# Analisi Matematica 1 – Matematica

Secondo Compitino Lunedì 30 Gennaio 2012

VERSIONE **A**

**Esercizio 1** (8 punti) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e si consideri la serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n.$$

i) Calcolare il raggio di convergenza $R$ della serie.
ii) Discutere la convergenza nei punti $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = R$.
iii) Discutere la convergenza totale e uniforme della serie.

**Risoluzione.** i) Il raggio di convergenza $R \in [0, \infty]$ è definito dalla relazione

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}}.$$

Vedremo che in effetti il limite superiore è un limite. È un fatto noto che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1.$$

Analogamente, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(1+n^\alpha)} = 1.$$

Questo si prova con il teorema del confronto nel seguente modo. Se $\alpha \geq 0$ allora per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{\log(1+n^\alpha)} \leq \sqrt[n]{n^\alpha},$$

dove le successioni a destra e sinistra convergono entrambe ad 1. Se $\alpha < 0$ si hanno le disuguaglianze

$$\sqrt[n]{n^\alpha/2} \leq \sqrt[n]{\log(1+n^\alpha)} \leq \sqrt[n]{n^\alpha},$$

con la disuguaglianza di sinistra che vale definitivamente e quella di destra per ogni $n \geq 1$. Concludiamo che il limsup che definisce $R$ è un limite e si ha $R = 1$.

ii) Quando $|z| = 1$ allora $z = \mathrm{e}^{i\vartheta}$ per qualche $\vartheta \in [0, 2\pi)$ e la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{in\vartheta}.$$

Iniziamo a studiare il caso $\vartheta = 0$. Dalla maggiorazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2-\alpha}}$$

segue che per $1/2 - \alpha > 1$, ovvero $\alpha < -1/2$, la serie converge per il criterio del confronto. Esaminiamo il caso $\alpha \geq -1/2$. In questo caso usiamo il confronto

$$\frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2} \frac{n^\alpha}{\sqrt{n}},$$

che vale definitivamente, per dedurre che la serie diverge.

Passiamo al caso $\vartheta \in (0, 2\pi)$. Se $\alpha < -1/2$ la serie converge assolutamente (e quindi semplicemente) per gli argomenti del punto precedente. Esaminiamo il caso $\alpha \geq -1/2$. La successione

$$a_n = \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}$$

è infinitesima e definitivamente decrescente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La successione $b_n = \mathrm{e}^{in\vartheta}$ ha primitiva limitata. La serie dunque converge per il Criterio di Abel-Dirichlet.

iii) Il Criterio di Cauchy-Hadamard ci assicura della convergenza totale e uniforme su ogni insieme $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta\}$ con $0 \leq \delta < 1$.

Quando $\alpha < -1/2$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{|z|\leq 1} \left| \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} < \infty,$$

e quindi si ha convergenza totale e uniforme sul disco chiuso $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Quando $\alpha \geq -1/2$ non si può avere convergenza uniforme su $A$ perchè non c'è la convergenza puntale in $z = 1$.

**Esercizio 2** (8 punti) Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : z \neq i\}$ e si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z - i}.$$

Usando la definizione $\varepsilon - \delta$ provare che $f$ è continua in ogni punto di $A$.

**Risoluzione.** Sia $\varepsilon > 0$ e sia $w \in A$ un punto fissato. Dobbiamo trovare $\delta > 0$ in funzione di $\varepsilon$ e di $w$ tale che per ogni $z \in A$ si abbia l'implicazione

$$|z-w| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Esaminiamo la differenza

$$f(z) - f(w) = \frac{\bar{z}}{z-i} - \frac{\bar{w}}{w-i} = \frac{\bar{z}w - i\bar{z} - z\bar{w} + i\bar{w}}{(z-i)(w-i)}.$$

Stimiamo il numeratore in modulo:

$$\begin{aligned} |\bar{z}w - i\bar{z} - z\bar{w} + i\bar{w}| &\leq |-i\bar{z} + i\bar{w}| + |\bar{z}w - z\bar{w}| \\ &= |z-w| + |\bar{z}w - \bar{w}w + \bar{w}w - z\bar{w}| \\ &\leq |z-w| + |\bar{w}||z-w| + |w||z-w| = |z-w|(1+2|w|). \end{aligned}$$

Dunque abbiamo la disuguagliaza, valida per ogni $z \in A$:

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{|z-w|(1+2|w|)}{|z-i||w-i|}.$$

Ora restringiamo l'analisi agli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$|z-w| < \frac{1}{2}|w-i|.$$

Dovremo ricordarci di questa restrizione nella scelta finale di $\delta$. Avremo allora:

$$|z-i| = |z-w+w-i| \geq |w-i| - |z-w| \geq \frac{1}{2}|w-i|.$$

Ritornando alla disuguaguaglianza di nostro interesse troviamo

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{|z-w|(1+2|w|)}{|z-i||w-i|} \leq 2|z-w|\frac{1+2|w|}{|w-i|^2} = M|z-w|,$$

dove $M$ è definito dall'ultima uguaglianza. Possiamo finalmente scegliere $\delta$ nel seguente modo:

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}|w-i|, \frac{\varepsilon}{M}\right\}.$$

**Esercizio 3** (8 punti) Definiamo la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.

ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.

iii) Determinare il completamento di $(\mathbb{R}, d)$.

**Risoluzione.** i) Verifichiamo gli assiomi della funzione distanza. a) $d \geq 0$ è certamente verificata. Inoltre, se $d(x, y) = 0$ allora

$$|e^x - e^y| = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x - e^y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y,$$

in quanto la funzione $x \mapsto e^x$ è iniettiva per $x \in \mathbb{R}$. b) La proprietà simmetrica $d(x, y) = d(y, x) = 0$ è verificata. c) Infine, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha

$$d(x, y) = |e^x - e^y| \leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y| = d(x, z) + d(z, y).$$

ii) Per chiarire le idee sulla completezza consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^x$. L'immagine di questa funzione è $\varphi(\mathbb{R}) = (0, \infty) = X$, con lo 0 escluso. Su $X$ consideriamo la distanza standard $d_X(t, s) = |t - s|$. Allora si ha

$$d_X(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = d(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Ovvero $\varphi$ è un'isometria da $(\mathbb{R}, d)$ a $(X, d_X)$. Chiaramente $(X, d_X)$ non è completo. Il suo completamento è $[0, \infty)$ con la distanza standard. Il punto 0 si otterrebbe con "$\varphi(-\infty)$". È chiaro allora come scegliere una successione di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$ che non converge: si prende una successione che converge a $-\infty$. Sia $a_n = -n$, con $n \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$d(a_n, a_m) = |e^{-n} - e^{-m}| \leq e^{-n} + e^{-m} < \varepsilon$$

non appena $n, m \geq \bar{n}$ per un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ opportuno. Chiaramente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha punto limite in $\mathbb{R}$.

iii) Per completare $(\mathbb{R}, d)$ bisogna aggiungere il punto $-\infty$. Definiamo allora $Y = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, e posto $\varphi(-\infty) = 0$ avremo una funzione $\varphi : Y \to [0, \infty)$. Possiamo allora estendere $d$ ad una distanza $d_Y$ su $Y$ nel seguente modo

$$d_Y(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in Y.$$

Proviamo che $(Y, d_Y)$ è completo. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $(Y, d_Y)$ allora $b_n = \varphi(a_n)$ è di Cauchy in $[0, \infty)$ con la distanza standard, che è uno spazio metrico completo. Quindi esiste $b \in [0, \infty)$ tale che $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ con convergenza nella distanza standard. Ma $b = \varphi(a)$ per un unico $a \in Y$, in quanto $\varphi : Y \to [0, \infty)$ è iniettiva e suriettiva. Per le considerazioni fatte sopra si ha allora che

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{(Y,d_Y)} a.$$

La funzione $f : \mathbb{R} \to Y$, $f(x) = x$, è un'isometria ed inoltre $\overline{f(\mathbb{R})}^Y = \overline{\mathbb{R}}^Y = Y$, con chiusura nella distanza $d_Y$.

**Esercizio 4** (8 punti) Sia $(X, d)$ uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) L'interno $\mathrm{int}(A)$ è un insieme aperto, ed è il più grande insieme aperto contenuto in $A$.

ii) La chiusura $\overline{A}$ è un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene $A$.

**Risoluzione.** i) Se $x \in \mathrm{int}(A)$ allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$. Sia ora $y \in B_r(x)$ e fissiamo $0 < s < r - d(x, y)$. Se $z \in B_s(y)$ allora

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < s + d(y, x) < r,$$

ovvero $z \in B_r(x)$. Dunque, $B_s(y) \subset B_r(x) \subset A$, e questo prova che $y \in \mathrm{int}(A)$ per ogni $y \in B_t(x)$, ovvero $B_r(x) \subset \mathrm{int}(A)$. Questo prova che $\mathrm{int}(A)$ è aperto.
Sia ora $B$ un aperto tale che $B \subset A$. Se $x \in B$ allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset B \subset A$ e quindi $x \in \mathrm{int}(A)$. Questo prova che $B \subset \mathrm{int}(A)$. Sappiamo che $\mathrm{int}(A) \subset A$. Quindi $\mathrm{int}(A)$ è il più grande aperto contenuto in $A$.
ii) La cosa più semplice è di argomentare per dualità. Infatti si ha

$$X \setminus \overline{A} = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \cap A = \emptyset\ \big\} = \mathrm{int}(X \setminus A),$$

e l'ultimo insieme è aperto per il punto i). Dunque $\overline{A}$ è chiuso.
Sia ora $C$ un chiuso che contiene $A$. Se $x \in \overline{A}$ allora $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ per ogni $r > 0$. Ma siccome $A \subset C$ si ha anche $B_r(x) \cap C \neq \emptyset$ per ogni $r > 0$. Dunque, si conclude che $x \in \overline{C} = C$, come dovevasi dimostrare.
esiste una successione $x_n \in A \subset C$, $n \in \mathbb{N}$, che converge ad $x$. Siccome $C$ è chiuso deve essere $x \in C$. Questo prova che $\overline{A} \subset C$. Dunque, la chiusura di un insieme è il più piccolo chiuso che contiene l'insieme.
Ecco altri due argomenti alternativi per provare che $\overline{A}$ è chiuso.
L'inclusione $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ è sempre vera. Dobbiamo provare l'inclusione opposta $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Sia $x \in \overline{\overline{A}}$. Allora per ogni $r > 0$ si ha $B_r(x) \cap \overline{A} \neq \emptyset$. Esiste dunque $y \in B_r(x) \cap \overline{A}$. Sia $s > 0$ tale che $B_s(y) \subset B_r(x)$. Tale $s > 0$ esiste. Siccome $y \in \overline{A}$ si avrà

$$B_s(y) \cap A \neq \emptyset.$$

Per inclusione deduciamo che $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. Questo prova che $x \in \overline{A}$.
Alternativamente, si può lavorare con la caratterizzazione sequenziale della chiusura. Se $x \in \overline{\overline{A}}$ allora esiste una successione $(\bar{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\bar{x}_n \in \overline{A}$ e $d(\bar{x}_n, x) < 1/n$ per ogni $n \geq 1$. D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A$ tale che $d(x_n, \bar{x}_n) < 1/n$. In conclusione, si ha

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, \bar{x}_n) + d(\bar{x}_n, x) \leq \frac{2}{n}.$$

Dunque la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $x$ ed è contenuta in $A$. Questo prova che $x \in \overline{A}$.