Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2013-2014

Roberto Monti

Versione del 10 Gennaio 2014

Contents

Chapter 1. Cardinalità 5
1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale 5
2. Cardinalità 8
3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili 10
4. Numeri naturali e induzione 12
5. Esercizi 14

Chapter 2. Numeri reali 17
1. Relazioni d'ordine 17
2. Introduzione assiomatica dei numeri reali 17
3. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$ 21
4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico 22
5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico 24
6. Esercizi 26

Chapter 3. Successioni reali e complesse 29
1. Successioni numeriche 29
2. Esempi di successioni elementari 33
3. Successioni monotone 35
4. Limiti inferiore e superiore 37
5. Esercizi 39

Chapter 4. Serie reali e complesse 47
1. Serie numeriche. Definizioni 47
2. Serie geometrica. Serie telescopiche 48
3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali 49
4. Criterio di condesazione di Cauchy per serie reali 51
5. Convergenza assoluta di serie reali e complesse 52
6. Criterio di Abel-Dirichlet e criterio di Leibniz 53
7. Esercizi 56
8. La funzione esponenziale e^x 60
9. Teorema di Bolzano-Weierstrass 64
10. Successioni di Cauchy. Completezza metrica di $\mathbb{R}$ 66
11. Criteri di convergenza di Cesàro 67
12. Rappresentazione dei reali in base b 68
13. Riordinamenti di serie 72
14. Criterio del confronto asintotico 74
15. Prodotto di serie reali o complesse 75
16. Convergenza di successioni uniforme rispetto ad un parametro 76

17. Serie di funzioni. Criterio di Weierstrass 78
18. Criteri di Abel–Dirichlet 79
19. Serie di potenze 81
20. Funzioni exp, cos e sin in campo complesso 82

Chapter 5. Spazi metrici 85
1. Definizioni ed esempi 85
2. Spazi metrici indotti da spazi normati 86
3. Successioni in uno spazio metrico 87
4. Limiti di funzione 87
5. Funzioni continue fra spazi metrici 94
6. Topologia di uno spazio metrico 99
7. Caratterizzazione topologica della continuità 103

CHAPTER 1

Cardinalità

1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi. Non diamo una definizione di "insieme". Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato "insieme ambiente", che indicheremo con X. Se un elemento x di X appartiene ad un insieme A scriveremo $x \in A$. Se x non appartiene ad A scriveremo $x \notin A$. Con $A \subset B$ si intende l'inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo $\subset$ viene talvolta indicato con $\subseteq$. Se $A \subset B$ e $B \subset A$ gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali, $A = B$.

L'unione e l'intersezione di due insiemi A e B si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$A \cup B = \big\{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\big\},$$
$$A \cap B = \big\{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\big\}.$$

L'insieme che non contiene alcun elemento, l'*insieme vuoto*, si indica con $\emptyset$. Chiaramente, si ha $\emptyset \subset A$ per ogni insieme A. Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$.

La differenza di insiemi $A \setminus B$ (leggi "A meno B") è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \big\{x \in A : x \notin B\big\}.$$

Talvolta la differenza $A \setminus B$ è indicata con $A - B$.

Il complementare di un insieme A in X è l'insieme $A' = X \setminus A$. Talvolta il complementare è indicato con A^c. Con tale notazione si ha $A \setminus B = A \cap B'$. Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Più in generale, sia Λ una famiglia di indici e siano A_λ insiemi indicizzati da $\lambda \in \Lambda$. Allora l'unione e intersezione della famiglia $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sono:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \big\{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\big\},$$
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \big\{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\big\}.$$

Le formule di De Morgan sono

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A'_\lambda, \quad \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda,$$
$$X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda.$$

1.2. Funzioni fra insiemi. Una funzione $f : A \to B$ dall'insieme A all'insieme B è un'applicazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ un elemento $f(x) \in B$. L'insieme A si dice *dominio* e l'insieme B si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \big\{(x, y) : x \in A,\ y \in B\big\}.$$

Con (x, y) si indica la *coppia ordinata* formata da x e y, nell'ordine. Il *grafico* di una funzione $f : A \to B$ è il seguente sottoinsieme di $A \times B$:

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\big\}.$$

Osservazione 1.1. La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da A a B* è una terna ordinata (A, B, G) dove $G \subset A\times B$ è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni $x \in A$ esiste un unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$. L'insieme $G = \mathrm{gr}(f)$ è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione $f : A \to B$ per indicare una funzione.

Definizione 1.2 (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme $C \subset A$, l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \big\{f(x) \in B : x \in C\big\} \\ &= \big\{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\big\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di C rispetto ad f.

Dato in insieme $D \subset B$, l'insieme

$$f^{-1}(D) = \big\{x \in A : f(x) \in D\big\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di D ripetto ad f. Nel libro di G. De Marco, l'antimmagine viene indicata con la notazione $f^{\leftarrow}(D) = f^{-1}(D)$.

Proposizione 1.3. Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano $A_\lambda \subset A$ e $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} &f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \quad f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \\ &f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dim. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x)=y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ ed esiste } \lambda\in\Lambda \text{ tale che } x\in A_\lambda \text{ e } f(x)=y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda\in\Lambda \text{ ed esiste } x\in A_\lambda \text{ tale che } f(x)=y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda\in\Lambda \text{ tale che } y\in f(A_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad y\in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda). \end{aligned}$$

Nell'equivalenza centrale abbiamo usato il fatto che $\exists x \exists\lambda \ldots \Leftrightarrow \ldots \exists\lambda\exists x$.

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda\in\Lambda \text{ si ha } f(x)\in B_\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda\in\Lambda \text{ si ha } x\in f^{-1}(B_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad x\in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned}$$

Proviamo l'inclusione in alto a destra:

$$\begin{aligned} y \in f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x)=y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ tale che per ogni } \lambda\in\Lambda \text{ si ha } x\in A_\lambda \text{ e } f(x)=y \\ &\Rightarrow \quad \text{per ogni } \lambda\in\Lambda \text{ esiste } x\in A_\lambda \text{ tale che } f(x)=y \\ &\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda\in\Lambda \text{ si ha } y\in f(A_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \quad y\in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda). \end{aligned}$$

□

Osservazione 1.4. Si noti che nell'ultimo argomento della dimostrazione precedente si hanno tutte equivalenze tranne che l'implicazione centrale, che è del tipo

$$\exists x \forall\lambda \,:\, A(x,\lambda) \text{ è vera } \Rightarrow\ \forall\lambda\exists x \,:\, A(x,\lambda) \text{ è vera},$$

dove $A(x,\lambda)$ è un'affermazione che riguarda x e λ. Tale implicazione non può essere invertita. Infatti, nell'antecendente c'è una x che rende vera l'affermazione per ogni λ. Nella conseguente, invece, per ogni λ c'è una x (che quindi dipende da λ) che rende vera l'affermazione.

Esempio 1.5. Sia $A=\{0,1\}$ un insieme formato da due elementi e sia $B=\{0\}$. L'unica funzione $f:A\to B$ è $f(0)=f(1)=0$. Detti $A_0=\{0\}$ e $A_1=\{1\}$, si ha $A_0\cap A_1=\emptyset$ e quindi $f(A_0\cap A_1)=\emptyset$, mentre $f(A_0)\cap f(A_1)=\{0\}\neq\emptyset$.

Definizione 1.6. Una funzione $f:A\to B$ si dice:

i) *iniettiva* (1-1) se $f(x)=f(y)$ implica $x=y$ (equivalentemente se $x\neq y$ implica $f(x)\neq f(y)$);
ii) *suriettiva* (su) se per ogni $y\in B$ esiste $x\in A$ tale che $f(x)=y$;

iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$$f : A \xrightarrow{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva,}$$
$$f : A \xrightarrow{\text{su}} B \quad \text{funzione suriettiva,}$$
$$f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva e suriettiva.}$$

Definizione 1.7 (Funzione inversa e composta). Se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora $f : A \to f(A)$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa* $f^{-1} : f(A) \to A$ ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni tali che $f(A) \subset C$. Allora è ben definita la *funzione composta* $g \circ f : A \to D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$ allora si ha:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \quad \text{funzione identità su } A,$$
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \quad \text{funzione identità su } B.$$

Definizione 1.8. Sia $f : A \to B$ una funzione. Una funzione $g : B \to A$ si dice *inversa sinistra* di f se $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Una funzione $h : B \to A$ si dice *inversa destra* di f se $f \circ h = \mathrm{Id}_B$.

Osservazione 1.9. Se $f : A \to B$ è suriettiva, allora per ogni $y \in B$ la "fibra" $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ è non vuota. Con l'Assioma della Scelta, per ogni $y \in B$ si può selezionare un elemento $x \in f^{-1}(\{y\})$ e definire una funzione $h : B \to A$ ponendo $h(y) = x$. Dunque, si ha $f \circ h(y) = f(h(y)) = y$ per ogni $y \in B$. La funzione h è un'inversa destra di f.

2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

Definizione 2.1. Siano A e B insiemi. Diremo che:

i) $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$;
ii) $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : A \to B$;
iii) $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$ se $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ ma non esiste alcuna funzione suriettiva $f : A \to B$.

Se $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ diremo che gli insiemi A e B sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile.

Teorema 2.2 (Tricotomia dei cardinali). Vale sempre una delle seguenti tre possibilità: $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(B) < \mathrm{Card}(A)$.

La dimostrazione di questo teorema richiede l'Assioma della Scelta ed è omessa. Proveremo invece che l'affermazione $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ equivale all'esistenza di una funzione iniettiva $f : A \to B$ e di una funzione iniettiva $g : B \to A$.

Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme A è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A:

$$\mathcal{P}(A) = \big\{E : E \subset A\big\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ contiene sempre l'elemento $\emptyset$.

Teorema 2.3 (Cantor-Schröder-Bernstein). Siano A e B due insiemi, e siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$.

Dim. Premettiamo un argomento preparatorio. Consideriamo una funzione $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ che preserva le inclusioni:

$$E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F). \tag{2.2}$$

Affermiamo che esiste $F \in \mathcal{P}(A)$ tale che $F = T(F)$ (punto fisso).

Si consideri la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \big\{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\big\}$. È certamente $\mathcal{A} \neq \emptyset$ in quanto $\emptyset \in \mathcal{A}$. Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che $T(F) = F$. Infatti, usando le proprietà (1.1) e (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\Big(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\Big) = T(F).$$

D'altra parte, applicando T all'inclusione $F \subset T(F)$ si ottiene $T(F) \subset T(T(F))$ e quindi $T(F) \in \mathcal{A}$, da cui segue l'inclusione opposta $T(F) \subset F$. La conclusione è che $T(F) = F$.

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che T preserva le inclusioni:

$$\begin{aligned} E \subset F \quad &\Rightarrow \quad f(E) \subset f(F) \\ &\Rightarrow \quad B \setminus f(F) \subset B \setminus f(E) \\ &\Rightarrow \quad g(B \setminus f(F)) \subset g(B \setminus f(E)) \\ &\Rightarrow \quad A \setminus g(B \setminus f(E)) \subset A \setminus g(B \setminus f(F)). \end{aligned}$$

Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso $A_1 \in \mathcal{P}(A)$ di T ovvero un insieme tale che $T(A_1) = A_1$. Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ con unioni disgiunte. La funzione $f : A_1 \to B_1$ è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che $g(B_2) = A_2$. Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque, $g : B_2 \to A_2$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$ nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

□

Proposizione 2.4. Per ogni insieme A risulta $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$.

Dim. Certamente $\mathrm{Card}(A) \le \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$ in quanto la funzione $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$ è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$. La dimostrazione si basa sul "paradosso di Russell". Si consideri l'insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè f è suriettiva, esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = A_0$. Ci sono due casi:
Caso 1: $x_0 \in A_0$. Allora: $x_0 \notin f(x_0) = A_0$, assurdo.
Caso 2: $x_0 \notin A_0$. Allora: $x_0 \in f(x_0) = A_0$, assurdo.

□

3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge 1$ per escludere lo 0.

1. Insieme finito. Un insieme A si dice *finito* se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed una funzione $f : \{1, \dots, n\} \to A$ iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che $\mathrm{Card}(A) = n$. Se A non è finito, diremo che A è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo $\mathrm{Card}(A) = \infty$.

Proposizione 3.1. Se A è un insieme finito ed $f : A \to A$ è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:
1) f è iniettiva;
2) f è suriettiva;
3) f è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio e si può fare per induzione sulla cardinalità di A.

Esempio 3.2. L'insieme dei numeri pari $2\mathbb{N} = \{0, 2, \dots, 2n, \dots\}$ è infinito ed è equipotente con $\mathbb{N}$. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

Definizione 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

2. Insieme numerabile. Un insieme A si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : \mathbb{N} \to A$. Diremo in questo caso che:

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad \text{(Alef zero)}.$$

Il cardinale $\aleph_0$ è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se A è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$. La costruzione di f è induttiva:

i) Se definisce $f(0) \in A$ a piacere;

ii) Definiti $f(1), \dots, f(n) \in A$ distinti, si osserva che l'insieme $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ non è vuoto, altrimenti A sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$. Ne risulta una funzione $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile A possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \{a_0, a_1, \dots a_n, \dots\}.$$

3. $\mathbb{Z}$ è numerabile. L'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Proviamo che il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, ovvero che

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 1)$ è iniettiva. D'altra parte, la funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n, m) = 2^n 3^m$ è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.3 esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

ESERCIZIO 3.1. Controllare che la funzione $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita

$$h(n, m) = 2^m (2n + 1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

5. $A \times A$ è numerabile se A è numerabile. Se A è numerabile, anche il prodotto cartesiano $A \times A$ è numerabile. Sia $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva e suriettiva. Allora $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times A$, $F(n, m) = (f(n), f(m))$ è iniettiva e suriettiva. La composizione $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \to A \times A$ è allora iniettiva e suriettiva. Qui h è la funzione definita sopra.

6. $\mathbb{Q}$ è numerabile. L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e quindi l'inclusione è iniettiva da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$. Si consideri la funzione $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione g è iniettiva. Siccome $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile, esiste $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva. Dunque $h \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ è iniettiva.

7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

PROPOSIZIONE 3.4. Siano A_n, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è al più numerabile.

DIM. Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi A_n siano a coppie disgiunti, ovvero $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$, e che $A_n \neq \emptyset$. Vogliamo provare che A è numerabile.

Enumeriamo gli elementi di A_n in questo modo:

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,j}, \dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione $f : \mathbb{N} \to A$, $f(n) = a_{n,1}$ è iniettiva. Costruiamo una funzione $g : A \to \mathbb{N}$ iniettiva. È noto che l'insieme $P \subset \mathbb{N}$ dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo P:

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}.$$

Definiamo la funzione $g : A \to \mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$g(a_{n,j}) = p_n^j, \quad n, j \in \mathbb{N}, n, j \geq 1.$$

La funzione g è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j}) = g(a_{m,k}) \quad \Leftrightarrow \quad p_n^j = p_m^k \quad \Leftrightarrow \quad n = m,\ j = k \quad \Leftrightarrow \quad a_{n,j} = a_{m,k}.$$

$\square$

8. $\mathbb{R}$ non è numerabile. Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile. È più che numerabile.

4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione*.

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{4.3}$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1}$$
$$= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

4.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{4.4}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

4.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
ii) $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n + 1$:

$$\begin{aligned}
(x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$

5. Esercizi

Esercizio 5.1. Completare la dimostrazione della Proposizione 1.3. Sia $f : A \to B$ una funzione e siano $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Provare che

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

Esercizio 5.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.
1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f, ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita.
2) Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
3) Stabilire se f è iniettiva.
4) Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

Esercizio 5.3. Siano $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ il disco unitario, $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| < 1$, ed $f : D \to D$ sia la funzione

$$f(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}.$$

1) Verificare che f è definita su tutto D e che $f(D) \subset D$;
2) Provare che f è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa $f^{-1} : D \to D$.

Esercizio 5.4. Sia $f : A \to B$ una funzione.
1) Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha
$$C \subset f^{-1}(f(C)).$$
Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia iniettiva.
2) Provare che per ogni insieme $D \subset B$ si ha
$$f(f^{-1}(D)) \subset D.$$
Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia suriettiva.

Esercizio 5.5. Siano A, B, C insiemi finiti e indichiamo con $|A| = \mathrm{Card}(A)$ la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Esercizio 5.6. Siano $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ e $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Esibendo biiezioni concrete, provare che:

1) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}([0,1))$;
2) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}((0,1))$;
3) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.7. Verificare mediante induzione le seguenti identità per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2.$$

Esercizio 5.8. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $0 < x < 1$. Usando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

Esercizio 5.9. Dimostrare per induzione che

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1), \quad n \geq 1$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$$

$$3) \quad n! < \Big(\frac{n}{2}\Big)^n, \quad n \geq 6.$$

Esercizio 5.10. Sia $\mathcal{A} = \big\{I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervallo}\big\}$ un insieme costituito da intervalli non degeneri $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$. Supponiamo che $\mathcal{A}$ verifichi: $I, J \in \mathcal{A}$ con $I \cap J \neq \emptyset$ implica $I = J$ (ovvero, gli intervalli sono a coppie disgiunti).

Dimostrare che $\mathcal{A}$ è numerabile.

Suggerimento: stimare il numero di intervalli di $\mathcal{A}$ di lunghezza maggiore di $1/n$ contenuti nell'intervallo $(-m,m)$, con $n, m \geq 1$.

Esercizio 5.11. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Calcolare il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x+a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x+b)^m$. Precisamente, calcolare i polinomi $s(x)$ (il quoziente della divisione) ed $r(x)$ (il resto della divisione) tali che $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, dove il grado di r è al più $m-1$.

Esercizio 5.12. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una funzione iniettiva tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si abbia

$$|x - y| \leq 10 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq 10.$$

Determinare la funzione f.

Esercizio 5.13. i) Costruire una funzione $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tale che $f^{-1}(\{y\})$ sia numerabile per ogni $y \in [0, 1]$.

ii) Costruire una funzione $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tale che $\mathrm{Card}\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ per ogni $y \in [0, 1]$. Assumere come noto il fatto che $\mathrm{Card}([0, 1] \times [0, 1]) = \mathrm{Card}([0, 1])$.

CHAPTER 2

Numeri reali

1. Relazioni d'ordine

Premettiamo le definizioni di relazione, relazione d'ordine parziale e relazione d'ordine totale.

Definizione 1.1 (Relazione). Una relazione su un insieme X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$. Dati $x, y \in X$, diciamo che x è nella relazione R con y se $(x, y) \in R$. Scriveremo in questo caso xRy.

Definizione 1.2 (Ordine parziale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine parziale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

Ad esempio, l'insieme $X = \mathcal{P}(A)$ con la relazione di inclusione insiemistica $\subset$ è parzialmente ordinato.

Definizione 1.3 (Ordine totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva);
iv) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità).

2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo*. Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

Definizione 2.1. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

(S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);

(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:
(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:
(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;
(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:
(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve.

Definizione 2.2 (Campo, campo ordinato, campo ordinato completo).
i) Un insieme X munito di due operazioni $+$ e $\cdot$ che verificano gli assiomi (o proprietà) (S1)-(D) si dice *campo*.
ii) Se, in aggiunta ad i), vi è su X una relazione di ordine totale $\leq$ che verifica gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*.
iii) Se, infine, $(X, +, \cdot, \leq)$ verifica anche l'assioma di completezza, si ottiene un *campo ordinato completo*.

Ad esempio, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono campi; $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ sono campi ordinati; $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo.
Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Esempio 2.3. A titolo di esempio, facciamo alcuni calcoli basandoci solo sugli assiomi di campo ordinato.

1) Si ha $(-1) \cdot (-1) = 1$. Infatti:

$$0 = 0 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$$

e la tesi segue sommando a destra e sinistra 1.

2) Si ha $-x = (-1) \cdot x$. Infatti:

$$0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x,$$

e aggiungendo a destra e sinistra $-x$ si trova la tesi.

3) Si ha $x^2 \geq 0$ per ogni x nel campo ordinato. Infatti, se $x \geq 0$ allora $x \cdot x \geq x \cdot 0 = 0$. Se invece $x \leq 0$ allora $-x \geq 0$ e quindi

$$0 \leq (-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot x = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2.$$

Proposizione 2.4. I numeri complessi $\mathbb{C}$ sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

Dim. Che $\mathbb{C}$ sia un campo è noto dal corso di Geometria. Supponiamo per assurdo che ci sia su $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine totale $\geq$. L'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ dovrebbe allora verificare $-1 = i^2 \geq 0$ e quindi si avrebbe $1 \leq 0$. D'altra parte si ha anche $1 = 1^2 \geq 0$. Si deduce che $1 = 0$ e questo non è possibile. $\square$

Definizione 2.5 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \leq z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo
$$\sup A = x.$$
iv) Se A non è superioremente limitato porremo
$$\sup A = \infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici.

Osservazione 2.6 (Caratterizzazione dell'estremo superiore). Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \leq x$ per ogni $y \in A$ (x è un maggiorante);
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$ (x è il minimo dei maggioranti).

Definizione 2.7 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \leq x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \leq x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo
$$\inf A = x.$$
iv) Se A non è inferiormente limitato porremo
$$\inf A = -\infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\min A = x.$$

Osservazione 2.8 (Formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza). Rienunciamo l'Assioma di completezza dei numeri reali:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Tale assioma puè essere riformulato in diversi modi fra loro equivalenti:

1) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferioremente limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo inferiore.

2) Ogni sezione di $\mathbb{R}$ ha un unico elemento separatore.
3) Ogni successione monotona e limitata in $\mathbb{R}$ è convergente.
4) Ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ha una sottosuccessione convergente (proprietà di Bolzano-Weierstrass).
5) Ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente (ovvero, $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo).
6) Ogni successione di intervalli chiusi non vuoti $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tale che $I_{k+1} \subset I_k$ verifica
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset.$$

Ritorneremo su questi concetti durante il corso.

2.1. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.9 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme
$$A = \big\{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$
è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:
$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$
che è una contraddizione. $\square$

Definizione 2.10 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme
$$A_x = \big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\}.$$
Per la proprietà di Archimede, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque massimo. Definiamo la *parte intera di x*
$$[x] = \max\big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\} \in \mathbb{Z}.$$
Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di x* è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:
$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.11 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

Dim. Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$, ovvero $nx < ny - 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{[ny]}{n} \leq y.$$

Cerchiamo ora $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$x < \frac{[ny]}{n} - \frac{1}{m} < y.$$

La disuguaglianza a sinistra è equivalente a

$$m\Big(\frac{[ny]}{n} - x\Big) > 1,$$

ed un tale $m \in \mathbb{N}$ esiste per la proprietà di Archimede. □

3. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$

La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) L'unicità di un campo ordinato completo.

È possibile dimostrare (ma noi non lo faremo) che due campi ordinati completi sono fra loro *isomorfi*. In questo senso esiste un unico campo ordinato completo, i numeri reali $\mathbb{R}$.

Illustriamo brevemente, senza dimostrazioni, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Sottolineamo che l'Assioma di Completezza è ora un Teorema.

Definizione 3.1. Un insieme $A \subset \mathbb{Q}$ è una sezione (di Dedekind) se:

(i) $A, A' \neq \emptyset$, dove A' è il complementare di A in $\mathbb{Q}$;
(ii) se $a \in A$ allora $b \in A$ per ogni numero razionale $b \leq a$;
(iii) se $a \in A$ esiste $b \in A$ con $a < b$.

Osservazione 3.2. La proprietà (iii) precisa che vogliamo considerare solo sezioni aperte di $\mathbb{Q}$. In questo modo, ad ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ corrisponde l'unica sezione

$$A_q = \big\{a \in \mathbb{Q} : a < q\big\}.$$

Esistono sezioni che non corrispondono a numeri razionali. Ad esempio, questo è il caso della sezione

$$A = \big\{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0 \text{ oppure } a^2 < 2\big\}.$$

Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$ la sezione nulla e con $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$ la sezione unitaria.

1. Relazione d'ordine. Se A e B sono sezioni, diciamo che $A \leq B$ se $A \subset B$. L'insieme $\mathcal{A}$ è totalmente ordinato dalla relazione $\leq$.

2. Somma. Se A e B sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B\}.$$

La sezione opposta è per definizione $-A = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } a > b \text{ tale che } -a \in A'\}$. Scriviamo $A - B = A + (-B)$.

3. Prodotto. La sezione prodotto si definisce per casi. Se $A, B \geq 0$ definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B, \text{ tali che } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

Se $A, B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$, se $A \geq 0$ e $B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$, e se $A \leq 0$ e $B \geq 0$ si definisce $A \cdot B = -(-A) \cdot B$. Infine, per ogni sezione $A > 0$ si definisce la sezione reciproca $A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } a > b \text{ tale che } a^{-1} \in A'\}$. Se invece $A < 0$ si definisce $A^{-1} = -(-A)^{-1}$.

Con pazienti verifiche si controlla che $\mathcal{A}$ è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

4. Assioma di completezza. Proviamo la proprietà di completezza.

TEOREMA 3.3. L'insieme $\mathcal{A}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ e con la relazione d'ordine $\leq$ è un campo ordinato *completo*.

DIM. Ci interessa verificare la completezza. Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ un insieme superioremente limitato e non vuoto. Questo significa che esiste una sezione $A \in \mathcal{A}$ tale che $B \subset A$ per ogni sezione $B \in \mathcal{B}$. Vogliamo provare che $\mathcal{B}$ ha estremo superiore. Definiamo l'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{Q}.$$

Controlliamo che C è una sezione di $\mathbb{Q}$:

i) $C \neq \emptyset$ in quanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Inoltre, $C \subset A$ implica $A' \subset C'$ e poichè per ipotesi $A' \neq \emptyset$, segue che $C' \neq \emptyset$.
ii) Siano $x, y \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in C$ e $y \leq x$. Allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$, e siccome B è una sezione segue che $y \in B$. Dunque si ha anche $y \in C$.
iii) Se $x \in C$ allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$. Siccome B è una sezione, esiste $y \in B$ tale che $x < y$. Ma allora sia ha anche $y \in C$.

Verifichiamo infine che $C = \sup \mathcal{B}$.

i) Sicuramente $B \subset C$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, ovvero C è un maggiorante di $\mathcal{B}$.
ii) Proviamo che C è il minimo dei maggioranti. Sia $D \in \mathcal{A}$ un maggiorante di $\mathcal{B}$. Dalle inclusioni $B \subset D$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, segue che

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset D.$$

$\square$

È possibile una costruzione puramente metrica di $\mathbb{R}$, che prescinde dalla relazione d'ordine. Precisamente, $\mathbb{R}$ può essere costruito come il completamento metrico di $\mathbb{Q}$.

4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, ed inoltre:

i) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $|x| = |-x|$;
iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ che riordinata fornisce $|x| - |y| \leq |x - y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ è allora uno *spazio metrico*. La funzione $d(x, y) = |x - y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

Possiamo anticipare la definizione generale di spazio metrico.

Definizione 4.1 (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Dato uno spazio metrico (X, d), fissato un punto $x_0 \in X$ ed un raggio $r > 0$, l'insieme

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = B_X(x_0, r) = \big\{x \in X : d(x, x_0) < r\big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x_0 e raggio r. Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Nello spazio metrico $\mathbb{R}$ con la distanza standard, le palle sono intervalli aperti che si indicano anche con la seguente notazione:

$$I_r(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\big\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

4.1. Intervalli. Gli intevalli di $\mathbb{R}$ possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Ecco l'elenco. Siano $-\infty < a < b < \infty$. Si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{intervallo aperto,} \\ [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} && \text{intervallo aperto a destra,} \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\} && \text{intervallo aperto a sinistra,} \\ [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\} && \text{intervallo chiuso.} \end{aligned}$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$\begin{aligned} (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} && \text{intervallo aperto,} \\ (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \le b\} && \text{intervallo chiuso,} \\ (a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} && \text{intervallo aperto,} \\ [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\} && \text{intervallo chiuso,} \end{aligned}$$

cui si aggiunge l'intervallo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

La famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi convessi di $\mathbb{R}$. Inoltre, la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi connessi di $\mathbb{R}$.

5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio Euclideo n-dimensionale, $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge 1$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ ha n coordinate reali $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di somma vettoriale

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Questa operazione è associativa e commutativa. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di *prodotto per uno scalare*. Dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

In questo modo $\mathbb{R}^n$ ha una struttura di *spazio vettoriale*, come si vedrà nel corso di geometria.

Definizione 5.1 (Prodotto scalare). Definiamo l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3) $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) oppure con il simbolo $x \cdot y$.

Definizione 5.2 (Norma Euclidea). La norma Euclidea su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ così definita

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2 \Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente, $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma. Precisamente, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si verifica:

1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (omogeneità);
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Proposizione 5.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue estraendo le radici. $\square$

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su $\mathbb{R}^n$ la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \big\{ y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r \big\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r > 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

6. Esercizi

6.1. Numeri reali e razionali. Parte intera e frazionaria.

Esercizio 6.1. Usando gli Assiomi (S1)-(O2) per un campo ordinato provare che per ogni x, y, z vale l'implicazione: $x \le y$ e $z \le 0 \Rightarrow yz \le xz$.
Indicare in ciascun passaggio la proprietà che si utilizza.

Esercizio 6.2. i) Verificare che $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. ii) Verificare che $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 6.3. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, si ha:

$$[x] + [x + 1/n] + \ldots + [x + (n-1)/n] = [nx],$$

dove $[x]$ è la parte intera di x.

6.2. Estremo superiore ed inferiore. Massimo e minimo.

Esercizio 6.4. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \Big\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1 \Big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 6.5. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \big\{ n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ n \ge 1 \big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 6.6. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ n \ge 1 \Big\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

Esercizio 6.7. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri naturali positivi. Provare che è sempre vera una delle due disuguaglianze

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n} \quad \text{oppure} \quad \frac{m+2n}{m+n} < \sqrt{2} < \frac{m}{n}.$$

Calcolare il minimo

$$\min \Big\{ \Big| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \Big|, \Big| \frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2} \Big| \Big\}.$$

Esercizio 6.8. Siano dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{1+2n^2}{1+n^2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \right\},$$

$$C = \big\{ x^2 - 2x \sin x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, x \ge 0 \big\}, \quad D = \left\{ \frac{n^2 \cos(1/n)}{1-n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ n \ge 2 \right\}.$$

1) Determinare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.

2) Determinare $\inf B$ e verificare che $\sup B = 1/2$. Dire se esistono $\min B$ e $\max B$.
3) Verificare che $\sup C = \infty$.
4) Verificare che $\inf D = -\infty$.

Esercizio 6.9. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme:

$$A = \Big\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \frac{n+1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \Big\},$$

dove $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Calcolare $\sup A$, $\inf A$ e dire se esistono $\max A$ e $\min A$.

6.3. Spazi metrici.

Esercizio 6.10. Sia (X, d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X \times X \to [0, \infty)$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Verificare che (X, δ) è uno spazio metrico.

Esercizio 6.11. Sia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}^2$ e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

Esercizio 6.12. Sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $n \geq 1$, la funzione definita in ciascuno dei seguenti tre casi per $x, y \in \mathbb{R}^n$: A) $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$; B) $d(x, y) = |x - y|^2$; C) $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$. Dire in ciascuno dei tre casi se d è una distanza su $\mathbb{R}^n$ oppure no. Provare ogni affermazione.

Esercizio 6.13. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico. Ad esempio per $\alpha = 1/2$.

6.4. Disuguaglianze.

Esercizio 6.14. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ con $t > 0$. Provare la disuguaglianza:

$$xy \leq \frac{1}{2}\Big(tx^2 + \frac{1}{t}y^2\Big).$$

Esercizio 6.15. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ punti tali che $\langle x, y \rangle = |x||y| \neq 0$. Provare che esiste un numero reale $\lambda > 0$ tale che $x = \lambda y$.

Esercizio 6.16. Siano $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ numeri reali e sia $x = x_1 + \ldots + x_n$ la loro somma. Provare che

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq \frac{x^2}{4}.$$

Esercizio 6.17. Siano $x_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, \dots, n$, numeri reali. Provare che

$$\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i}{\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\Big)^n} \le \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^n (1 - x_i)}{\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^n (1 - x_i)\Big)^n}.$$

CHAPTER 3

Successioni reali e complesse

1. Successioni numeriche

Una *successione reale (risp. complessa)* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (risp. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). Indicheremo con $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ (risp. $a_n \in \mathbb{C}$) l'*elemento n-esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La successione si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots .$$

Definizione 1.1 (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L.$$

Il numero L si dice *limite della successione.*

Esempio 1.2. Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

Proposizione 1.3 (Unicità del limite). Se una successione reale risp. complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) allora questo limite è unico.

Dim. Siano L ed M entrambi limiti della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|a_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che $|L - M| = 0$ e quindi $L = M$. □

Osservazione 1.4. Una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può scomporre nella sua parte reale e immaginaria:

$$a_n = \operatorname{Re} a_n + i\operatorname{Im} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se convergono le successioni reali $(\operatorname{Re} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\operatorname{Im} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre, in questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Queste affermazioni seguono dalle disuguaglianze

$$\max\{|\operatorname{Re}(a_n - L)|, |\operatorname{Im}(a_n - L)|\} \le |a_n - L| \le |\operatorname{Re}(a_n - L)| + |\operatorname{Im}(a_n - L)|.$$

Definizione 1.5. Diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ ("più infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \ge M \quad \text{per ogni } n \ge \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Analogamente, diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ ("meno infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \le -M \quad \text{per ogni } n \ge \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Esercizio 1.1. Verificare usando la definizione che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} = \infty.$$

Fissato $M > 0$ arbitrariamente grande, dobbiamo trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} \ge M \quad \text{per ogni } n \ge \bar{n}. \tag{1.5}$$

Usiamo il *metodo delle maggiorazioni* e riduciamo la disuguaglianza data ad una disuguaglianza elementare. Come primo passo stimiamo il logaritmo con la disuguaglianza fondamentale

$$\log(1+x) \le x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } x > -1.$$

In effetti, ci basta la disuguaglianza $\log(1+n) \le n$ per $n \in \mathbb{N}$, che può essere verificata per induzione. Usando questa informazione, si ottiene

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} \ge \frac{n^2(n-1)}{n^2+1} \ge \frac{n-1}{2},$$

per $n \ge 1$. Dunque ci siamo ridotti alla disuguaglianza elementare

$$\frac{n-1}{2} \ge M \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 2M+1.$$

Con una scelta di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \ge 2M+1$, la (1.5) è verificata.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 1.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 1.5 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè $\pm\infty$.

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata* se l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$). Equivalentemente, la successione è limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIZIONE 1.6. Se una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

DIM. Sia $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora $|a_n| \leq C$ per ogni $n = 1, \dots, \bar{n}$, elementarmente. Inoltre, per $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

□

TEOREMA 1.7 (Operazioni coi limiti). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$) convergenti. Allora:

1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3) Se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e il limite di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è 0, allora la successione quoziente $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

DIM. Indichiamo con $L, M \in \mathbb{R}$ (risp. $L, M \in \mathbb{C}$) i limiti delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

1) Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

2) Per la Proposizione 1.6, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ e $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_nb_n - LM| = |a_nb_n - Lb_n + Lb_n - LM| \leq |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M| \leq C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon.$$

3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $M \neq 0$ per ipotesi, esiste $\widehat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \widehat{n}$ si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per $n \geq \max\{\bar{n}, \widehat{n}\}$ si ha

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\Big| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

Teorema 1.8 (Teorema del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti $L, M \in \mathbb{R}$ delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rispettivamente. Se $L = M$, allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|c_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha anche

$$\begin{aligned} b_n - L &\leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon, \\ L - b_n &\leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

e quindi $|b_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$. □

Definizione 1.9. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$ diremo che l'affermazione $A(n)$ è vera *definitivamente*.

Il Teorema sulle operazioni coi limiti e il Teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

Proposizione 1.10. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima (ovvero $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora la successione prodotto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

Dim. Sia $C > 0$ una costante tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

Esercizio 1.2. Provare le seguenti affermazioni.

1) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$
2) Siano $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$
3) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata. Provare che la successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

4) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale, positiva, staccata da 0 ovvero: esiste $\delta > 0$ tale che $b_n \geq \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

2. Esempi di successioni elementari

Esempio 2.1 (Quoziente di polinomi). Siano P e Q polinomi a coefficienti reali (o complessi) nella variabile $x \in \mathbb{R}$ di grado p e q, rispettivamente, con $p, q \in \mathbb{N}$. Precisamente, supponiamo di avere

$$\begin{aligned} P(x) &= a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R} \\ Q(x) &= b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Avremo $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$ e senza perdere di generalità supponiamo che $a_p > 0$ e $b_q > 0$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q, \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } q > p. \end{cases}$$

La verifica è elementare e utilizza il teorema sulle operazioni con i limiti partendo dalla seguente identità:

$$\frac{a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_1 n + b_0} = n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} \ldots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \ldots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}.$$

Esempio 2.2 (Successione geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Studiamo la convergenza delle successione geometrica $a_n = q^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Verificheremo le seguenti affermazioni:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

L'ultima affermazione significa che il limite non esiste nè in $\mathbb{R}$ nè $\pm\infty$.

Esaminiamo il caso $-1 < q < 1$. È sufficiente considerare il caso $0 < q < 1$. Allora $q = 1 - x$ con $x \in (0, 1)$. Per tali x valgono le disuguaglianze

$$0 \leq (1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Questa disuguaglianza può essere verificata per induzione (esercizio).Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + nx} = 0,$$

dal Teorema del confronto segue che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1 - x)^n = 0.$$

Nel caso $q > 1$ si può scrivere $q = 1 + x$ con $x > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli si ottiene

$$q^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

e per confronto si trova $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Sia ora $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Dall'identità $|z^n| = |z|^n$ si deduce che per $|z| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

Se invece $|z| \geq 1$ e $z \neq 1$ il limite non esiste.

Esempio 2.3 (Radice n-esima). Per ogni numero reale $p > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

È sufficiente considerare il caso $p > 1$. Il caso $0 < p < 1$ si riduce a questo passando ai reciproci. Se $p > 1$ si ha $\sqrt[n]{p} = 1 + a_n$ con $a_n > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

si ottiene

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n},$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esempio 2.4 (Radice n-esima di una potenza di n). Per ogni numero reale $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Proviamo l'effermazione nel caso $\beta = 1$. Si ha certamente $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Usando nuovamente la disuguaglianza di Bernoulli si trova

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

e quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}.$$

Dal Teorema del confronto segue che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. In conclusione, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^2 = 1.$$

Esempio 2.5 (Confronto fra potenze ed esponenziali). Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a > 1$ e $\beta > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\beta a^n}{a^{n+1} n^\beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\beta = \frac{1}{a} < 1,$$

fissato $\frac{1}{a} < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Iterando tale disuguaglianza si ottiene

$$0 \leq b_n \leq qb_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n-\bar{n}} b_{\bar{n}} = q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}}.$$

Per confronto con la successione geometrica si deduce che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Esempio 2.6 (Confronto fra esponenziale e fattoriale). Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $a > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

fissato $0 < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Come sopra, si conclude che $b_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio 2.7 (Confronto fra potenze e logaritmi). Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0.$$

Con la sostituzione $x_n = \log n$, ovvero $n = \mathrm{e}^{x_n}$, si ottiene per $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{\mathrm{e}^{x_n \alpha}} \leq \frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}}.$$

Siccome $\mathrm{e} > 1$ e $\alpha > 0$, la base dell'esponenziale verifica $\mathrm{e}^\alpha > 1$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}} < \varepsilon$$

non appena $[x_n] > M$. Ma siccome

$$\lim_{n\to\infty} [x_n] = \lim_{n\to\infty} [\log n] = \infty,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $[x_n] > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

3. Successioni monotone

Definizione 3.1 (Successioni monotone). Una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice:

i) *crescente* se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) *strettamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) *decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iv) *strettamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione crescente o decrescente si dice *monotona*.

Proposizione 3.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente e (superiormente) limitata. Allora la successione è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Dim. L'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato e quindi esiste finito

$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Siccome L è un maggiorante di A si ha $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome L è il minimo dei maggioranti di A, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$. Dal fatto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, si deduce che per $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$a_n \geq a_{\bar{n}} > L - \varepsilon.$$

Abbiamo dunque provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Questa è la tesi della proposizione. □

Se una successione crescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è superiormente limitata, allora un argomento analogo al precedente prova che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Per le successioni decrescenti valgono affermazioni analoghe. Ad esempio, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e inferiormente limitata, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 3.2 abbiamo usato l'Assioma di completezza dei numeri reali per assicurarci dell'esistenza del numero $L \in \mathbb{R}$. La Proposizione 3.2 implica a sua volta l'Assioma di completezza. La dimostrazione di questo fatto è lasciata come esercizio.

Esercizio 3.1 (Successioni ricorsive). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la seguente successione definita in modo ricorsivo:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 0.$$

Provare che la successione converge a calcolarne il limite.

Mostriamo che la successione è crescente e superiormente limitata. Sia $f(x) = \sqrt{2+x}$ la funzione, definita per $x \geq -2$, che interviene nella definizione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$. Studiamo la disuguaglianza

$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2.$$

Dunque, fintantochè $0 \leq a_n < 2$ risulta $a_{n+1} > a_n$. Proviamo per induzione che $0 \leq a_n < 2$. Per $n = 0$ questo è chiaro. Inoltre, si ha

$$a_{n+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 2.$$

Questo prova che la successione è crescente (strettamente) e superiormente limitata. Dunque esiste finito

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Passando al limite nella relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ ed usando la continuità di f si trova

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L).$$

Le soluzioni dell'equazione $L = f(L)$ sono $L = -1$ che è da scartare ed $L = 2$. Dunque, il limite è $L = 2$.

4. Limiti inferiore e superiore

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definiscano:

$$b_n = \inf\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \inf_{m\geq n} a_m,$$
$$c_n = \sup\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \sup_{m\geq n} a_m.$$

Può essere $b_n = -\infty$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. In tal caso si ha $b_n = -\infty$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Può essere $c_n = \infty$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. In tal caso si ha $c_n = \infty$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

La successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente:

$$b_{n+1} = \inf_{m\geq n+1} a_m \geq \inf_{m\geq n} a_m = b_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Infatti, al crescere di n l'insieme di cui si calcola l'estremo inferiore si restringe. Analogamente, la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente:

$$c_{n+1} = \sup_{m\geq n+1} a_m \leq \sup_{m\geq n} a_m = c_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dunque, le successioni $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno limite (finito o infinito).

Definizione 4.1 (Limiti inferiore e superiore). Si definiscono i limiti inferiore e superiore di una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rispettivamente come:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

La comodità dei limiti inferiore e superiore è che sono sempre definiti.

Esempio 4.2. Ad esempio si ha:

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1} = -1, \qquad \limsup_{n\to\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1} = 1.$$

Proposizione 4.3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $L \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A) $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n > L - \varepsilon$;

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n < L + \varepsilon$.

Dim. Sia $L = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m$, ovvero L è il massimo dei minoranti dell'insieme $A = \{c_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, con $c_n = \sup_{m\geq n} a_m$.

Affermiamo che L è un minorante di A se e solo se vale i). Infatti, L è un minorante di A se e solo se:

$$\forall \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ si ha } \sup_{m\geq \bar{n}} a_m \geq L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \forall \bar{n} \in \mathbb{N}\, \exists n \geq \bar{n} \text{ tale che } a_n > L - \varepsilon.$$

Affermiamo che L è il massimo dei minoranti di A se e solo se vale l'affermazione ii). Infatti, L è il massimo dei minoranti di A se e solo se $L+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ non è un minorante di A, ovvero se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \sup_{m \geq \bar{n}} a_m < L+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\, \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } a_n < L+\varepsilon.$$

□

Per il limite inferiore si ha un'analoga caratterizzazione che riportiamo senza prova.

PROPOSIZIONE 4.4. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $L \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A) $L = \liminf_{n\to\infty} a_n$;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n < L + \varepsilon$;

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n > L - \varepsilon$.

La prova è omessa.

Chiaramente, vale la disuguaglianza

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Se si ha un'uguaglianza allora esiste il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

COROLLARIO 4.5. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Allora il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

esiste (finito o infinito) se e solo se

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L.$$

DIM. Quando L è finito, la dimostrazione segue dall'affermazione ii) della Proposizione 4.3 insieme all'affermazione ii) della Proposizione 4.4. Quando $L = \infty$ oppure $L = -\infty$ la dimostrazione è lasciata al lettore.

□

PROPOSIZIONE 4.6. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali. Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Le disuguaglianze possono essere strette.

DIM. La prova segue passando al limite per $n \to \infty$ nelle disuguaglianze

$$\inf_{m\geq n}(a_m + b_m) \geq \inf_{m\geq n} a_m + \inf_{m\geq n} b_m,$$
$$\sup_{m\geq n}(a_m + b_m) \leq \sup_{m\geq n} a_m + \sup_{m\geq n} b_m.$$

□

Esempio 4.7. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita
$$a_n = \frac{n^2\cos(n\pi)}{n^2+1}.$$
Proviamo che
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$
Partiamo dal limite superiore. Chiaramente, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$a_n \le 1 < 1+\varepsilon.$$
D'altra parte, per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ è possibile trovare $n \ge \bar{n}$ tale che $a_n > 1-\varepsilon$, in quanto
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{4n^2+1} = 1.$$
Per il limite inferiore si argomenta in modo analogo. Da un lato si ha $a_n \ge -1 > -1-\varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \ge \bar{n}$ tale che $a_n < -1+\varepsilon$ in quanto
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(2n+1)^2}{(2n+1)^2+1} = -1.$$

5. Esercizi

5.1. Limiti di successione.

Esercizio 5.1. 1) Usando la definizione di limite, verificare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-4}{3n^2+2\cos n} = \frac{2}{3}.$$
2) Usando il teorema sulle operazioni elementari coi limiti, calcolare il valore $L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ del seguente limite:
$$L = \lim_{n\to\infty}\Big(n - \sqrt{n^2-n}\Big).$$
Verificare la correttezza del risultato utilizzando la definizione.

Esercizio 5.2. Usando la definizione, verificare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{e^{n/2}+e^{-n/2}}}{e^{n/4}} = 1.$$

Esercizio 5.3. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}.$$

Esercizio 5.4. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big).$$

Esercizio 5.5. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 3^n + n^2\sin(n)+1}{n^3 2^n + n^2 + (-1)^n}$; 2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n}$; 3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log^4(n) + n\arctan(n)}{n^2+\log n}$;

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n+1]{n+1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{2n}$; 5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\log n + 1/n}$; 6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Esercizio 5.6. Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso e si consideri la successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$a_n = \Big(z^n + \frac{i}{2}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Provare che per $|z| < 1$ la successione converge e che per $|z| > 1$ la successione non converge.

Esercizio 5.7. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ studiare la convergenza della successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n = \Big(3z^n + \frac{2ni}{3ni+1}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

e, quando esiste, calcolarne il limite.

Esercizio 5.8. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ studiare la convergenza della successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$a_n = \frac{1+iz^n}{i+|z|^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 5.9. Al variare dei numeri reali $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza della successione reale

$$a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 5.10. Al variare di $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$, studiare la convergenza della successione numerica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$a_n = \frac{1}{b^n}\binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 5.11. Sia $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$. Calcolare tutti i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ in funzione di m tali che il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} n^\beta \left(\sqrt[m]{n+1} - \sqrt[m]{n}\right)$$

esista finito e risulti $L \neq 0$.

Esercizio 5.12. Determinare tutte le coppie di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ tali che risulti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{2n} + y^{4n}} = x^2.$$

Risposta: $x \geq y^2$ oppure $x \leq -y^2$.

Esercizio 5.13. Studiare la convergenza della successione $a_n = \sqrt{2\sqrt{3\ldots\sqrt{n}}}$, $n \geq 2$, e della successione $a_n = \sqrt{1!\sqrt{2!\ldots\sqrt{n!}}}$, $n \geq 1$.

Esercizio 5.14 (Fattoriale ed n^n). Verificare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Esercizio 5.15. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista finito
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
Provare allora che anche $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Esercizio 5.16. Al variare del parametro reale $\alpha > 0$ calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{n^\alpha}.$$

Esercizio 5.17. Provare il seguente teorema. Data una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

(A) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ad un limite finito);
(B) Esiste un numero $L \in \mathbb{R}$ con questa proprietà: ogni sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una ulteriore sottosuccessione che converge ad L.

L'implicazione interessante è (B)$\Rightarrow$(A).

Esercizio 5.18. Risolvendo le forme indeterminate, calcolare i seguenti limiti:
$$1)\ \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n^2-1}{n^2+1}\Big)^{\frac{n^3}{2n+1}}; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{1}{n^n}\Big)^{n!}; \quad 3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^n + n!\log(n+1)}{2^n + (n+1)^n}.$$

5.2. Successioni ricorsive.

Esercizio 5.19. Sia $a_0 \in \mathbb{C}$ un numero complesso fissato e definiamo ricorsivamente la successione
$$a_{n+1} = \frac{1}{8}\big(3a_n - i\big), \quad n \geq 0.$$
Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $\mathbb{C}$ e calcolarne il limite.

Esercizio 5.20. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(x) = x - x^3$. Assegnato $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo ricorsivo tramite la relazione
$$a_{n+1} = \varphi(a_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$
1) Provare che se $a_0 \in [-1, 1]$ la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.
2) Provare che la successione converge se e solo se $|a_0| < \sqrt{2}$.

Esercizio 5.21. Siano $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$. Definiamo in modo ricorsivo la successione
$$a_{n+1} = \frac{\beta a_n^2}{1 + a_n^2}, \quad n \geq 0.$$
Discutere al variare di $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$ la convergenza della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, se esiste, calcolarne il limite. Studiare prima il caso $0 < \beta < 2$, poi il caso $\beta = 2$ e infine $\beta > 2$.

Esercizio 5.22. Siano $a_0, a_1 > 0$ e per $n \geq 1$ si definisca in modo ricorsivo $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$.

i) Supponendo che $a_{n+1} \geq 2$ provare che

$$\left|\sqrt{a_{n+1}} - 2\right| \leq \frac{|\sqrt{a_n} - 2| + |\sqrt{a_{n-1}} - 2|}{2 + \sqrt{2}}.$$

ii) Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Esercizio 5.23. Sia $0 < x_0 < \pi$ e per $n \geq 1$ sia $x_n = \sin x_{n-1}$. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n.$$

Risposta: 1.

Esercizio 5.24. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente nel seguente modo: $a_0 \in (0, 1)$ è un numero fissato e $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ per $n \geq 0$.

1) Provare che il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste e calcolarlo.
2) Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} na_n$.

Esercizio 5.25. 1) Sia a_n, $n \geq 2$, la successione definita in modo ricorsivo da

$$a_2 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{2^n}} a_n, \quad n \geq 2.$$

Stabilire se la successione $(a_n)_{n\geq 2}$ converge.

2) Studiare la convergenza della successione $a_n = \sqrt{1!\sqrt{2!\ldots\sqrt{n!}}}$, $n \geq 1$.

Esercizio 5.26. 1) Siano $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$. Provare l'identità

$$\varepsilon_0\sqrt{2 + \varepsilon_1\sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\Big(\frac{\pi}{4}\sum_{i=0}^{n} \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}{2^i}\Big).$$

2) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita in modo ricorsivo da $a_0 = 0$ e $a_{n+1} = (a_n + 2)^{1/2}$. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} 2^n(2 - a_n)^{1/2}.$$

Esercizio 5.27. Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ricorsivamente da

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = 2^{a_n/2}, \quad n \geq 1,$$

è convergente e calcolarne il limite.

5.3. Limiti superiore e inferiore.

Esercizio 5.28. Verificare che

$$\liminf_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} = 0, \quad \limsup_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} = 1,$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Esercizio 5.29. Dimostrare che la successione numerica

$$a_n = \frac{n^2\cos(n\pi)}{n+1}\log\Big(\frac{n}{n+1}\Big), \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \to \infty$.

Esercizio 5.30. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Provare che

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Esercizio 5.31. Sia $x \in \mathbb{Q}$ un numero razionale non negativo, $x \geq 0$. Calcolare il limite superiore:

$$L^+ = \limsup_{n\to\infty}\Big(\sin\Big(\Big(\frac{1}{2}+nx\Big)\pi\Big) - \frac{1}{n}\Big).$$

Casa si riesce a dire del limite inferiore?

$$L^- = \liminf_{n\to\infty}\Big(\sin\Big(\Big(\frac{1}{2}+nx\Big)\pi\Big) - \frac{1}{n}\Big)$$

Esercizio 5.32. Sia $x \in \mathbb{Q}$ un numero tale che $x = p/q$ con p intero dispari e $q \geq 2$ intero pari. Calcolare i seguenti

$$\liminf_{n\to\infty}\big|\mathrm{e}^{2\pi nxi}+1\big|^2 \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty}\big|\mathrm{e}^{2\pi nxi}+1\big|^2.$$

Esercizio 5.33. Si consideri la successione numerica

$$a_n = n! + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}.$$

Al variare del numero razionale $x \in \mathbb{Q}$ calcolare i seguenti

$$L^+ = \limsup_{n\to\infty} n\sin\big(xa_n\pi\big) \quad \text{e} \quad L^- = \liminf_{n\to\infty} n\sin\big(xa_n\pi\big).$$

Esercizio 5.34. Dimostrare che la successione numerica

$$a_n = \frac{n^2\cos(n\pi)}{n+1}\log\Big(\frac{n}{n+1}\Big), \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \to \infty$.

ESERCIZIO 5.35. Siano $z, w \in \mathbb{C}$ due numeri complessi. Calcolare il limite superiore
$$\limsup_{n\to\infty} |z^n - w^n|^{1/n}.$$
Cosa si riesce a dire sull'esistenza del limite?

ESERCIZIO 5.36. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali e sia $L^+ \in \mathbb{R}$. Provare che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) $L^+ = \limsup_{n\to\infty} a_n$;

B) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente ad L^+ e per ogni ogni altra sottosuccesione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad un limite L si verifica $L \le L^+$.

5.4. Altri esercizi.

ESERCIZIO 5.37. Sia $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ una successione limitata che non è convergente. Provare che possiede due sottosuccessioni che convergono a limiti distinti.

ESERCIZIO 5.38. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k>1, j+k=n} \frac{1}{jk}.$$

ESERCIZIO 5.39. Sia $k > 0$. Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} \big(2k^{1/n} - 1\big)^n$.

ESERCIZIO 5.40. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che verifica $a_1 > 1$ e $a_1 + \ldots + a_{n-1} < a_n$ per ogni $n \ge 2$. Provare che esiste un numero reale $q > 1$ tale che $a_n > q^n$ per ogni $n \ge 1$.

ESERCIZIO 5.41. Usando il limite
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$
e le proprietà elementari dei limiti, verificare che
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

ESERCIZIO 5.42. Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + k^2}$. Risp.: $\frac{\pi}{2}$.

ESERCIZIO 5.43. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale tale che $\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1$. Provare che $\lim_{n\to\infty} (3a_n)^{\frac{1}{3}} a_n = 1$.

Esercizio 5.44. Provare che $\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!\mathrm{e}) = 2\pi$.

Esercizio 5.45. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione positiva, $a_n > 0$, convergente ad $L \in \mathbb{R}$. Provare che

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} = L.$$

Esercizio 5.46. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\big(2\sqrt[n]{n} - 1\big)^n.$$

Esercizio 5.47. Siano $a_n, b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $a_n \to a > 0$ e $b_n \to b > 0$. Siano $p, q > 0$ tali che $p + q = 1$. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} (pa_n + qb_n)^n.$$

Esercizio 5.48. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\int_0^1 (1 - x^2)^n dx.$$

Esercizio 5.49. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n \in \mathbb{R}$ l'unica radice positiva del polinomio $p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$ nella variabile $x \in \mathbb{R}$. Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.

Esercizio 5.50. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} (n + 1)^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}} \sin^n(x)\cos(x).$$

Esercizio 5.51. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k - 1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k - 1}}.$$

Esercizio 5.52. Sia $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni reali limitate:

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione in } \mathbb{R} \text{ limitata}\big\}.$$

Nel seguito indichiamo con $\mathrm{x} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un generico elemento di $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

1) Verificare che $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione scalare per le successioni.
2) Verificare che la funzione $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ così definita
$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \sup\big\{|a_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$
definisce una norma.
3) Verificare che la funzione $d_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \times \ell^\infty(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ così definita
$$d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_\infty$$
è una distanza su $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

CHAPTER 4

Serie reali e complesse

1. Serie numeriche. Definizioni

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succesione reale ocomplessa. Vogliamo definire, quando possibile, la somma di tutti gli a_n al variare di $n \in \mathbb{N}$. Tale somma di infiniti termini si indica con il seguente simbolo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{1.6}$$

Con tale notazione si vuole indicare un numero reale o complesso. Chiameremo un'espressione come in (1.6) una serie reale (risp. complessa).

Formiamo la *successione delle somme parziali*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può convergere in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, oppure può non convergere. Nel caso reale la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può divergere a ∞ o $-\infty$.

Definizione 1.1. i) Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $s \in \mathbb{R}$ oppure $s \in \mathbb{C}$, poniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

e diremo che la serie *converge* ed ha come *somma* s.

ii) Nel caso reale, se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ o $-\infty$, diremo che la serie *diverge* a ∞ o $-\infty$ e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

iii) Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e nel caso reale non diverge nè a ∞ nè a $-\infty$, diremo che la serie *non è definita*.

iv) Il generico addendo a_n, $n \in \mathbb{N}$, che appare nella serie (1.6) si dice *termine generale* della serie, ed $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione dei termini generali.

Teorema 1.2 (Condizione necessaria di convergenza). Se una serie reale o complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge allora la successione dei termini generali è infinitesima, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dim. Per ipotesi esiste $s \in \mathbb{R}$ oppure $s \in \mathbb{C}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Dunque, si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

2. Serie geometrica. Serie telescopiche

2.1. Serie geometrica. Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso tale che $z \neq 1$. Ricordiamo la formula per le somme geometriche parziali

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $|z| < 1$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$. Se invece $|z| \geq 1$ il limite non esiste (o non esiste finito). Dunque, si ottiene la formula per la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1.$$

Ad esempio, con $z = 1/2$ si trova la somma della serie geometrica reale di ragione $1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$

2.2. Serie telescopiche. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa e formiamo la successione delle differenze $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} - a_0.$$

Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un limite L, allora la serie con termine generale b_n converge e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = L - a_0.$$

Ad esempio, si trova

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.
\end{aligned}$$

2.3. Somma di tutti gli $1/n^2$. Vogliamo provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

converge. È noto che la sua somma è $\pi^2/6$, ma non lo proveremo. Dalle disuguaglianze

$$n^2 \geq n(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

si ottiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$$

e per confronto la serie in esame converge.

2.4. Somma di tutti gli $1/n$. Vogliamo provare che la seguente serie (detta armonica) diverge a ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

In effetti, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty,\end{aligned}$$

e dunque la serie diverge a ∞. Trasformeremo questa idea di dimostrazione in un criterio generale (Criterio di condensazione di Cauchy).

3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione reale non negativa, allora la successione delle somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è monotona crescente e quindi il limite di $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esiste sempre, finito oppure ∞.

Teorema 3.1 (Criterio del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente (ovvero per ogni $n \geq \bar{n}$ per qualche $\bar{n} \in \mathbb{N}$). Allora:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty;$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$

Dim. Senza perdere di generalità supponiamo che $0 \le a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Le somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$
$$\sigma_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$$

verificano $s_n \le \sigma_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed inoltre convergono perchè sono monotone crescenti. Dunque si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} \sigma_n,$$

da cui si ottengono le conclusioni i) e ii).

$\square$

Teorema 3.2 (Criterio della radice). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale non negativa, $a_n \ge 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale non è infinitesimo.

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

Dim. i) Sia $\varepsilon > 0$ tale che $q = L + \varepsilon < 1$. Per la caratterizzazione del limite superiore, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \le q$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Dunque $a_n \le q^n$ per ogni $n \ge \bar{n}$, e quindi

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \le \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Per confronto, questo prova la convergenza della serie data.

ii) Sia $\varepsilon > 0$ tale che $q = L - \varepsilon > 1$. Per la caratterizzazione del limite superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un indice $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $k_n \ge n$ e $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} > q$. Inoltre, è possibile scegliere la successione $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo tale che $k_n < k_{n+1}$. La (sotto)successione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty.$$

Quindi la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima, e per la condizione necessaria di convergenza la serie non converge, e dunque diverge (essendo a termini non negativi).

$\square$

Teorema 3.3 (Criterio del rapporto). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale verifica
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$
Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

Dim. i) Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $q = L + \varepsilon < 1$. Dalla definizione di limite segue che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n/a_{n-1} \le q$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Dunque si ha
$$a_n \le q a_{n-1} \le \ldots \le q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$
per ogni $n \ge \bar{n}$, e pertanto
$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \le a_{\bar{n}} q^{-\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$
Per confronto, questo prova la convergenza della serie.

ii) Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $q = L - \varepsilon > 1$, ed esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \ge \bar{n}$ si abbia
$$a_n \ge q a_{n-1} \ge \ldots \ge q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}.$$
Questo prova che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ e dunque non è verificata la condizione necessaria di convergenza e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

4. Criterio di condesazione di Cauchy per serie reali

Teorema 4.1 (Criterio di Cauchy). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione non negativa, monotona decrescente. Allora si ha:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Dim. Per $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, sia $i \in \mathbb{N}$ un indice tale che $2^{n-1} \le i \le 2^n - 1$. Siccome la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente, per tali i si ha $a_i \le a_{2^{n-1}}$, e sommando si ottiene
$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \le a_{2^{n-1}}(2^n - 2^{n-1}) = 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$
Sommando ora su n si trova
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$
Se converge la serie a destra, allora per confronto converge anche la serie a sinistra.

Proviamo l'implicazione opposta. Se l'indice $i \in \mathbb{N}$ verifica $2^{n-1} + 1 \le i \le 2^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora $a_i \ge a_{2^n}$. Sommando su tali i e poi su $n \in \mathbb{N}$, si trova
$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i \ge \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$
Per confronto, se converge la serie a sinistra, converge anche la serie a destra. □

Esempio 4.2 (Serie armonica generalizzata). Sia $\alpha > 0$ un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Abbiamo già discusso il caso $\alpha = 1, 2$. La successione $a_n = 1/n^\alpha$, $n \geq 1$, è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^n.$$

Se $\alpha > 1$ si ha una serie geometrica convergente. Se $0 < \alpha \leq 1$ la serie diverge. Dunque, la serie in esame converge se e solo se $\alpha > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Esempio 4.3 (Serie logaritmiche). Sia $\alpha > 0$ un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}.$$

La successione $a_n = 1/(n \log^\alpha n)$, $n \geq 2$, è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\alpha 2}.$$

Per quanto visto sulla serie armonica generalizzata, la serie in esame converge se e solo se $\alpha > 1$.

5. Convergenza assoluta di serie reali e complesse

In questa sezione illustriamo il Criterio della convergenza assoluta, che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza di serie complesse e di serie reali non necessariamente positive.

Definizione 5.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa. Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *assolutamente* se converge la serie reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Teorema 5.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge anche semplicemente ed inoltre

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{5.7}$$

DIM. Iniziamo a considerare il caso in cui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione reale e definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la parte positiva e la parte negativa della successione nel seguente modo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Le successioni $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ verificano le seguenti proprietà: i) $a_n^+ \geq 0$ e $a_n^- \leq 0$; ii) $a_n = a_n^+ + a_n^-$; iii) $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$; iv) $a_n^+, -a_n^- \leq |a_n|$. Dal teorema del confronto abbiamo

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad 0 \leq -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Dalle identità

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ + a_k^-) = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$

segue allora anche l'esistenza finita del limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Infine, dalla disuguaglianza

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

segue la tesi (5.7). Questo termina la prova nel caso reale.

Sia ora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa e definiamo $\alpha_n = \mathrm{Re}(a_n)$ e $\beta_n = \mathrm{Im}(a_n)$. Dalle disuguaglianze $|\alpha_n| \leq |a_n|$ e $|\beta_n| \leq |a_n|$ deduciamo che le serie reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

convergono assolutamente e quindi semplicemente. Converge allora anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

La prova di (5.7) è identica al caso reale. □

6. Criterio di Abel-Dirichlet e criterio di Leibniz

In questa sezione vogliamo studiare la convergenza di serie reali oscillanti della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n \geq 0,$$

e di serie complesse della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{in\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

Lemma 6.1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse. Allora per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n), \tag{6.8}$$

dove abbiamo posto $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ per $n \geq 1$ e convenuto che $B_0 = 0$.

Dim. La verifica è elementare e parte dall'identità $b_n = B_n - B_{n-1}$. Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=1}^{N} a_n B_{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n \\ &= a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n).\end{aligned}$$

□

Per analogia con gli integrali potremmo chiamare la successione delle somme parziali $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ la *primitiva* della successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 6.2 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale decrescente e infinitesima. Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa con primitiva limitata: esiste $C > 0$ tale che $|B_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Dim. Usando la formula di somma per parti (6.8) si trova

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

Dalla disuguaglianza $|a_n B_n| \leq C|a_n|$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} a_n B_n = 0.$$

Se proviamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

converge assolutamente, allora converge anche semplicemente per il teorema sulla convergenza assoluta. La tesi segue.

Usiamo un argomento di confronto. Usando le proprietà delle serie telescopiche, troviamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k(a_{k+1} - a_k)| \le C \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| = C \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = C a_1 < \infty.$$

Per togliere il valore assoluto abbiamo usato il fatto che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

□

Da un esame della dimostrazione precendente è chiaro che il Teorema 6.2 ha la seguente variante.

Teorema 6.3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa infinitesima tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione con le stesse proprietà del Teorema 6.2. Allora la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Un caso speciale del Teorema 6.2 è il Criterio di Leibniz.

Teorema 6.4 (Criterio di Leibniz). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale decrescente e infinitesima. Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

converge.

Dim. La tesi segue dal Teorema 6.2, infatti la successione $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ha primitiva limitata:

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \Big| \le 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Esempio 6.5. Per ogni numero reale $0 < \alpha \le 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

è convergente per il Criterio di Leibniz, in quanto la successione $a_n = 1/n^\alpha$ è decrescente ed infinitesima. La serie, tuttavia non è assolutamente convergente, come si deduce dal Criterio di condensazione di Cauchy.

Esempio 6.6. Per $0 < \alpha \le 1$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$, studiamo la convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\vartheta}}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\vartheta)}{n^\alpha} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\vartheta)}{n^\alpha}.$$

Per $\vartheta = 0$ la serie diverge. Studiamo il caso $0 < \vartheta < 2\pi$. Posto $b_n = \mathrm{e}^{in\vartheta}$, la successione delle somme parziali è

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\vartheta} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^k = \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1-\mathrm{e}^{i\vartheta}} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{i\vartheta}-\mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1-\mathrm{e}^{i\vartheta}},$$

con formula ben definita per $\mathrm{e}^{i\vartheta} \neq 1$. Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|B_n| = \left|\frac{\mathrm{e}^{i\vartheta}-\mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1-\mathrm{e}^{i\vartheta}}\right| \le \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{i\vartheta}|} < \infty.$$

Per il Criterio di Abel-Dirichlet, la serie in esame converge per $\vartheta \in (0, 2\pi)$.

7. Esercizi

7.1. Serie geometria e serie telescopiche.

Esercizio 7.1. Calcolare esplicitamente la somma della seguenti serie

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}, \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Esercizio 7.2. Per $0 \le r < 1$ ed $x \in \mathbb{R}$ calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos nx}{n}.$$

7.2. Criteri del confronto, radice, rapporto e condensazione.

Esercizio 7.3. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\mathrm{e}^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \quad \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \big|\sin(\sin n)\big|^n.$$

Esercizio 7.4. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^{2n}+|2x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 7.5. Al variare dei numeri reali $a, b > 0$ discutere la convergenza delle serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} n\log(1+a^n); \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}.$$

Esercizio 7.6. Al variare del numero reale $x > 1$ discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}.$$

Esercizio 7.7. Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza delle serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \log\Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big); \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}(\sqrt{1+n^4}-n^2); \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha+1}.$$

Esercizio 7.8. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x>0} \Big(\frac{x}{1+x^n}\Big)^n.$$

Esercizio 7.9. Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$ diverge.

Esercizio 7.10. Al variare del numero reale $\alpha > 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}}.$$

Esercizio 7.11. Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}(n+1)^{n+2}}{(n+3)!}.$$

Esercizio 7.12. Al variare di $0 < x < 1$ ed $\alpha > 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{(\log n)^{\alpha}}.$$

7.3. Serie a segno alterno. Convergenza assoluta.

Esercizio 7.13. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^{n+1}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n\big(\sin(2x)\big)^n}{n^2+1}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}$.

Esercizio 7.14. Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(1-n\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Esercizio 7.15. Sia $0 < a < 1$ un numero reale.

i) Definita $a_n \in (-1,0)$ tramite la relazione $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, provare che

$$|a_n| \le \frac{1}{n}\Big(\frac{1-a}{a}\Big), \quad n \ge 1.$$

ii) Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n+1}.$$

Esercizio 7.16. Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(x^2-3x+2)^n}{2^n(n^2+4)}.$$

ESERCIZIO 7.17. Al variare del numero reale $x > 1$ studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\log x)^{1/n}}{n}.$$

7.4. Esercizi generali sulle serie.

ESERCIZIO 7.18. Sia Q un quadrato di lato 2 e sia Q_n, $n \geq 1$, una successione di quadrati tali che Q_n abbia lato $1/n$. È possibile disporre tutti i quadrati Q_n dentro il quadrato Q senza che si sovrappongano fra loro?

ESERCIZIO 7.19. Sia $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale infinitesima tale che $q_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mostrare tramite esempi che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+q_n}}$ può sia convergere che divergere.

ESERCIZIO 7.20. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga. Provare che anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.

ESERCIZIO 7.21. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $b_n \neq 0$ e $a_n+b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che le due serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a_n}{b_n}\Big)^2$$
convergano. Provare che converge anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n + b_n}$.

ESERCIZIO 7.22. Sia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione non negativa tale che: a) $\varphi(0) = 0$; b) φ è strettamente crescente; c) φ è continua.

1) Provare che per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale l'implicazione

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|^2) < \infty.$$

2) Determinare il sottoinsieme minimo delle ipotesi a), b) e c) su $\varphi \geq 0$ tale che sia vera l'implicazione $(*)$.

ESERCIZIO 7.23. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva e crescente. Provare che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}\Big)$$
converge se e solo se esiste finito il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Suggerimento. Serie telescopiche. In una direzione, può essere utile usare $\log(1 + x) \leq x$.

7.5. Esercizi vari.

Esercizio 7.24. Provare che per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ non negativo vale l'identità

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n} = 1 - 2\{x\},$$

dove $[x]$ e $\{x\}$ sono la parte intera e la parte frazionaria di x. Lavorare in rappresentazione binaria. Lavorare in rappresentazione binaria

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k \in \{0, 1\}.$$

Esercizio 7.25. Sia $(a_n)_{n\in}$ una successione di numeri reali positivi, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} \le \mathrm{e} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Esercizio 7.26. Sia $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo che la serie complessa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converga. Dimostrare che

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = 0.$$

Esercizio 7.27. Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

Idea: usare lo sviluppo di Taylor di e^x e integrare per parti.

Esercizio 7.28. Mostrare che per ogni $p > 0$ si ha l'identità

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^p} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + pn}.$$

Esercizio 7.29. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie di potenze complessa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$, $z \in \mathbb{C}$.

Esercizio 7.30. Calcolare la somma della serie in $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \quad \text{dove} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

Esercizio 7.31. Studiare la convergenza della serie di funzioni nella variabile $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{x}{1 + x^n} \Big)^n.$$

Esercizio 7.32. Sia $\beta \in \mathbb{R}$ e si definisca per ricorrenza la successione

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n^\beta} \sin a_n \quad \text{per } n \geq 0. \end{cases}$$

Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Esercizio 7.33. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $m \leq n$ e siano $a_m \geq a_{m+1} \geq \ldots \geq a_m \geq 0$ numeri reali. Provare che per ogni $x \in (0, 2\pi)$ vale la disuguaglianza

$$\Big| \sum_{k=m}^{n} a_k e^{ikx} \Big| \leq \frac{a_m}{|\sin(x/2)|}.$$

7.6. Criterio del confronto asintotico.

Esercizio 7.34. Al variare di $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza delle serie

$$1) \ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sqrt[3]{1 + \frac{\alpha}{n}} - \sqrt{1 + \frac{\beta}{n}} \Big); \quad 2) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(1/n^\alpha)}{[1 - \cos(1/n)]^\beta}.$$

Esercizio 7.35. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza delle serie numeriche:

$$1) \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin(1/n^\alpha) \log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}\arctan(n)}; \quad 2) \ \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{1 + 1/n^2} - \cos(1/n) \right).$$

Esercizio 7.36. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/3} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sqrt[3]{1+n}}{\log(1+n^2)}.$$

Esercizio 7.37. Studiare la convergenza della seguente serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^\alpha} \Big[\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \Big] \log n.$$

8. La funzione esponenziale e^x

Definiamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per il Criterio del Rapporto la serie converge (assolutamente) per ogni $x \in \mathbb{R}$. Useremo anche la notazione $\varphi(x) = e^x$ per indicare la *funzione esponenziale*.

Teorema 8.1. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito e precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{8.9}$$

Inoltre, per $x > 0$ la convergenza è monotona crescente.

DIM. Ci limiteremo al caso $x > 0$. Proviamo che la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è crescente e superiormente limitata. Dalla Proposizione 3.2 segue l'esistenza finita del limite in (8.9).

Dalla formula del binomio di Newton si ottiene

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{x^k}{k!}, \tag{8.10}$$

e in modo analogo

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \frac{x^k}{k!}.$$

Dalle disuguaglianze

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \dots, \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right),$$

valide per $k = 0, 1, \dots, n$, e dal fatto che $x^k > 0$ segue che $a_n < a_{n+1}$. Siccome

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1, \dots, \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1,$$

dall'identità (8.10) si trova anche la maggiorazione

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < \infty. \tag{8.11}$$

Questo prova l'esistenza finita del limite. Inoltre, per $n \to \infty$ si ottiene la disuguaglianza

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Proviamo la disuguaglianza opposta. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri tali che $n \ge m$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{x^k}{k!} \\ &\ge \sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

e facendo ora il limite per $m \to \infty$ si trova

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Questo termina la dimostrazione del teorema nel caso $x > 0$. $\square$

Osservazione 8.2 (Stima del resto). Siano $x \in \mathbb{R}$ ed $m, n \in \mathbb{N}$ numeri tali che $0 < x < m \leq n$. Spezziamo la somma parziale della serie esponenziale nel seguente modo:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{m^{k-m} m!}.$$

Abbiamo usato la disuguaglianza $k! = k(k-1) \cdot \ldots \cdot (m+1)m! > m^{k-m} m!$. D'altra parte, dalla formula per la somma geometrica parziale, si ottiene

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{m^{k-m} m!} = \frac{x^m}{m!} \sum_{h=0}^{n-m} \Big(\frac{x}{m}\Big)^h = \frac{x^m}{m!} \frac{1-(x/m)^{n-m+1}}{1-x/m} < \frac{x^m}{m!} \frac{m}{m-x}.$$

Abbiamo usato il fatto che $m > x > 0$. In conclusione, troviamo la maggiorazione per il resto:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^m}{m!} \frac{m}{m-x}, \quad 0 < x < m \leq n.$$

Questa disuguaglianza non dipende da n, nel membro di destra, e quindi si trova la stima per il resto della serie esponenziale

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^m}{m!} \frac{m}{m-x}, \quad 0 < x < m. \tag{8.12}$$

Applichiamo questa formula per una stima del numero di Nepero che, per definizione, è il numero

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $\mathrm{e} > \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} 1/k!$, e con la scelta $m = 4$ si ottiene la stima dal basso

$$\mathrm{e} > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2 + \frac{2}{3}.$$

Per ottenere una stima dall'alto si può usare la (8.12) con $x = 1$:

$$\mathrm{e} \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{m}{m!(m-1)},$$

che con $m = 4$ fornisce

$$\mathrm{e} \leq 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} < 3.$$

Osservazione 8.3. Presentiamo una seconda dimostrazione del Teorema 8.1. Precisamente, vogliamo provare che per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e proviamo che è possibile scegliere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq n$ si abbia:

$$\Big|\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\Big| < \varepsilon$$

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ da discutere tali che $m \le n$. Dalla formula per il Binomio di Newton si trova, come in (8.10) nella dimostrazione del Teorema 8.1,

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{m-1}\Big[\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big]\frac{z^k}{k!}\\ &\quad+\sum_{k=m}^{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=m}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.\end{aligned}$$

Prendendo i moduli ed usando la subadittività si ottiene

$$\begin{aligned}\Big|\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Big| &\le \sum_{k=0}^{m-1}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!}\\ &\quad+\sum_{k=m}^{n}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\Big|\frac{|z|^k}{k!}+\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}\\ &\le \sum_{k=0}^{m-1}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!}+2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}.\end{aligned}$$

Possiamo scegliere $m \in \mathbb{N}$ con $m > |z|$ e indipendentemente da n tale che – usiamo la stima del resto, ma se ne potrebbe fare a meno –

$$2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} \le \frac{2|z|^m}{m!}\frac{m}{m-|z|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A questo punto, possiamo scegliere $\bar{n}$ tale che per $n \ge \bar{n}$ si abbia:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Questo conclude la dimostrazione.

Teorema 8.4. La funzione esponenziale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^x$, verifica le seguenti proprietà:

1) $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
2) $e^{-x} = 1/e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3) $e^x < e^y$ se $x < y$.
4) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
5) Per ogni $y > 0$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $e^x = y$.

Dim. Diamo solo dei cenni sulle dimostrazioni. 1) Quando $x \ge 0$, la positività deriva dalla definizione

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \ge 1 > 0.$$

Quando $x < 0$, la positività deriva dal punto 2) che ora verifichiamo.

2) Osserviamo preliminarmente che

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)^n = 1.$$

Questo segue dal Teorema del confronto a partire dalle seguenti disuguaglianze (usiamo la disuguaglianza di Bernoulli)

$$1 > \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}.$$

Dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si trova

$$1 = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)^n = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Ovvero, $\mathrm{e}^{-x} = (\mathrm{e}^x)^{-1}$.

3) Che per $x \geq 0$ la funzione esponenziale sia strettamente crescente deriva dalla definizione. Per $x < 0$ la monotonia deriva dal punto 2).

4) Una prova di tale identità si può ottenere mostrando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Big(1 + \dfrac{x+y}{n}\Big)^n}{\Big(1 + \dfrac{x}{n}\Big)^n \Big(1 + \dfrac{y}{n}\Big)^n} = 1.$$

La verifica di questo fatto è lasciata come esercizio al lettore.

5) La verifica della suriettività richiede il Teorema dei valori intermedi per le funzioni continue ed è omessa.

□

Osservazione 8.5. 1) La proprietà 4) si può esprimere anche in questo modo: la funzione esponenziale $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ è un omomorfismo dal gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ al gruppo moltiplicativo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, dove $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

2) La funzione esponenziale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$, è iniettiva e suriettiva. Dunque, è definita la sua funzione inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, che è la funzione logaritmo $\varphi^{-1} = \log$.

3) Il numero e non è razionale, $\mathrm{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La prova di questo fatto è lasciata come esercizio al lettore.

9. Teorema di Bolzano-Weierstrass

Introduciamo la nozione di sottosuccessione.

Definizione 9.1. Una *selezione crescente* di indici è una funzione (successione) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che è strettamente crescente, $k(n) < k(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scriveremo $k_n = k(n)$.

Definizione 9.2. Una *sottosuccessione* di una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione della forma $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ con $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ selezione crescente di indici.

Sappiamo che tutte le successioni convergenti sono limitate. Le successioni limitate in generale non sono convergenti, ma hanno sempre una sottosuccessione convergente.

Teorema 9.3 (della sottosuccessione convergente). *Ogni successione reale o complessa limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente.*

La dimostrazione del Teorema 9.3 si basa sul Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Definizione 9.4. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se per ogni $\delta > 0$ si ha

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset,$$

ovvero, equivalentemente, se per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$.

Ricordiamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice *limitato* se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $A \subset [a, b]$.

Teorema 9.5 (Bolzano-Weierstrass). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato con $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Allora A ha almeno un punto di accumulazione.

Dim. La dimostrazione si basa sul metodo di *dicotomia*. Siccome A è limitato esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tali che $A \subset [a, b]$. Definiamo $a_0 = a$, $b_0 = b$ e sia $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio. Consideriamo i due intervalli $[a_0, c_0]$ e $[c_0, b_0]$. Uno dei due intervalli deve contenere infiniti elementi di A. Sia ad esempio $[a_0, c_0]$. Allora definiamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$. Si hanno le disuguaglianze

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0, \quad \text{e} \quad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0).$$

Procediamo ora in modo induttivo. Supponiamo di aver già scelto dei numeri $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ con queste proprietà:

i) $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$;
ii) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$;
iii) L'intervallo $[a_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A.

Selezioniamo dei numeri a_{n+1} e b_{n+1} nel seguente modo. Definiamo $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Uno dei due intervalli $[a_n, c_n]$ e $[c_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A. Supponiamo sia ad esempio il secondo. Definiamo allora $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$. Le affermazioni i), ii), iii) sono allora verificate con $n + 1$ al posto di n.

Abbiamo costruito una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è monotona crescente e superiormente limitata, ed una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è monotona decrescente inferiormente limitata. Dunque esistono finiti i limiti

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad M = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dalla proprietà ii) segue che

$$M - L = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0,$$

e dunque $L = M$. Proviamo che il punto $x_0 = L = M$ è un punto di accumulazione per A.

Fissiamo $\delta > 0$ e scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $b_n - a_n < \delta$. Questo è certamente possibile. Siccome $a_n \leq x_0 \leq b_n$, si ha $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I_\delta(x_0)$. Siccome $[a_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A, l'insieme $A \cap I_\delta(x_0)$ contiene infiniti elementi e dunque certamente $A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. □

Osservazione 9.6. Provare che il Teorema di Bolzano-Weierstrass implica (e di fatto è equivalente a) l'Assiona di completezza dei numeri reali.

Dimostrazione del Teorema 9.3. Senza perdere di generalità possiamo supporre che la successione sia reale. Nel caso di una successione complessa è sufficiente estrarre una prima sottosuccessione della parte reale e poi un'ulteriore sottosuccessione di quella immaginaria (ci sono due processi di selezione di una sottosuccessione, il secondo subordinato al primo).

Si consideri dunque l'insieme $A = \big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$. Se A contiene un numero finito di elementi, allora almeno uno di questi ricorre per infinite scelte di indici e si può estrarre una sottosuccessione costante.

Possiamo allora supporre $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, A ha un punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R}$. Per ogni $\delta = 1/n$, l'insieme $A \cap I_\delta(x_0)$ contiene infiniti elementi. Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $a_{k_n} \in I_{1/n}(x_0)$. È possibile selezionare in modo ricorsivo k_n in modo tale che $k_n > k_{n-1}$. Quindi $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dalla disuguaglianza

$$|a_{k_n} - x_0| \le \frac{1}{n}$$

segue che $a_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. □

10. Successioni di Cauchy. Completezza metrica di $\mathbb{R}$

Definizione 10.1 (Successione di Cauchy). Una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \ge \bar{n}$ si ha $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Teorema 10.2 (Criterio di Cauchy). Una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se è di Cauchy.

Dim. Proviamo il Teorema nel caso delle successioni reali. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che converge ad un numero $L \in \mathbb{R}$ e proviamo che è di Cauchy. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \ge \bar{n}$ si ha $|a_n - L| < \varepsilon$. Dunque, per $n, m \ge \bar{n}$ si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$|a_n - a_m| \le |a_n - L| + |L - a_m| \le 2\varepsilon.$$

Supponiamo viceversa che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Proviamo preliminarmente che la successione è limitata. Infatti, scelto $\varepsilon = 1$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < 1$ per $m, n \ge \bar{n}$, e in particolare per $n \ge \bar{n}$ si ha

$$|a_n| \le |a_{\bar{n}}| + |a_n - a_{\bar{n}}| \le 1 + |a_{\bar{n}}|,$$

e dunque, per un generico $n \in \mathbb{N}$ si ha la maggiorazione

$$|a_n| \le \max\{|a_1|, ..., |a_{\bar{n}-1}|, 1 + |a_{\bar{n}}|\}.$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, dalla successione limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Ovvero esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L.$$

Proviamo che vale anche $a_n \to L$ per $n \to \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ dato dalla condizione di Cauchy, ovvero $|a_n - a_m| < \varepsilon$ per ogni $n, m \ge \bar{n}$. Scegliamo $k \in \mathbb{N}$ tale che $n_k \ge \bar{n}$ e $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$. Allora, per $n \ge \bar{n}$ risulta

$$|a_n - L| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| \le 2\varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione. La dimostrazione nel caso complesso è identica, basterà usare il Teorema di Bolzano-Weierstrass nel caso complesso. □

Il Teorema 10.2 si può riformulare nel seguente modo: I numeri reali $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea formano uno *spazio metrico completo*. Analogamente, il piano complesso $\mathbb{C}$ con la distanza Euclidea è uno spazio metrico completo

I numeri razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la distanza Euclidea $d(x,y) = |x-y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$, non sono invece uno spazio metrico completo. Infatti, la successione

$$a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N},$$

è di Cauchy in $\mathbb{Q}$ con tale distanza ma non converge ad un elemento di $\mathbb{Q}$. Infatti, il valore limite della successione è il numero $\mathrm{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Esercizio 10.1. Provare il Teorema 5.2 sulla convergenza assoluta utilizzando il Criterio di Cauchy.

11. Criteri di convergenza di Cesàro

I criteri di Cesàro sono utili per calcolare limiti che presentano forme indeterminate del tipo $[\infty/\infty]$ oppure $[0/0]$.

Teorema 11.1 (Cesàro I). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali e supponiamo che:

i) La successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente e $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$;
ii) Esiste (finito) il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \in \mathbb{R}.$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Dim. Osserviamo che si può supporre $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Affermiamo che per ogni $\delta < L$ si ha

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \delta. \tag{11.13}$$

Dalla arbitrarietà di δ segue:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq L. \tag{11.14}$$

Applicando questa disuguaglianza alla coppia di successioni $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativamente al limite $-L$, si trova

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{-a_n}{b_n} \geq -L,$$

che è equivalente a (Esercizio 5.30)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L. \tag{11.15}$$

Da (11.14) e (11.15) segue la tesi.

Rimane da provare (11.13). Esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \geq \delta.$$

Ricordando che $b_{n+1} - b_n > 0$, questa disuguaglianza è equivalente a $a_{n+1} - a_n \geq \delta(b_{n+1} - b_n)$. Dunque, se $k \in \mathbb{N}$ e $n \geq \bar{n}$ si trova

$$a_{n+k} - a_n = \sum_{i=1}^{k} (a_{n+i} - a_{n+i-1}) \geq \delta \sum_{i=1}^{k} (b_{n+i} - b_{n+i-1}) = \delta(b_{n+k} - b_n).$$

In particolare, dividendo per $b_{n+k} > 0$, si trova

$$\frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \geq \frac{a_n}{b_{n+k}} + \delta\Big(1 - \frac{b_n}{b_{n+k}}\Big).$$

Facendo ora il limite per $k \to \infty$ con n fissato, si deduce che

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \geq \delta.$$

Questo termina la dimostrazione. □

Teorema 11.2 (Cesàro II). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali infinitesime, con $b_n \neq 0$ per $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia strettamente monotona e che esista (finito) il limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Dim. Supponiamo ad esempio che sia $b_{n+1} > b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi $b_n < 0$. Come nel teorema precedente si mostra che per ogni $\delta < L$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_{n+k} - a_n \geq \delta(b_{n+k} - b_n).$$

Passando al limite per $k \to \infty$ si trova $a_n \leq \delta b_n$, e dunque

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \delta \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \delta.$$

E ora si conclude come nel teorema precedente. □

12. Rappresentazione dei reali in base b

In questa sezione discutiamo il problema di rappresentare numeri reali tramite allineamenti infiniti di cifre. Ci restringiamo a numeri reali $x \in [0, 1)$.

Sia $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$ un *base* e introduciamo l'insieme delle cifre ammissibili $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$. Quando $b = 10$ avremo la *rappresentazione decimale* di un numero reale, quando $b = 2$ avremo la *rappresentazione binaria*.

DEFINIZIONE 12.1. Una *rappresentazione in base b* di un numero reale $x \in [0,1)$ è un allineamento di cifre

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots, \quad \alpha_n \in \{0, 1, \dots, b-1\},$$

dove l'uguaglianza è da intendersi nel senso

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^n}.$$

La rappresentazione si dice *propria* se non esiste alcun $m \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha_n = b-1$ per ogni $n \geq m$.

Osserviamo che se $\alpha_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e non è identicamente $\alpha_n = b-1$, allora si ha

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^n} < (b-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{b-1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{n-1}} = \frac{b-1}{b} \frac{1}{1-1/b} = 1.$$

TEOREMA 12.2. Sia $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$. Ogni numero reale $x \in [0,1)$ ha un'unica rappresentazione propria in base b,

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots, \quad \alpha_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

DIM. Iniziamo con il provare l'esistenza di una rappresentazione propria in base b. Affermiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esistono delle cifre $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ ed un "errore" $x_n \in [0,1)$ tali che

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{x_n}{b^n}. \tag{12.16}$$

La verifica di tale affermazione è per induzione su $n \in \mathbb{N}$.

Partiamo dalla base induttiva $n = 1$. Osserviamo che

$$0 \leq bx < b \in \mathbb{N} \quad \text{e quindi} \quad 0 \leq [bx] \leq b-1.$$

Il numero naturale $\alpha_1 = [bx]$ verifica $0 \leq \alpha_1 \leq b-1$, ovvero è una cifra ammissibile. Inoltre si ha

$$x = \frac{\alpha_1}{b} + \frac{x_1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = bx - \alpha_1 = bx - [bx] = \{bx\} \in [0,1).$$

Dunque $x_1 = \{bx\}$ è la nostra definizione dell'errore $x_1 \in [0,1)$.

Supponiamo ora di avere la formula (12.16) per un certo $n \in \mathbb{N}$. Vogliamo trovare la stessa formula per $n+1$. Precisamente, dobbiamo trovare la cifra $\alpha_{n+1} \in \{0, 1, ..., b-1\}$ e l'errore $x_{n+1} \in [0,1)$.

Applichiamo l'argomento della base induttiva al numero reale $x_n \in [0,1)$ e troveremo $\alpha_{n+1} \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ e $x_{n+1} \in [0,1)$ tali che

$$x_n = \frac{\alpha_{n+1}}{b} + \frac{x_{n+1}}{b}.$$

Sostituendo nella (12.16) si ottiene

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{\alpha_{n+1}}{b^{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{b^{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{x_{n+1}}{b^{n+1}}.$$

Questo termina la verifica della (12.16).

Ora osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{b^n} = 0,$$

in quanto si ha il prodotto di una successione infinitesima con una limitata. Passando al limite per $n \to \infty$ in (12.16) si ottiene la rappresentazione di x in base b

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{b^k}.$$

Ora proviamo che la rappresentazione è propria. Supponiamo per assurdo che esista $m \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha_n = b - 1$ per ogni $n > m$. Avremo, per un certo $x_m \in [0, 1)$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{x_m}{b^m} = x = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{b^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{b^k},$$

da cui si deduce che

$$x_m = b^m \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{b^k} = \frac{b-1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^k} = 1,$$

e questo è assurdo.

Rimane da provare che esiste un'unica rappresentazione propria. Supponiamo di avere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{b^n},$$

con $\alpha_n, \beta_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ cifre tali che non siano definitivamente $b - 1$. Proviamo che $\alpha_1 = \beta_1$. Se per assurdo così non fosse avremmo

$$0 \neq \frac{\alpha_1 - \beta_1}{b} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n - \alpha_n}{b^n}.$$

Esiste certamente $n \geq 2$ (in effetti esistono infiniti tali n) per cui $|\beta_n - \alpha_n| < b - 1$. Quindi

$$\Big| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n - \alpha_n}{b^n} \Big| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\beta_n - \alpha_n|}{b^n} < (b-1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{b-1}{b^2} \frac{1}{1 - 1/b} = \frac{1}{b}.$$

Questo è assurdo, in quando

$$\Big| \frac{\alpha_1 - \beta_1}{b} \Big| \geq \frac{1}{b}.$$

Ora per induzione si prova che $\alpha_n = \beta_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Usando le rappresentazioni decimali o binaria è agevole provare vari risultati sulla cardinalità dei reali.

Teorema 12.3. L'insieme dei numeri reali non è numerabile.

Dim. Sappiamo che $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}([0, 1))$. Quindi è sufficiente provare che l'insieme $[0, 1)$ non è numerabile. Supponiamo per assurdo che $[0, 1)$ sia numerabile. Allora potremmo elencare i suoi elementi

$$[0, 1) = \big\{ x_n : n \in \mathbb{N} \big\}.$$

Ciascun reale $x_n \in [0,1)$ ha un'unica rappresentazione decimale propria

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \alpha_1^1 \alpha_1^2 \dots \alpha_1^m \dots \\ x_2 &= 0, \alpha_2^1 \alpha_2^2 \dots \alpha_2^m \dots \\ &\vdots \\ x_n &= 0, \alpha_n^1 \alpha_n^2 \dots \alpha_n^m \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

dove le cifre verificano $\alpha_n^m \in \{0,1,\dots,9\}$ e inoltre la successione $m \mapsto \alpha_n^m$ non è mai (per nessun n) definitivamente 9.

Possiamo scegliere $\beta_1 \in \{0,1,\dots,8\}$ con $\beta_1 \neq \alpha_1^1$, $\beta_2 \in \{0,1,\dots,8\}$ con $\beta_2 \neq \alpha_2^2$, e in generale $\beta_m \in \{0,1,\dots,8\}$ con $\beta_m \neq \alpha_m^m$, $m \in \mathbb{N}$. Per l'unicità della rappresentazione decimale propria, il numero

$$x = \sum_{m=1} \frac{\beta_m}{10^m} \in [0,1)$$

verifica $x \neq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo è assurdo.

□

Il criterio di selezione utilizzato nella dimostrazione precedente si ispira al metodo di *selezione diagonale di Cantor*. Il teorema precedente può essere migliorato. In effetti, si ha $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. La prova di questo teorema è omessa

TEOREMA 12.4. Risulta $\mathrm{Card}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

DIM. È sufficiente provare che $\mathrm{Card}([0,1) \times [0,1)) = \mathrm{Card}([0,1))$. La parte più difficile della dimostrazione è di provare che esiste una funzione $f : [0,1) \times [0,1) \to [0,1)$ iniettiva.

Siano $x, y \in [0,1)$ dati dalla rappresentazione binaria propria

$$\begin{aligned} x &= 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \\ y &= 0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots, \end{aligned}$$

dove $\alpha_n, \beta_n \in \{0,1\}$ non sono definitivamente 1. Definiamo $f(x,y)$ come il numero reale in $[0,1)$ con rappresentazione decimale propria

$$f(x,y) = 0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n \dots.$$

La funzione f è iniettiva per l'unicità della rappresentazione decimale propria. Se, infatti, $f(x,y) = f(\bar{x}, \bar{y})$ allora si ha

$$0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n \dots = 0, \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_2 \dots \bar{\alpha}_n \bar{\beta}_n \dots \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = \bar{\alpha}_n \text{ e } \beta_n = \bar{\beta}_n,\ n \in \mathbb{N},$$

e quindi $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$, dove le espressioni con $^-$ sono legate nel modo naturale.

□

13. Riordinamenti di serie

Il valore (la somma) di una serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

dipende dall'ordine in cui si sommano gli infiniti addendi. In altri termini, per le somme infinite non vale la proprietà commutativa. Se tuttavia la serie converge assolutamente allora il valore della somma è indipendente dall'ordine della somma.

Definizione 13.1 (Riordinamento). Una applicazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva si dice *riordinamento*.

Teorema 13.2. Sia $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie reale o complessa assolutamente convergente. Allora per ogni riordinamento $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si ha

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)},$$

e la serie converge assolutamente.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\Big| s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k \Big| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=\bar{n}+1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora definiamo il numero naturale $\bar{m} = \max\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(\bar{n})\}$. Allora se $m \geq \bar{m}$ si ha $m \geq \sigma^{-1}(i)$ per ogni $i = 1, ..., \bar{n}$, ovvero $\sigma^{-1}(i) \in \{1, ..., m\}$ per ogni $i = 1, ..., \bar{n}$, ovvero

$$\{1, \dots, \bar{n}\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}.$$

Dunque, se $m \geq \bar{m}$ troviamo

$$\Big| s - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} \Big| = \Big| s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k - \sum_{\substack{k=1 \\ \sigma(k) \notin \{1,\dots,\bar{n}\}}}^{m} a_{\sigma(k)} \Big| \leq \Big| s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k \Big| + \sum_{k=\bar{n}+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Questo prova che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$.

Lo stesso argomento applicato alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ prova l'assoluta convergenza della serie riordinata:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| < \infty.$$

$\square$

Consideriamo ora una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e supponiamo che la seguente serie converga semplicemente ma non assolutamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Questa è la condizione necessaria di convergenza.

ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$, dove $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$.

iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty$, dove $a_n^- = \min\{a_n, 0\}$.

Che una delle due affermazioni ii) e iii) debba valere segue dal fatto che in caso contrario ci sarebbe convergenza assoluta. Se valesse solo una delle affermazioni ii) e iii), allora non potrebbe esserci convergenza semplice.

Teorema 13.3. *Sia $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, il termine generale di una serie che converge semplicemente ma non assolutamente. Allora per ogni $L \in \mathbb{R}$ esiste un riordinamento $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L.$$

Dim. Definiamo il riordinamento σ in modo induttivo. Definiamo $\sigma(1) = 1$ e supponiamo che $\sigma(1), ..., \sigma(n)$ siano stati definiti. Definiamo il numero naturale $\sigma(n+1)$ con il seguente criterio. Sia

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}$$

e distinguiamo i due casi $L_n \geq L$ e $L_n < L$.

Se $L_n \geq L$ definiamo

$$\sigma(n+1) = \min\big\{m \in \mathbb{N} : m \notin \{\sigma(1), ..., \sigma(n)\} \text{ e } a_m < 0\big\}.$$

Osserviamo che l'insieme dei naturali $m \in \mathbb{N}$ con le proprietà richieste è infinito per la condizione iii) vista sopra. Il minimo esiste per il buon ordinamento dei naturali.

Se $L_n < L$ definiamo

$$\sigma(n+1) = \min\big\{m \in \mathbb{N} : m \notin \{\sigma(1), ..., \sigma(n)\} \text{ e } a_m \geq 0\big\}.$$

Il minimo m con le proprietà richieste esiste per la condizione ii).

L'applicazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita è iniettiva. Dalle condizioni ii) e iii) segue anche che σ è suriettiva.

Proviamo che $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L$. Fissato $\varepsilon > 0$, per la i) esiste $\bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{m}$. Inoltre per la ii) si può anche supporre che $L_{\bar{m}} > L - \varepsilon$. Segue che $L_n > L - \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{m}$. Per la iii) esiste $\bar{n} \geq \bar{m}$ tale che $L_{\bar{n}} \leq L$, e dunque $L_n \leq L + \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Questo termina la dimostrazione. $\square$

14. Criterio del confronto asintotico

TEOREMA 14.1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse tali che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che esista finito e non zero il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se e solo se converge assolutamente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

DIM. Dalla disuguaglianza $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$ per numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{|a_n|} = |L| \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dunque, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$

$$\frac{|L|}{2}|a_n| \leq |b_n| \leq 2|L||a_n|.$$

Per il Teorema del confronto, la tesi segue allora dalle disuguaglianze

$$\frac{|L|}{2}\sum_{n=\bar{n}}^{\infty}|a_n| \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty}|b_n| \leq 2|L|\sum_{n=\bar{n}}^{\infty}|a_n|.$$

□

OSSERVAZIONE 14.2. Il teorema precedente non vale se alle parole "convergenza assoluta" si sostituiscono le parole "convergenza semplice". Si considerino, infatti, le successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chiaramente si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \neq 0.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge semplicemente, per il Criterio di Leibniz. Tuttavia la serie con termine generale a_n non converge semplicemente, infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty.$$

ESEMPIO 14.3. Al variare di $\alpha > 0$ studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\sin(1/n^\alpha)}{n+1}.$$

Si tratta di una serie a termini positivi. Usando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}\sin(1/n^\alpha)}{n+1}}{\dfrac{1}{n^{\alpha+1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\frac{\sin(1/n^\alpha)}{1/n^\alpha} = 1 \neq 0.$$

Quindi, la serie data converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}},$$

ovvero se e solo se $\alpha > 1/2$.

15. Prodotto di serie reali o complesse

In questa sezione dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA 15.1 (Mertens). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse. Supponiamo che:

1) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente.
2) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge.

Allora si ha:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

ed in particolare la serie a destra converge.

DIM. Fissato $N \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=0}^{N} a_k\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N} b_n\Big) &= \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{n=k}^{N+k} b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=N+1}^{N+k} a_k b_{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{N} a_k(s_N - s_{N-k}),\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} b_n,$$

le somme parziali relative alla successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Se proviamo che si ha

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k(s_N - s_{N-k}) = 0, \tag{15.17}$$

allora la tesi segue.

Osserviamo preliminarmente che:

i) Esiste una costante $C > 0$ tale che $|s_N| \le C < \infty$ per ogni $N \in \mathbb{N}$, in quanto le somme parziali convergono.

ii) La successione $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, in quanto converge.

Siano $M \le N$, allora

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{N} a_k(s_N - s_{N-k})\right| &= \left|\sum_{k=0}^{M} a_k(s_N - s_{N-k}) + \sum_{k=M+1}^{N} a_k(s_N - s_{N-k})\right| \\ &\le \sum_{k=0}^{M} |a_k|\big|s_N - s_{N-k}\big| + \sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k|\big|s_N - s_{N-k}\big|.\end{aligned}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Usando la stima i) e l'assoluta convergenza 1), è possibile scegliere $M \in \mathbb{N}$ indipendente da N tale che

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k|\big|s_N - s_{N-k}\big| \le \sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k|(|s_N| + |s_{N-k}|) \le 2C \sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora M è fissato. Per il fatto ii) e di nuovo per l'assoluta convergenza 1), esiste $\bar N \in \mathbb{N}$ tale che per $N \ge \bar N$ si abbia

$$\sum_{k=0}^{M} |a_k|\big|s_N - s_{N-k}\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Questo conclude la prova di (15.17).

□

16. Convergenza di successioni uniforme rispetto ad un parametro

Sia Λ un insieme e indichiamo con $\lambda \in \Lambda$ i suoi elementi. Per ogni $\lambda \in \Lambda$ sia data una successione reale o complessa $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo una funzione $a_n : \Lambda \to \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$). Supponiamo che la successione $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ *converga puntualmente*, supponiamo cioè che per ogni $\lambda \in \Lambda$ esista un numero $L(\lambda) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\lambda) = L(\lambda).$$

Il valore limite è in effetti una funzione $L : \Lambda \to \mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$).

Definizione 16.1 (Convergenza uniforme). Diciamo che una successione reale o complessa $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente rispetto al parametro* $\lambda \in \Lambda$ se esiste una funzione $L : \Lambda \to \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$) tale che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} |a_n(\lambda) - L(\lambda)| = 0.$$

Equivalentemente, la successione converge uniformemente se esiste una funzione $L : \Lambda \to \mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{C}$) tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar n \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall \lambda \in \Lambda \text{ e } \forall n \ge \bar n \text{ si ha } |a_n(\lambda) - L(\lambda)| < \varepsilon.$$

L'indice $\bar n$ dipende in generale da ε ma *deve essere indipendente* da λ.

Si confronti la definizione di convergenza uniforme con la nozione, più debole, di convergenza puntuale:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall \lambda \in \Lambda \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } |a_n(\lambda) - L(\lambda)| < \varepsilon.$$

In questo caso, l'indice $\bar{n}$ può dipendere anche da $\lambda \in \Lambda$.

La convergenza uniforme è importante perchè conserva nel passaggio al limite la proprietà di continuità. Questi concetti verranno ripresi nei corsi di Analisi del secondo anno.

Teorema 16.2. Una successione reale o complessa $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente rispetto al parametro $\lambda \in \Lambda$ se e solo se è di Cauchy *uniformementre su* Λ, ovvero:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall \lambda \in \Lambda \text{ e } \forall n, m \geq \bar{n} \text{ si ha } |a_n(\lambda) - a_m(\lambda)| < \varepsilon. \tag{16.18}$$

Dim. Proviamo la parte non banale (e interessante) del teorema. Supponiamo cioè che valga l'affermazione (16.18) e proviamo che c'è convergenza uniforme. Se vale (16.18), allora per ogni $\lambda \in \Lambda$ (fissato) la successione $(a_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e quindi converge ad un valore limite $L(\lambda) \in \mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$). Facendo tendere ora $m \to \infty$ nella (16.18) si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall \lambda \in \Lambda \text{ e } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } |a_n(\lambda) - L(\lambda)| < \varepsilon.$$

Questo prova la convergenza uniforme.

L'implicazione opposta del teorema segue dalla disuguaglianza triangolare. Omettiamo i facili dettagli. □

Esempio 16.3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri la funzione $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1].$$

Il limite puntuale della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

La convergenza non è uniforme sull'intervallo $[0,1]$. Infatti, si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1,$$

e questo vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0,$$

e non c'è convergenza uniforme.

La convergenza è tuttavia uniforme su ogni intervallo della forma $[0,\delta]$ con $0 \leq \delta < 1$. Infatti, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\delta]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\delta]} x^n = \lim_{n\to\infty} \delta^n = 0.$$

Evidentemente, la convergenza uniforme di una successione di funzioni implica quella puntuale. L'esempio precedente mostra che il viceversa non vale.

17. Serie di funzioni. Criterio di Weierstrass

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ oppure di $\mathbb{C}$. Più in generale potremmo supporre che $A = \Lambda$ sia un insieme di parametri arbitrario. Sia poi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi su A, ovvero $f_n : A \to \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Introduciamo la successione delle somme parziali $s_n = f_1 + \ldots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ovviamente, $s_n : A \to \mathbb{R}$ sono ancora funzioni.

Definizione 17.1 (Convergenza puntuale e uniforme di serie di funzioni). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali definite su un insieme A. Diciamo che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

converge puntualmente su A se per ogni $x \in A$ converge la successione $\big(s_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ delle somme parziali.

Diciamo che la serie di funzioni *converge uniformemente su* A se converge uniformemente su A la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 17.2 (Criterio di Weierstrass). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni a valori reali o complessi su un insieme A. Se esiste una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\sup_{x\in A} |f_n(x)| \le a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$

allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su A.

Dim. La successione delle somme parziali relative alla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Quindi, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \ge \bar{n}$ con $m \ge n$ si ha $\sum_{k=n}^{m} a_k \le \varepsilon$. Dalle ipotesi del teorema segue che

$$\sup_{x\in A} \Big| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \Big| \le \sup_{x\in A} \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \le \sum_{k=n}^{m} \sup_{x\in A} |f_k(x)| \le \sum_{k=n}^{m} a_k \le \varepsilon.$$

Dunque, la successione delle somme parziali relativa alla successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy uniformemente su A. Dal Teorema 16.2 segue che la serie di funzioni converge uniformemente su A.

□

Talvolta si dice che una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge totalmente su* A se converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x)| < \infty.$$

Il teorema precedente dice allora che la convergenza totale su A implica la convergenza uniforme su A. Il viceversa, tuttavia, non vale. Vedremo dei controesempi in seguito.

Esempio 17.3. Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco complesso unitario e consideriamo la serie di funzioni su A

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = s(z).$$

Sappiamo che la serie converge puntualmente su A. Vediamo se c'è convergenza uniforme su A. Le somme parziali sono

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

e la differenza con la somma limite è

$$|s_n(z) - s(z)| = \Big|\frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}\Big| = \Big|\frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}\Big| = \Big|\frac{z^{n+1}}{1-z}\Big|,$$

e quindi

$$\sup_{z\in A}\Big|\frac{z^{n+1}}{1-z}\Big| = \infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

e dunque non c'è convergenza uniforme su A. Tuttavia, c'è convergenza uniforme su ogni insieme della forma $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \delta\}$ con $0 \le \delta < 1$. Infatti si ha

$$\sup_{z\in A_\delta} |z|^n \le \delta^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n < \infty.$$

L'affermazione segue dal Criterio di Weierstrass.

18. Criteri di Abel–Dirichlet

Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

Lemma 18.1 (Somma per parti II). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse, supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga e poniamo $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. Per $1 \le M \le N$ vale la formula di somma per parti

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = A_M b_M - A_{N+1} b_N - \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_{n-1} - b_n).$$

Dim. La verifica è elementare:

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} (A_n - A_{n+1}) b_n \\ &= \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M}^{N} A_{n+1} b_n = \sum_{n=M}^{N} A_n b_n - \sum_{n=M+1}^{N+1} A_n b_{n-1} \\ &= A_M b_M - A_{N+1} b_N + \sum_{n=M+1}^{N} A_n (b_n - b_{n-1}).\end{aligned}$$

□

Teorema 18.2 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa tale che converga la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ o di $\mathbb{C}$ che verifica:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x\in A}|f_n(x)|\leq C<\infty \quad \text{e} \quad \sup_{x\in A}\sum_{n=1}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|<\infty.$$

Allora la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ converge uniformemente su A.

Dim. Poniamo $A_n=\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ cosicchè $\lim_{n\to\infty} A_n=0$. Dati $n,p\in\mathbb{N}$, usando la formula di somma per parti si trova

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x)=A_n f_{n-1}(x)-A_{n+p+1}f_{n+p}(x)+\sum_{k=n}^{n+p} A_k(f_k(x)-f_{k-1}(x)).$$

Fissato $\varepsilon>0$ esiste $\bar{n}\in\mathbb{N}$ tale che per $n\geq\bar{n}$ si ha $|A_n|\leq\varepsilon$ e quindi per $p\in\mathbb{N}$ si ha

$$\sup_{x\in A}\Big|\sum_{k=n}^{n+p} a_k f_k(x)\Big|\leq\varepsilon\Big(2C+\sup_{x\in A}\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)-f_{k-1}(x)|\Big).$$

Poichè la successione delle somme parziali della serie in esame è uniformemente di Cauchy su A, la serie converge uniformemente su A. □

Possiamo ora enunciare i criteri di Abel sulla convergenza uniforme.

Teorema 18.3 (Criterio di Abel I). Se la serie di potenze complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge nel punto $z_0\in\mathbb{C}$, allora converge uniformemente sul segmento $[0,z_0]=\{tz_0\in\mathbb{C}:0\leq t\leq 1\}$.

Dim. Per $x\in[0,1]$ consideriamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n f_n(x), \qquad f_n(x)=x^n.$$

La successione di funzioni $f_n(x)=x^n$ è uniformemente limitata su $[0,1]$ e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty}|f_{n+1}(x)-f_n(x)|=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\begin{cases}1 & \text{se } x\in[0,1)\\ 0 & \text{se } x=1.\end{cases}$$

La convergenza uniforme segue dal Teorema 18.2. □

Fissati $\vartheta\in[0,\pi/2)$ e $r_0>0$ definiamo il cono troncato con vertice nel punto 1

$$C(\vartheta,1,r_0)=\{z=1+re^{i\varphi}\in\mathbb{C}:\varphi\in[\pi-\vartheta,\pi+\vartheta],\,0\leq r\leq r_0\}.$$

Teorema 18.4 (Criterio di Abel II). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga. Per ogni $\vartheta \in [0,\pi/2)$ esiste $r_0 > 0$ tale che la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente su $C(\vartheta,1,r_0)$.

Dim. Fissiamo $r_0 > 0$ sufficientemente piccolo in modo tale che $C(\vartheta,1,r_0)\cap\{|z| = 1\} = \{1\}$. Mostriamo che la successione di funzioni $f_n(z) = z^n$ verifica le condizioni del Teorema 18.2. In primo luogo $|f_n(z)| \le 1$ su $C(\vartheta,1,r_0) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$. Inoltre, per $z = 1 + r\mathrm{e}^{i\varphi} \in C(\vartheta,1,r_0)$ si ha

$$|z^{n+1} - z^n| = |z|^n|z-1| = r|1 + r\mathrm{e}^{i\varphi}|^n,$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^{n+1} - z^n| = r\frac{1}{1-|1+r\mathrm{e}^{i\varphi}|} = r\frac{1+|1+r\mathrm{e}^{i\varphi}|}{1-|1+r\mathrm{e}^{i\varphi}|^2} = \frac{1+|1+r\mathrm{e}^{i\varphi}|}{-r-2\cos\varphi}.$$

Se $\varphi \in [\pi-\vartheta, \pi+\vartheta]$ allora $-2\cos\varphi \ge 2\cos\vartheta > 0$, e scegliendo $r_0 < 2\cos\vartheta$ si trova

$$\sup_{z\in C(\vartheta,1,r_0)} \sum_{n=0}^{\infty} |z^{n+1} - z^n| < \infty.$$

□

19. Serie di potenze

In questa sezione studiamo le serie di potenze in campo complesso.

Definizione 19.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa. Una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

si dice *serie di potenze complessa* (centrata in 0).

Teorema 19.2 (Criterio di Cauchy–Hadamard). Data la serie di potenze complessa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, sia $R \in [0,\infty]$ il numero reale (eventualmente ∞) definito dalla relazione

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Allora:

i) La serie di potenze converge assolutamente in ogni punto $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.
ii) La serie di potenze converge uniformemente su ogni insieme $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le \delta\}$ con $\delta < R$.
iii) La serie non converge nei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| > R$.

Il numero R si dice *raggio di convergenza* della serie di potenze.

DIM. Studiamo la convergenza assoluta della serie con il Criterio della radice. Sia

$$L(z) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z|^n} = \frac{|z|}{R}.$$

Se $|z| < R$ allora $L(z) < 1$ e la serie converge assolutamente nel punto z. Se $|z| > R$ allora $L(z) > 1$ e la serie non converge assolutamente. Il termine generale non è infinitesimo, e dunque in effetti la serie non converge nemmeno semplicemente.

Sia ora $0 \leq \delta < R$. Allora si ha:

$$\sup_{z\in A_\delta} |a_n z^n| = |a_n|\delta^n, \quad \text{e inoltre} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\delta^n < \infty.$$

Che l'ultima serie converga, si vede di nuovo col Crierio della radice, usando il fatto che $\delta < R$.

La serie di potenze converge dunque totalmente su A_δ e per il Criterio di Weierstrass converge anche uniformemente su A_δ.

□

Sulla frontiera del cerchio di convergenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, ovvero nei punti in cui $|z| = R$ la serie di potenze può sia convergere che non convergere.

20. Funzioni exp, cos e sin in campo complesso

Definiamo le tre funzioni $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tramite le seguenti serie di potenze complesse:

$$\begin{aligned}
\exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\\
\cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\\
\sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Scriveremo anche $\exp(z) = \mathrm{e}^z$. È facile verificare che il raggio di convergenza delle tre serie è $R = \infty$. Proviamo ad esempio che la prima serie converge assolutamente in ogni punto $z \in \mathbb{C}$ con il criterio del rapporto. È sufficiente considerare il caso $z \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1,$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Quando $z = x \in \mathbb{R}$ la definizione di $\exp(x)$ coincide con quella data nel Capitolo 4, Sezione 8. 8.1.

TEOREMA 20.1. La funzione $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verifica le seguenti proprietà:

1) $\exp(z + \zeta) = \exp(z)\exp(\zeta)$ per ogni $z, \zeta \in \mathbb{C}$;
2) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
3) $|\exp(ix)| = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
4) $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (formule di Eulero).

DIM. 1) Dati $z, \bar\zeta \in \mathbb{C}$, per il Teorema di Mertens si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^\zeta &= \Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^\infty \frac{\zeta^k}{k!}\Big) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}\frac{\zeta^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \zeta^{n-k} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(z+\zeta)^n}{n!} = \mathrm{e}^{z+\zeta}.
\end{aligned}$$

Abbiamo usato la formula per il binomio di Newton.

2) Questa affermazione segue direttamente dalla definizione:

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\bar z^n}{n!} = \exp(\bar z).$$

3) Sia ora $x \in \mathbb{R}$. Usando le proprietà 2) e 1) si ottiene la tesi:

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix-ix) = \exp(0) = 1.$$

4) Sia di nuovo $x \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{i^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^\infty \frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i\sin(x).
\end{aligned}$$

$\square$

OSSERVAZIONE 20.2. Dalle affermazioni 3) e 4) risulta analiticamente provata l'identità trigonometrica fondamentale $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 20.1. Si considerino la striscia $S = \big\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\big\}$ e l'insieme $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \big\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ e } \mathrm{Re}(z) \le 0\big\}$.

1) Verificare che la funzione esponenziale $\exp : S \to \mathbb{C}^*$ è iniettiva.

2) La funzione argomento $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi)$ è definita in questo modo: $\arg(z)$ =angolo con segno formato da z (unito a 0) con il semiasse positivo delle parti reali. La funzione logaritmo complesso $\log : \mathbb{C}^* \to S$ è quindi definita nel seguente modo:

$$\log z = \log|z| + i\arg(z), \quad z \in \mathbb{C}^*.$$

Verificare che $\exp : S \to \mathbb{C}^*$ è anche suriettiva e che log è la sua funzione inversa.

ESERCIZIO 20.2. Dedurre le formule di addizione per seno e coseno per $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),
\end{aligned}$$

a partire dall'identità funzionale per l'esponenziale $\exp(z+\zeta) = \exp(z)\exp(\zeta)$ con $z, \zeta \in \mathbb{C}$ e dalle identità di Eulero

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}.$$

CHAPTER 5

Spazi metrici

1. Definizioni ed esempi

Richiamiamo dal Capitolo 2, Sezione 4, la definizione di *spazio metrico*.

DEFINIZIONE 1.1 (Spazio metrico). Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Conosciamo già i seguenti esempi di spazi metrici:

1) $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, è uno spazio metrico.
2) $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$, $x, y \in \mathbb{R}$, è uno spazio
3) $\mathbb{C}$ con la funzione $d(z, w) = |z - w|$, $z, w \in \mathbb{C}$, è uno spazio metrico.
4) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la funzione distanza
$$d(x, y) = |x - y| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$
è uno spazio metrico.

Ecco altri esempi di spazi metrici.

ESEMPIO 1.2 (Spazio metrico discreto). Sia X un insieme e definiamo la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$
È facile verificare che d verifica gli assiomi della funzione distanza.

ESEMPIO 1.3 (Distanza centralista). Su $\mathbb{R}^2$ definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ nel seguente modo
$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ sono collineari con } 0, \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Lasciamo come esercizio il compito di provare che $(\mathbb{R}^2, d)$ è uno spazio metrico.

ESEMPIO 1.4. I numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ con la distanza
$$d(m, n) = \Big|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\Big|, \quad m, n \in \mathbb{N},$$
sono uno spazio metrico.

Osservazione 1.5 (Spazio metrico restrizione). Sia X uno spazio metrico con distanza $d : X \times X \to [0, \infty)$. Fissato un punto $x \in X$ ed un raggio $r \geq 0$, l'insieme

$$B_r(x) = B(x, r) = B_X(x, r) = \big\{y \in X : d(x, y) < r\big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x e raggio r.

Dato un sottoinsieme $Y \subset X$, possiamo restringere la funzione distanza d ad Y: $d : Y \times Y \to [0, \infty)$. Allora anche (Y, d) è uno spazio metrico. La palle nella distanza d di Y sono fatte nel seguente modo:

$$B_Y(y, r) = B_X(y, r) \cap Y,$$

per ogni $y \in Y$ ed $r > 0$.

2. Spazi metrici indotti da spazi normati

Spazi metrici possono essere generati a partire dagli spazi normati.

Definizione 2.1 (Spazio normato). Uno spazio normato (reale) è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ dove V è uno spazio vettoriale reale e $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *norma*, che per ogni $x, y \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica le seguenti proprietà:

1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (omogeneità);
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subadittività o disuguaglianza triangolare).

Chiaramente, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^n$ sono spazi normati con le norme naturali. Una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale V induce canonicamente una distanza d su V definita nel seguente modo:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

La disuguaglianza triangolare per la distanza d deriva dalla subadittività della norma $\|\cdot\|$. Infatti, per ogni $x, y, z \in V$ si ha:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Esempio 2.2 (Lo spazio $\ell^2(\mathbb{R})$). Sia $\ell^2(\mathbb{R})$ l'insieme delle successioni reali $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di quadrato sommabile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Indichiamo con $\mathrm{x} \in \ell^2(\mathbb{R})$ un generico elemento di $\ell^2(\mathbb{R})$. La funzione $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{R})}$: $\ell^2(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ così definita

$$\|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{1/2}$$

è una norma. La proprietà di subadittività si prova come in $\mathbb{R}^n$. Definiamo su $\ell^2(\mathbb{R})$ il prodotto scalare

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad \mathrm{x} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \mathrm{y} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

La disuguaglianza $2|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$ prova che la serie converge assolutamente. In particolare, avremo $\|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_{\ell^2(\mathbb{R})}^{1/2}$. Esattamente lo stesso argomento della

Proposizione 5 nella Sezione 5 del Capitolo 2 prova che vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_{\ell^2(\mathbb{R})}| \leq \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})}\|\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})},$$

e da qui segue che $\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \leq \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} + \|\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})}$.

In conclusione, $\ell^2(\mathbb{R})$ con la funzione distanza

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)^2\Big)^{1/2}$$

è uno spazio metrico.

3. Successioni in uno spazio metrico

Una successione in uno spazio metrico (X, d) è una funzione $x : \mathbb{N} \to X$. Si usa la notazione $x_n = x(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione si indica con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definizione 3.1. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un punto $x \in X$ nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia $d(x_n, x) \leq \varepsilon$. In questo caso si scrive

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{in } (X, d),$$

e si dice che la successione è *convergente* ad x ovvero che x è il limite della successione.

Se il limite di una successione esiste allora è unico. Se infatti $x, y \in X$ sono entrambi limiti di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora risulta

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0, \quad n \to \infty,$$

e quindi $d(x, y) = 0$ ovvero $x = y$.

Esempio 3.2 (Successioni in $\mathbb{R}^m$). Sia $X = \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, con la distanza Euclidea e consideriamo una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^m$. Ogni punto $x_n \in \mathbb{R}^m$ ha m coordinate, $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$ con $x_n^1, \dots, x_n^m \in \mathbb{R}$. Sia infine $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ un punto fissato. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(A) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}^m$;
(B) $\lim_{n\to\infty} x_n^i = x^i$ in $\mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

4. Limiti di funzione

4.1. Limiti in spazi metrici.

Definizione 4.1 (Punto di accumulazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un punto $x_0 \in X$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset X$ se per ogni $r > 0$ si ha

$$A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Definizione 4.2 (Limite). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di A, e sia $f : A \to Y$ una funzione. Un punto $y_0 \in Y$ si dice *limite* di f per x che tende a x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si abbia

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0,$$

dove la notazione per le distanze di riferimento è omessa.

Se il limite esiste allora è unico. Per avere l'unicità occorre definire il limite per i punti di accumulazione.

Teorema 4.3 (Caratterizzazione sequenziale del limite). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di A, $y_0 \in Y$ ed $f : A \to Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$;

B) Per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A \setminus \{x_0\}$ vale l'implicazione:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0 \text{ in } Y.$$

Dim. A)⇒B). Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale:

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Dalla convergenza della successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a x_0 segue l'esistenza di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia $d_X(x_n, x_0) < \delta$. Quindi per tali $n \geq \bar{n}$ si ottiene $d_Y(f(x_n), y_0) < \varepsilon$.

B)⇒A). Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ ci sia un punto $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ tale che $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ ma $d_Y(f(x_n), y_0) \geq \varepsilon$. La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad x_0 in (X, d_X) ma la successione $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ non converge ad $f(x_0)$ in (Y, d_Y). Questo contraddice l'affermazione B). □

Supponiamo ora che lo spazio metrico di arrivo sia $Y = \mathbb{R}$ con la distanza standard.

Teorema 4.4 (Operazioni con i limiti). Sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione dell'insieme $A \subset X$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che esistano (finiti) i limiti

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \ \in \mathbb{R},$$
$$M = \lim_{x \to x_0} g(x) \ \in \mathbb{R}.$$

Allora si ha:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L + M$;

2) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM$.

Inoltre, se $M \neq 0$ allora si ha anche:

3) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Dim. La dimostrazione segue dal Teorema 1.7 sulle operazioni con i limiti di successioni in $\mathbb{R}$ e dal Teorema 4.3.

□

4.2. Funzioni di variabile reale a valori reali. Siano ora $X = \mathbb{R}$ ed $Y = \mathbb{R}$ con la distanza standard. La definizione di limite si riformula nel seguente modo.

Definizione 4.5 (Limite). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in A, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esempio 4.6. La funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A = (0, \infty)$, definita da

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0,$$

non ha limite per $x \to 0$.

Infatti si consideri la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A tale che $1/x_n = n\pi$, con $n \geq 1$. Chiaramente $x_n \to 0$ per $n \to \infty$ ed inoltre $f(x_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

D'altra parte, la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A tale che $1/y_n = \pi/2+2n\pi$ pure converge a 0 per $n \to \infty$ ma $f(y_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Non può dunque essere verificata la caratterizzazione sequenziale di limite.

Esercizio 4.1. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{1+2x} = 1.$$

Soluzione. Fissato $\varepsilon > 0$, cerchiamo $\delta > 0$ tale che valga la seguente implicazione:

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x+1}{1+2x} - 1\right| < \varepsilon. \tag{4.19}$$

Studiamo la seguente disequazione:

$$\left|\frac{x+1}{1+2x} - 1\right| = \left|\frac{x+1-1-2x}{1+2x}\right| = \left|\frac{x}{1+2x}\right| < \varepsilon. \tag{4.20}$$

Supponendo, come è lecito in questo caso, che $1+2x \neq 0$, la disequazione è equivalente a

$$x^2 < \varepsilon^2(1 + 4x^2 + 4x) \quad \Leftrightarrow \quad (1 - 4\varepsilon^2)x^2 - 4\varepsilon^2 x - \varepsilon^2 < 0.$$

Le radici del polinomio in x di grado 2 associato alla disequazione sono

$$x_\pm = \frac{2\varepsilon^2 \pm \varepsilon}{1 - 4\varepsilon^2}.$$

Qui e nel seguito possiamo supporre che $0 < \varepsilon < 1/2$. La disequazione precedente è verificata per $x_- < x < x_+$ e dunque la disequazione (4.20) è equivalente a

$$\left|\frac{x}{1+2x}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\varepsilon^2 - \varepsilon}{1-4\varepsilon^2} < x < \frac{2\varepsilon^2 + \varepsilon}{1-4\varepsilon^2}$$

Con la scelta di δ

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon - 2\varepsilon^2}{1-4\varepsilon^2}, \frac{2\varepsilon^2 + \varepsilon}{1-4\varepsilon^2}\right\} = \frac{\varepsilon - 2\varepsilon^2}{1-4\varepsilon^2}$$

l'implicazione (4.19) è verificata.

Usando il fatto che $\mathbb{R}$ è totalmente ordinato, è possibile anche introdurre le nozioni di limite destro e limite sinistro. Diciamo che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione destro di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se $A \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq \emptyset$ per ogni $\delta > 0$.

Analogamente, diciamo che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione sinistro di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se $A \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq \emptyset$ per ogni $\delta > 0$.

Definizione 4.7 (Limiti destro e sinistro). Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione destro e sinistro di A ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

1) Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+ \in \mathbb{R}$$
se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L^+| < \varepsilon.$$
Chiamiamo L^+ il *limite destro* di f in x_0.

2) Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^- \in \mathbb{R}$$
se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L^-| < \varepsilon.$$
Chiamiamo L^- il *limite sinistro* di f in x_0.

Chiaramente il limite $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ esiste (finito) se e solo se esistono (finiti) e sono uguali i limiti destro e sinistro $L^+ = L^- = L$.

Quando le funzioni assumono valori in $\mathbb{R}$ è possibile definire la nozione di limite (più o meno) infinito per $x \to x_0$.

Definizione 4.8 (Limite infinito). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$
se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in A, \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

Esercizio 4.2. Usando la definizione verificare che
$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)^4} = \infty.$$

Soluzione. Fissato $M > 0$, cerchiamo $\delta > 0$ tale che valga la seguente implicazione:
$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{(1-x)^4} > M. \tag{4.21}$$
Studiamo la seguente disequazione:
$$\frac{x}{(1-x)^4} > M \quad \Leftrightarrow \quad x > M(x-1)^4. \tag{4.22}$$
Non è possibile risolvere tale disequazione in modo esatto. Riduciamo la sua complessità nel seguente modo. Supponiamo che $0 < \delta \leq 1/2$. In questo caso si ha:
$$|x - 1| < \delta \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

Dunque, usando l'informazione $x > 1/2$ si ottiene

$$\frac{x}{(x-1)^4} > \frac{1}{2(x-1)^4}.$$

Risolviamo allora la disequazione semplificata

$$\frac{1}{2(x-1)^4} > M. \tag{4.23}$$

Chiaramente, per la proprietà transitiva, se x verifica la disequazione (4.23) allora verifica anche la disequazione (4.22). D'altra parte, si ha

$$\frac{1}{2(x-1)^4} > M \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 2M(x-1)^4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^4 < \frac{1}{2M} \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| < \frac{1}{\sqrt[4]{2M}}$$

Se ora scegliamo

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2M}}\right\}$$

tutte le deduzioni fatte sono valide e si ottiene l'implicazione

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{(x-1)^4} > M.$$

Definiamo ora la nozione di limite finito quando $x \to \infty$ ("x tende a più infinito"). Diremo che ∞ è un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se $A \cap (M, \infty) \neq \emptyset$ per ogni $M \in \mathbb{R}$.

Definizione 4.9. Sia ∞ un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ per $x \to \infty$ e scriviamo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$x \in A \cap (M, \infty) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esercizio 4.3. Nelle Definizioni 4.5, 4.8 e 4.9 abbiamo formalizzato la nozione di limite in tre diverse situazioni. Lasciamo al lettore il compito di definire il limite di funzione nei seguenti casi:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$;
2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$;
3) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$;
4) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.

Esempio 4.10 (Esempi fondamentali). I seguenti limiti sono basilari.
Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Allora:

1) $$\lim_{x\to 0} |x|^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ \infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che quando $\alpha = 0$ NON si ha forma indeterminata $[0^0]$, perchè $|x|^0 = 1$ per ogni $x \neq 0$, e dunque il limite per $x \to 0$ è 1. Nella forma indeterminata $[0^0]$ si ha una base che tende a 0 ed un esponente che tende a 0 senza essere già 0.

2) $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$

Sia ora $a > 0$ una base fissata. Allora:

3) $\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$

Osserviamo che quando $a = 1$ NON si ha forma indeterminata $[1^\infty]$, perchè $1^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e dunque il limite per $x \to \infty$ è 1. Nella forma indeterminata $[1^\infty]$ si ha una base che tende ad 1 senza essere già 1 ed un esponente che tende a ∞.

Se, infine, si ha $a > 1$ allora:
4) $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ e $\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$.

Omettiamo le dimostrazioni (elementari) di tali limiti fondamentali.

Osservazione 4.11.
(1) Nel caso $X = \mathbb{R}$, il Teorema 4.4 vale anche con $\pm\infty$ al posto di x_0.
(2) Il punto 1) del Teorema 4.4 vale anche con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$, con la regola $\pm\infty + M = \pm\infty$.
(3) Il punto 2) del Teorema 4.4 vale anche con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$ tale che $M \neq 0$, con la regola:

$$\pm\infty \cdot M = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } M > 0, \\ \mp\infty & \text{se } M < 0. \end{cases}$$

(4) Se f è una funzione limitata e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

(5) Per i limiti di funzione valgono teoremi del confronto analoghi a quelli per i limiti di successioni.

Esercizio 4.4. Usando le operazioni elementari sui limiti e/o argomenti di confronto calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2x} + |\sin x|^{x^2}}{\left(2^{x\log x} + \mathrm{e}^x\right)^2}.$$

Soluzione. Abbiamo una forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$. Dobbiamo individuare e fattorizzare i contributi dominanti a numeratore e denominatore.

Il numeratore è

$$\begin{aligned} N(x) &= x^{2x} + |\sin x|^{x^2} \\ &= x^{2x}\Big(1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}\Big). \end{aligned}$$

Dunque, il contributo dominante al numeratore è x^{2x}, infatti

$$\lim_{x\to\infty} \Big(1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}\Big) = 1. \tag{4.24}$$

Passiamo al denominatore. Fra $2^{x\log x}$ e e^x il termine dominante è $2^{x\log x} = (2^{\log x})^x$ in quanto $2^{\log x} > \mathrm{e}$ per tutte le x sufficientemente grandi. Nel seguito ci sarà utile anche la seguente identità

$$2^{\log x} = 2^{\log\left(2^{\log_2 x}\right)} = 2^{(\log_2 x)(\log 2)} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log 2} = x^{\log 2}.$$

Dunque, il denominatore è

$$D(x) = \left(2^{x\log x} + \mathrm{e}^x\right)^2 = \left((x^{\log 2})^x + \mathrm{e}^x\right)^2 = \left(x^{x\log 2} + \mathrm{e}^x\right)^2 = x^{2x\log 2}\left(1 + \left(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\right)^x\right)^2.$$

Per tutte le x sufficientemente grandi si ha

$$\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}} < \frac{1}{2},$$

in quanto la funzione a sinistra è infinitesima, e quindi

$$\left(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\right)^x < \frac{1}{2^x},$$

e siccome

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = 0,$$

dal Teorema del Confronto segue che

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\right)^x = 0. \tag{4.25}$$

Formiamo il quoziente

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^{2x}}{x^{2x\log 2}} \frac{1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}}{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\right)^x\right)^2}.$$

Essendo $1 - \log 2 > 0$, si ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2x}}{x^{2x\log 2}} = \lim_{x\to\infty} x^{2x(1-\log 2)} = \infty.$$

Quindi, tenuto conto di (4.24) ed (4.25), usando le regole sulle operazione coi limiti deduciamo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N(x)}{D(x)} = \infty.$$

5. Funzioni continue fra spazi metrici

Definizione 5.1 (Funzione continua). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $x_0 \in X$. Una funzione $f : X \to Y$ si dice continua nel punto $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Equivalentemente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

La funzione si dice *continua su* X se è continua in tutti i punti di X.

Osservazione 5.2. Da un confronto delle definizioni, segue immediatamente la seguente affermazione. Sono equivalenti:

A) f è continua in x_0;
B) Esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Segue allora che, negli spazi metrici, la continuità è equivalente alla continuità sequenziale, nel senso del seguente teorema.

Teorema 5.3 (Caratterizzazione sequenziale della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $x_0 \in X$. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) f è continua in x_0;
B) f è sequenzialmente continua in x_0. Ovvero, per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X vale l'implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \text{ in } Y.$$

Dim. La dimostrazione è identica a quella per la caratterizzazione sequenziale del limite. □

Osservazione 5.4. Il punto B) del Teorema 5.3 può essere riassunto nel seguente modo:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big),$$

il limite "passa dentro l'argomento" di una funzione continua.

Per le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ a valori reali si possono definire in modo naturale le operazioni di somma, moltiplicazione e reciproco. Queste funzioni ereditano la continuità delle funzioni da cui sono composte.

Teorema 5.5 (Operazioni sulle funzioni continue). Sia (X, d_X) uno spazio metrico e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue in un punto $x_0 \in X$. Allora:

i) La funzione somma $f + g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
ii) La funzione prodotto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
iii) Se $f \neq 0$ su X, allora la funzione reciproca $1/f : X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

Dim. La dimostrazione segue dal Teorema 5.3 sulla caratterizzazione sequenziale della continuità e dal Teorema 1.7 sulle operazioni elementari con le successioni numeriche. □

Esercizio 5.1. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard.

1) Provare che una *qualsiasi* funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è continua.
2) Sia $f : \mathbb{R} \to X$ una funzione continua. Provare che f è costante.

Soluzione. 1) Controlliamo la continuità di $f : X \to \mathbb{R}$ in un generico punto $x_0 \in X$. Fissato $\varepsilon > 0$ dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Se $0 < \delta < 1$, dalla definizione di metrica discreta segue che $B_X(x_0, \delta) = \{x_0\}$ e certamente $f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

2) Fissiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Siccome f è continua, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B(x_0, \delta)) \subset B_X(f(x_0), \varepsilon) = \{f(x_0)\}$ se $0 < \varepsilon < 1$. In altri termini, si ha $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (Potremmo dire: f è localmente costante).

Vogliamo provare che $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sia $R \in (0, \infty]$ il seguente estremo superiore:

$$R = \sup\big\{\delta > 0 \, : \, f(x) = f(x_0) \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big\}.$$

Se $R = \infty$ allora la tesi è provata. Supponiamo per assurdo che $0 < R < \infty$ e si consideri la successione

$$x_n = x_0 + R - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Siccome $x_n < x_0 + R$ si ha $f(x_n) = f(x_0)$, almeno definitivamente. D'altra parte, essendo f continua si ha

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = f(x_0 + R).$$

In modo analogo si prova che $f(x_0 - R) = f(x_0)$. Ripetendo l'argomento iniziale di continuità si deduce che esiste $\bar{\delta} > 0$ tale che $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - R - \bar{\delta}, x_0 + R + \bar{\delta})$. Questo contraddice la definizione di R. Quindi deve essere $R = \infty$.

5.1. Funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. La funzione identità $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ (la definizione $\varepsilon - \delta$ è verificata con $\delta = \varepsilon$). Dal Teorema 5.5 sulle operazioni con i limiti segue choe:

i) Ogni polinomio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continuo su tutto $\mathbb{R}$.
ii) Siano $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomi e sia $A = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Allora la funzione razionale $f : A \to \mathbb{R}$, $f = p/q$, è continua su A.

Ora proviamo che le serie di potenze reali definiscono funzioni continue.

Teorema 5.6. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R),$$

dove $0 < R \leq \infty$ è il raggio di convergenza della serie. Allora la funzione $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ è continua sull'intervallo $(-R, R)$.

Dim. La dimostrazione naturale e più semplice di questo teorema usa la nozione di convergenza uniforme. Qui ne diamo una dimostrazione diretta.

Fissiamo un punto $x \in (-R, R)$ e scegliamo un numero $|x| < \delta < R$. Per $h \in \mathbb{R}$ opportunamente piccolo (basta che sia $x + h \in (-R, R)$) avremo

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k h^{n-k} \\ &= f(x) + h \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k} x^k h^{n-1-k}, \end{aligned}$$

e dunque, per $|h| < \delta - |x|$, si ottiene

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k} |x|^k |h|^{n-1-k} \\ &\leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|(|x| + |h|)^{n-1} \leq |h| \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|\delta^{n-1}. \end{aligned}$$

Se proviamo che l'ultima serie converge (quindi ad un valore indipendente da h), deduciamo che

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x),$$

e questo prova il teorema. Usiamo il Criterio della Radice:

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n|a_n|\delta^{n-1}} = \frac{\delta}{R} < 1,$$

per la definizione di raggio di convergenza e per la scelta di δ, e quindi la serie effettivamente converge. □

Esempio 5.7. Dal Teorema 5.6 deduciamo che le funzioni $\sin x$, $\cos x$ ed e^x sono continue su tutto $\mathbb{R}$.

Dallo stesso teorema si deducono anche altre informazioni interessanti. Ad esempio si ha il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1,$$

avendo usato nell'ultimo passaggio la continuità in $x = 0$ della serie di potenze.

In modo analogo si può calcolare anche il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} = 1,$$

che è la derivata della funzione esponenziale nel punto $x = 0$.

Proveremo prossimamente il seguente teorema.

Teorema 5.8. Siano $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed iniettiva. Allora:

i) f è strettamente monotòna (crescente oppure decrescente);

ii) $f(A) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo;
iii) La funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$ è continua.

DIM. La prova è rinviata. Nella prova di ii) si usa la continuità ma non l'iniettività. □

ESEMPIO 5.9. Dal Teorema 5.8 si deduce la continuità di varie funzioni inverse elementari.

1) La funzione esponenziale $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\exp(x) = e^x$, è strettamente crescente e continua. Inoltre è anche suriettiva (questo segue dal teorema dei valori intermedi per le funzioni continue). La sua funzione inversa è il logaritmo $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, che dunque è continua.

2) La funzione seno $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ è continua e strettamente crescente. Inoltre è anche suriettiva. Dunque, la sua funzione inversa, la funzione arcoseno $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ è continua.

3) In modo analogo, la funzione tangente $\mathrm{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ è continua, strettamente crescente e suriettiva. La sua funzione inversa $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ è dunque continua.

ESERCIZIO 5.2. Sia $\alpha > 0$ un parametro fissato. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^\alpha$ è continua su $\mathbb{R}$. Provare questa affermazione quando $\alpha = 1/2$.

5.2. Funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. Esempi. Sia $\mathbb{R}^2$ munito della distanza Euclidea. Indichiamo i punti del piano con le coordinate $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le funzioni elementari $f(x, y) = x$ e $g(x, y) = y$ sono continue. Segue che i polinomi di due variabili sono continui e che le funzioni razionali $f = p/q$ con $p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polinomi sono continue sull'insieme $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : q(x, y) \neq 0\big\}$.

ESERCIZIO 5.3. Determinare tutti i parametri reali $\alpha, \beta > 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto definita sia continua su $\mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Risoluzione. Osserviamo che la funzione $(x, y) \mapsto |x|^\alpha |y|^\beta$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto prodotto di funzioni continue. Analogamente, la funzione $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ è continua su $\mathbb{R}^2$. Segue che il quoziente f è continua su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Ci si riduce a studiare la continuità nell'origine.

Esaminiamo la continuità nell'orgine con il "test sulle rette". Restringiamo f ad una retta nel piano della forma $y = mx$ per $m \in \mathbb{R}$. Precisamente, consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita per $x \neq 0$

$$\varphi(x) = f(x, mx) = \frac{|x|^{\alpha+\beta} |m|^\beta}{x^2 + m^2 x^2} = |x|^{\alpha+\beta-2} \frac{|m|^\beta}{1 + m^2},$$

e $\varphi(0) = 0$. La successione di punti $(1/n, m/n) \in \mathbb{R}^2$ ottenuta con $x = 1/n$, $n \geq 1$, converge verso l'origine. Inoltre si ha

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(1/n) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha+\beta > 2, \\ \dfrac{|m|^\beta}{1+m^2} & \text{se } \alpha+\beta = 2, \\ \infty & \text{se } \alpha+\beta < 2 \text{ (ed } m \neq 0). \end{cases}$$

Dalla caratterizzazione sequenziale della continuità deduciamo che se $\alpha + \beta \leq 2$ la funzione f non è continua in $(0, 0)$. Il "test sulle rette" fornisce solo questo risultato negativo.

Proveremo che per $\alpha+\beta > 2$ la funzione è continua in $(0, 0)$ usando la definizione $\varepsilon - \delta$ di continuità. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\delta > 0$ tale che

$$d_{\mathbb{R}^2}\big((x, y), (0, 0)\big) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_{\mathbb{R}}(f(x, y), f(0, 0)) < \varepsilon,$$

dove $d_{\mathbb{R}^2}$ e $d_{\mathbb{R}}$ sono le distanze Euclidee nel piano e nella retta. Più esplicitamente, si deve avere l'implicazione

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x, y) < \varepsilon.$$

Partiamo dalla seguente disuguaglianza:

$$\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2} \leq (x^2+y^2)^{\alpha/2+\beta/2-1} = |(x, y)|^{\alpha+\beta-2}.$$

Risolvendo la disequzione $|(x, y)|^{\alpha+\beta-2} < \varepsilon$ si trova

$$\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha+\beta-2}}.$$

Osserviamo che la radice è ben definita in quanto $\alpha + \beta - 2 > 0$. Con la scelta

$$\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha+\beta-2}}$$

l'implicazione desiderata vale.

Il precedente esercizio può essere risolto in modo efficiente anche utilizzando le coordinate polari nel piano.

Esercizio 5.4. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sotto definita è continua nel punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza Euclidea:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Risoluzione. Vedremo che f non è continua in $(0, 0)$. Il "test delle rette" tuttavia non rileva questo fatto. Lungo il fascio di rette $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, la funzione f diventa

$$\varphi(x) = f(x, mx) = \frac{x^3 m}{x^4+m^2x^2} = \frac{xm}{x^2+m^2}.$$

Osserviamo che se $m \neq 0$, la funzione φ è continua in $x = 0$. Lo stesso vale quando $m = 0$, in quanto φ è identicamente nulla, in questo caso. Analogamente, si ha $f(0, y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Proviamo con il "test delle parabole". Consideriamo la restrizione di f ad una parabola della forma $y = mx^2$, $m \in \mathbb{R}$:

$$f(x, mx^2) = \frac{x^4 m}{x^4 + m^2 x^4} = \frac{m}{1+m^2}.$$

La funzione f è costante su ciascuna parabola. In particolare, se $m \neq 0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} f(1/n, m/n^2) = \frac{m}{1+m^2} \neq 0.$$

Per la carattereizzazione sequenziale della continuità, f non è continua in $(0,0)$.

Osservazione 5.10. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dell'Esercizio 5.4 ha seguenti proprietà:

1) Ristretta ad una qualsiasi retta passante per l'origine, la funzione è continua.
2) La funzione $x \mapsto f(x, y)$ è continua in $x \in \mathbb{R}$, per ogni $y \in \mathbb{R}$ fissato;
3) La funzione $y \mapsto f(x, y)$ è continua in $y \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato;
4) La funzione $(x, y) \mapsto f(x, y)$ non è continua nel punto $(0, 0)$.

5.3. Funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$. La continuità delle funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$ si riduce alla continuità delle singole componenti.

Teorema 5.11. Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $f : X \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, una funzione con componenti $f = (f_1, ..., f_m)$, e sia $x_0 \in X$ un punto fissato. Sono equivalenti:

A) f è continua in x_0;
B) Le funzioni coordinate $f_1, ..., f_m : X \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0.

Dim. Il teorema segue dalla caratterizzazione sequenziale della continuità e dall'Esempio 3.2.

□

Esempio 5.12. Il Teorema 5.11 cessa di valere se ad $\mathbb{R}^m$ si sostituisce uno spazio normato di dimensione infinita come $\ell^2(\mathbb{R})$. Si consideri una funzione $f : \mathbb{R} \to \ell^2(\mathbb{R})$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ avremo $f(x) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per qualche successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$. Allora abbiamo le componenti $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definite nel seguente modo $f_n(x) = a_n$, elemento n-esimo della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = f(x)$.

Definiamo ora la funzione $f : \mathbb{R} \to \ell^2(\mathbb{R})$ nel seguente modo. Per $x = 0$ si definisce $f(0) = 0$, dove l'ultimo 0 denota la successione identicamente nulla. Per $x \neq 0$ definiamo $f(x) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove $a_n = 1$ se $n = [1/|x|]$ ed $a_n = 0$ altrimenti.

Esaminiamo la coordinata $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\delta > 0$ tale che $[1/|x|] > n$ per $|x| < \delta$. Quindi $f_n(x) = 0$ per ogni $|x| < \delta$ e dunque ogni f_n è continua nel punto $x = 0$, in quanto costante in un intorno di 0. Tuttavia si ha

$$d_{\ell^2(\mathbb{R})}(f(x), f(0)) = \|f(x) - f(0)\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \|f(x)\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = 1$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x| \leq 1$ e quindi f non è continua in $x = 0$.

6. Topologia di uno spazio metrico

In questa sezione definiamo la topologia $\tau(X)$ di uno spazio metrico (X, d).

Definizione 6.1 (Insiemi aperti. Interno). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme.

i) Un punto $x \in X$ si dice *punto interno di* A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$. L'*interno di* A è l'insieme dei punti interni di A:
$$\mathrm{int}(A) = A^\circ = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\}.$$
Si ha sempre $\mathrm{int}(A) \subset A$.

ii) Un insieme $A \subset X$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$, ovvero se $A = \mathrm{int}(A)$.

Proposizione 6.2. Le palle aperte sono insiemi aperti.

Dim. Consideriamo una palla aperta $B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$, con $x_0 \in X$ ed $r > 0$ e sia $x \in B_r(x_0)$. Possiamo scegliere un numero reale $s > 0$ tale che $s < r - d(x, x_0)$. Per ogni punto $y \in B_s(x)$ segue dalla disuguaglianza triangolare:
$$d(y, x_0) \le d(y, x) + d(x, x_0) \le s + d(x, x_0) < r.$$
Abbiamo dunque provato che $B_s(x) \subset B_r(x_0)$. Tutti i punti di $B_r(x_0)$ sono punti interni. □

Definizione 6.3 (Insieme chiuso. Chiusura). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme.

i) Un punto $x \in X$ si dice *punto di chiusura di* A se per ogni $r > 0$ risulta $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. La chiusura di A è l'insieme dei punti di chiusura di A
$$\overline{A} = \big\{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\big\}.$$
Si ha sempre $A \subset \overline{A}$.

ii) L'insieme A si dice chiuso se contiene tutti i sui punti di chiusura, ovvero se $A = \overline{A}$.

Proposizione 6.4. Un insieme A è aperto se e solo se il suo complementare $C = X \setminus A$ è chiuso.

Dim. Infatti, si hanno le equivalenze:
$$\begin{aligned} A \text{ è aperto} \quad &\Leftrightarrow \quad A = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\} \\ &\Leftrightarrow \quad X \setminus A = \big\{x \in X : \text{non esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\} \\ &\Leftrightarrow \quad X \setminus A = \big\{x \in X : \text{per ogni } r > 0 \text{ si ha } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\ \big\} \\ &\Leftrightarrow \quad C = \overline{C}. \end{aligned}$$
□

L'insieme $\emptyset$ è aperto, in quanto tutti i suoi punti (non ce ne sono) sono interni. Quindi X è chiuso. D'altra parte, X è banalmente aperto e quindi $\emptyset$ è chiuso. Gli insiemi $\emptyset$ ed X sono pertanto contemporaneamente aperti e chiusi.

Esercizio 6.1 (Caratterizzazione sequenziale della chiusura). Siano $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Provare che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

A) $x \in \overline{A}$;

B) Esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

Esercizio 6.2. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) L'interno $\text{int}(A)$ è un insieme aperto, ed è il più grande insieme aperto contenuto in A.
ii) La chiusura $\overline{A}$ è un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

Definizione 6.5 (Frontiera). La *frontiera di* $A \subset X$ è l'insieme

$$\partial A = \big\{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\big\}.$$

Equivalentemente, $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

Si può controllare che $\overline{A} = A \cup \partial A = \text{int}(A) \cup \partial A$ e l'ultima unione è disgiunta. Talvolta si definisce anche l'*esterno di* $A \subset X$ come l'insieme

$$\text{ext}(A) = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset X \setminus A\big\} = \text{int}(X \setminus A).$$

In questo modo, per ogni $A \subset X$ si ha l'unione disgiunta

$$X = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{ext}(A).$$

In questo senso si dice che la famiglia di insiemi $\{\text{int}(A), \partial A, \text{ext}(A)\}$ forma una partizione di X.

Esempio 6.6 (Topologia della retta reale). Sia $X = \mathbb{R}$ munito della distanza standard.

1) Gli intervalli $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty \leq a, b \leq \infty$ sono aperti. Ad esempio, nel caso $-\infty < a < b < \infty$ sia ha

$$(a, b) = B_r(x_0), \quad x_0 = \frac{a+b}{2},\ r = \frac{b-a}{2}.$$

Inoltre si ha $\partial A = \{a, b\}$ in quanto

$$B_r(a) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(a) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0,$$

e analogamente nel punto b. Di conseguenza si ha $\overline{A} = A \cup \partial A = [a, b]$.

2) Dal punto precedente segue che l'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è chiuso (in quanto è la chiusura di un insieme). Alternativamente, è facile verificare che l'insieme

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

è aperto.

3) Gli intervalli della forma $A = [a, b)$ con $-\infty < a < b < \infty$ non sono nè aperti nè chiusi. Infatti si ha

$$\text{int}(A) = (a, b) \neq A \text{ e } \overline{A} = [a, b] \neq A.$$

La stessa cosa vale per intervalli della forma $(a, b]$.

4) Intervalli illimitati della forma $(-\infty, a)$ con $a \leq \infty$ sono aperti. Intervalli illimitati della forma $(-\infty, a]$ con $a < \infty$ sono invece chiusi.

Definizione 6.7 (Topologia di uno spazio metrico). Sia (X, d) uno spazio metrico. La famiglia di insiemi $\tau(X) \subset \mathcal{P}(X)$

$$\tau(X) = \big\{A \subset X : A \text{ è aperto in } X\big\}$$

si dice *topologia* di X.

TEOREMA 6.8. La topologia di uno spazio metrico X verifica le seguenti proprietà:

(A1) $\emptyset, X \in \tau(X)$;

(A2) Se $A_1, \ldots, A_n \in \tau(X)$, $n \in \mathbb{N}$,allora $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \tau(X)$;

(A3) Per ogni famiglia di indici $\mathcal{A}$ risulta

$$A_\alpha \in \tau(X) \text{ per ogni } \alpha \in \mathcal{A} \;\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha \in \tau(X).$$

DIM. Abbiamo già discusso la proprietà (A1). Proviamo (A2). Se $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$ allora esistono $r_1, \ldots, r_n > 0$ tali che $B_{r_i}(x) \subset A_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Posto $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$, si ha allora

$$B_r(x) \subset A_1 \cap \ldots \cap A_n.$$

Anche la verifica di (A3) è elementare. Se infatti $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ allora esiste $\beta \in \mathcal{A}$ tale che $x \in A_\beta$ e quindi esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(x) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha.$$

□

ESEMPIO 6.9. La proprietà (A2) non si estende ad intersezioni *numerabili* di aperti. Sia $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la distanza Euclidea. Gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\} = B_r(0)$$

sono aperti per ogni $r > 0$. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ non è invece aperto, infatti i punti $x \in A$ tali che $|x| = 1$ verificano

$$B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0.$$

Ad esempio, il punto $(1 + r/2)x$ appartiene all'intersezione. In effetti $A = \overline{A}$ è un insieme chiuso.

D'altra parte A è un'intersezione numerabile di aperti:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 + \frac{1}{k}\Big\}.$$

In modo duale, la famiglia dei chiusi di uno spazio metrico verifica le proprietà descritte nel seguente teorema:

TEOREMA 6.10. Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora:

(C1) $\emptyset, X$ sono chiusi;

(C2) Se $C_1, \ldots, C_n$, $n \in \mathbb{N}$, sono insiemi chiusi di X allora $C_1 \cup \ldots \cup C_n$ è un insieme chiuso di X;

(C3) Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di indici. Se C_α è un insieme chiuso di X per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$ allora $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} C_\alpha$ è chiuso in X.

La prova del teorema si ottiene passando ai complementari nel teorema sugli aperti. In generale, l'unione numerabile di chiusi non è un insieme chiuso.

Le proprietà (A1),(A2) e (A3) possono essere utilizzate per definire in modo assiomatico uno spazio topologico. Solo per completezza culturale, ricordiamo la seguente definizione.

Definizione 6.11. Uno spazio topologico è una coppia $(X, \tau(X))$ dove X è un insieme e $\tau(X) \subset \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi (detti aperti) che verifica le proprietà (A1), (A2) e (A3) del Teorema 6.8.

Tutti gli spazi metrici sono dunque spazi topologici. Esistono spazi topologici la cui topologia non è indotta da alcuna metrica.

7. Caratterizzazione topologica della continuità

Teorema 7.1 (Caratterizzazione topologica della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) f è continua da X in Y;
2) $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X per ogni aperto $A \subset Y$;
3) $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso in X per ogni chiuso $C \subset Y$.

Dim. Nella dimostrazione useremo le seguenti relazioni insiemistiche, per una funzione $f : X \to Y$:

i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ per ogni insieme $A \subset X$;
ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ per ogni insieme $B \subset Y$;
iii) $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ per ogni $B \subset Y$.

Proviamo l'implicazione 1)⇒2). Verifichiamo che ogni punto $x_0 \in f^{-1}(A)$ è un punto interno di $f^{-1}(A)$. Siccome A è aperto e $f(x_0) \in A$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$. Per la continuità di f esiste $\delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. In altre parole, si ha $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. Ma allora si conclude che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(f(B_X(x_0, \delta)) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(A).$$

Abbiamo usato i).

Proviamo l'implicazione 2)⇒1). Controlliamo che f è continua in un generico punto $x_0 \in X$. Fissato $\varepsilon > 0$, l'insieme $B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ è aperto e quindi l'antimmagine $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ è aperta. Siccome $x_0 \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)),$$

da cui, passando alle immagini, segue che

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Abbiamo usato ii). La catena di inclusioni provata mostra che se $d_X(x, x_0) < \delta$ allora $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, che è la continuità di f in x_0.

Verifichiamo ad esempio 2)⇒3). Sia $C \subset Y$ chiuso. Allora $A = Y \setminus C$ è aperto e quindi $f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ è aperto. Ovvero, $f^{-1}(C)$ è chiuso. □

È facile ora provare che la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua.

Teorema 7.2. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni continue. Allora la composizione $g \circ f : X \to Z$ è continua.

Dim. Usiamo la caratterizzazione 2) di continuità del teorema precedente. Se $A \subset Z$ è un aperto allora $g^{-1}(A) \subset Y$ è un aperto, e dunque $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \subset X$ è un aperto. $\square$