqrt{x}}{K}.$$

**Esercizio 4** (8 punti) Per  $\alpha > 0$  si consideri la funzione  $f_{\alpha} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_{\alpha}(x) := \log \left( \frac{x^{\alpha} + 5}{x^{\alpha} + 4} \right), \quad x \in [0, +\infty).$$

- i) Determinare le primitive di  $f_2$  (cioè per  $\alpha = 2$ ).
- ii) Determinare per quali  $\alpha > 0$  converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f_{\alpha}(x) dx.$$

---

Tempo a disposizione: 3 ore.