Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2013-2014

Roberto Monti

Versione del 21 Ottobre 2013

Contents

CHAPTER 1

Cardinalità

1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi. Non diamo una definizione di "insieme". Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato "insieme ambiente", che indicheremo con X. Se un elemento x di X appartiene ad un insieme A scriveremo $x \in A$. Se x non appartiene ad A scriveremo $x \notin A$. Con $A \subset B$ si intende l'inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo $\subset$ viene talvolta indicato con $\subseteq$. Se $A \subset B$ e $B \subset A$ gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali, $A = B$.

L'unione e l'intersezione di due insiemi A e B si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$A \cup B = \big\{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\big\},$$
$$A \cap B = \big\{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\big\}.$$

L'insieme che non contiene alcun elemento, l'*insieme vuoto*, si indica con $\emptyset$. Chiaramente, si ha $\emptyset \subset A$ per ogni insieme A. Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$.

La differenza di insiemi $A \setminus B$ (leggi "A meno B") è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \big\{x \in A : x \notin B\big\}.$$

Talvolta la differenza $A \setminus B$ è indicata con $A - B$.

Il complementare di un insieme A in X è l'insieme $A' = X \setminus A$. Talvolta il complementare è indicato con A^c. Con tale notazione si ha $A \setminus B = A \cap B'$. Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Più in generale, sia Λ una famiglia di indici e siano A_λ insiemi indicizzati da $\lambda \in \Lambda$. Allora l'unione e intersezione della famiglia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sono:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \big\{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\big\},$$
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \big\{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\big\}.$$

Le formule di De Morgan sono

$$\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda, \quad \Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$
\begin{aligned}
X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda,\\
X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda.
\end{aligned}
$$

1.2. Funzioni fra insiemi. Una funzione $f : A \to B$ dall'insieme A all'insieme B è un'applicazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ un elemento $f(x) \in B$. L'insieme A si dice *dominio* e l'insieme B si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \big\{(x, y) : x \in A,\ y \in B\big\}.$$

Con (x, y) si indica la *coppia ordinata* formata da x e y, nell'ordine. Il *grafico* di una funzione $f : A \to B$ è il seguente sottoinsieme di $A \times B$:

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\big\}.$$

Osservazione 1.1. La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da A a B* è una terna ordinata (A, B, G) dove $G \subset A\times B$ è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni $x \in A$ esiste un unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$. L'insieme $G = \mathrm{gr}(f)$ è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione $f : A \to B$ per indicare una funzione.

Definizione 1.2 (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme $C \subset A$, l'insieme

$$
\begin{aligned}
f(C) &= \big\{f(x) \in B : x \in C\big\}\\
&= \big\{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\big\}
\end{aligned}
$$

si dice *immagine* di C rispetto ad f.

Dato in insieme $D \subset B$, l'insieme

$$f^{-1}(D) = \big\{x \in A : f(x) \in D\big\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di D ripetto ad f. Nel libro di G. De Marco, l'antimmagine viene indicata con la notazione $f^{\leftarrow}(D) = f^{-1}(D)$.

Proposizione 1.3. Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano $A_\lambda \subset A$ e $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Allora si ha:

$$
\begin{aligned}
& f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \quad f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda),\\
& f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Dim. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned}
y \in f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ ed esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).
\end{aligned}$$

Nell'equivalenza centrale abbiamo usato il fatto che $\exists x \exists \lambda \ldots \Leftrightarrow \ldots \exists \lambda \exists x$.

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda).
\end{aligned}$$

Proviamo l'inclusione in alto a destra:

$$\begin{aligned}
y \in f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ tale che per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
&\Rightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } y \in f(A_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).
\end{aligned}$$

□

Osservazione 1.4. Si noti che nell'ultimo argomento della dimostrazione precedente si hanno tutte equivalenze tranne che l'implicazione centrale, che è del tipo

$$\exists x \forall \lambda \,:\, A(x,\lambda) \text{ è vera} \;\Rightarrow\; \forall \lambda \exists x \,:\, A(x,\lambda) \text{ è vera},$$

dove $A(x,\lambda)$ è un'affermazione che riguarda x e λ. Tale implicazione non può essere invertita. Infatti, nell'antecendente c'è una x che rende vera l'affermazione per ogni λ. Nella conseguente, invece, per ogni λ c'è una x (che quindi dipende da λ) che rende vera l'affermazione.

Esempio 1.5. Sia $A = \{0,1\}$ un insieme formato da due elementi e sia $B = \{0\}$. L'unica funzione $f : A \to B$ è $f(0) = f(1) = 0$. Detti $A_0 = \{0\}$ e $A_1 = \{1\}$, si ha $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ e quindi $f(A_0 \cap A_1) = \emptyset$, mentre $f(A_0) \cap f(A_1) = \{0\} \neq \emptyset$.

Definizione 1.6. Una funzione $f : A \to B$ si dice:

i) *iniettiva* (1-1) se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$ (equivalentemente se $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$);
ii) *suriettiva* (su) se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;

iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$$f : A \xrightarrow{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva,}$$
$$f : A \xrightarrow{\text{su}} B \quad \text{funzione suriettiva,}$$
$$f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva e suriettiva.}$$

Definizione 1.7 (Funzione inversa e composta). Se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora $f : A \to f(A)$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa* $f^{-1} : f(A) \to A$ ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni tali che $f(A) \subset C$. Allora è ben definita la *funzione composta* $g \circ f : A \to D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$ allora si ha:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \quad \text{funzione identità su } A,$$
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \quad \text{funzione identità su } B.$$

Definizione 1.8. Sia $f : A \to B$ una funzione. Una funzione $g : B \to A$ si dice *inversa sinistra* di f se $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Una funzione $h : B \to A$ si dice *inversa destra* di f se $f \circ h = \mathrm{Id}_B$.

Osservazione 1.9. Se $f : A \to B$ è suriettiva, allora per ogni $y \in B$ la "fibra" $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ è non vuota. Con l'Assioma della Scelta, per ogni $y \in B$ si può selezionare un elemento $x \in f^{-1}(\{y\})$ e definire una funzione $h : B \to A$ ponendo $h(y) = x$. Dunque, si ha $f \circ h(y) = f(h(y)) = y$ per ogni $y \in B$. La funzione h è un'inversa destra di f.

2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

Definizione 2.1. Siano A e B insiemi. Diremo che:

i) $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$;
ii) $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : A \to B$;
iii) $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$ se $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ ma non esiste alcuna funzione suriettiva $f : A \to B$.

Se $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ diremo che gli insiemi A e B sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile.

Teorema 2.2 (Tricotomia dei cardinali). Vale sempre una delle seguenti tre possibilità: $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(B) < \mathrm{Card}(A)$.

La dimostrazione di questo teorema richiede l'Assioma della Scelta ed è omessa. Proveremo invece che l'affermazione $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ equivale all'esistenza di una funzione iniettiva $f : A \to B$ e di una funzione iniettiva $g : B \to A$.

Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme A è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A:

$$\mathcal{P}(A) = \big\{E : E \subset A\big\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ contiene sempre l'elemento $\emptyset$.

Teorema 2.3 (Cantor-Schröder-Bernstein). Siano A e B due insiemi, e siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$.

Dim. Premettiamo un argomento preparatorio. Consideriamo una funzione $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ che preserva le inclusioni:

$$E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F). \tag{2.2}$$

Affermiamo che esiste $F \in \mathcal{P}(A)$ tale che $F = T(F)$ (punto fisso).

Si consideri la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \big\{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\big\}$. È certamente $\mathcal{A} \neq \emptyset$ in quanto $\emptyset \in \mathcal{A}$. Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che $T(F) = F$. Infatti, usando le proprietà (1.1) e (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\Big(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\Big) = T(F).$$

D'altra parte, applicando T all'inclusione $F \subset T(F)$ si ottiene $T(F) \subset T(T(F))$ e quindi $T(F) \in \mathcal{A}$, da cui segue l'inclusione opposta $T(F) \subset F$. La conclusione è che $T(F) = F$.

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che T preserva le inclusioni:

$$\begin{aligned} E \subset F \quad &\Rightarrow \quad f(E) \subset f(F) \\ &\Rightarrow \quad B \setminus f(F) \subset B \setminus f(E) \\ &\Rightarrow \quad g(B \setminus f(F)) \subset g(B \setminus f(E)) \\ &\Rightarrow \quad A \setminus g(B \setminus f(E)) \subset A \setminus g(B \setminus f(F)). \end{aligned}$$

Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso $A_1 \in \mathcal{P}(A)$ di T ovvero un insieme tale che $T(A_1) = A_1$. Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ con unioni disgiunte. La funzione $f : A_1 \to B_1$ è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che $g(B_2) = A_2$. Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque, $g : B_2 \to A_2$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$ nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

□

Proposizione 2.4. Per ogni insieme A risulta $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$.

Dim. Certamente $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$ in quanto la funzione $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$ è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$. La dimostrazione si basa sul "paradosso di Russell". Si consideri l'insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè f è suriettiva, esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = A_0$. Ci sono due casi:
Caso 1: $x_0 \in A_0$. Allora: $x_0 \notin f(x_0) = A_0$, assurdo.
Caso 2: $x_0 \notin A_0$. Allora: $x_0 \in f(x_0) = A_0$, assurdo.

□

3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ per escludere lo 0.

1. Insieme finito. Un insieme A si dice *finito* se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed una funzione $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che $\mathrm{Card}(A) = n$. Se A non è finito, diremo che A è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo $\mathrm{Card}(A) = \infty$.

Proposizione 3.1. Se A è un insieme finito ed $f : A \to A$ è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:
1) f è iniettiva;
2) f è suriettiva;
3) f è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio e si può fare per induzione sulla cardinalità di A.

Esempio 3.2. L'insieme dei numeri pari $2\mathbb{N} = \{0, 2, \ldots, 2n, \ldots\}$ è infinito ed è equipotente con $\mathbb{N}$. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

Definizione 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

2. Insieme numerabile. Un insieme A si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : \mathbb{N} \to A$. Diremo in questo caso che:

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad \text{(Alef zero)}.$$

Il cardinale $\aleph_0$ è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se A è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$. La costruzione di f è induttiva:

i) Se definisce $f(0) \in A$ a piacere;

ii) Definiti $f(1), \ldots, f(n) \in A$ distinti, si osserva che l'insieme $A \setminus \{f(0), \ldots, f(n)\}$ non è vuoto, altrimenti A sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \ldots, f(n)\}$. Ne risulta una funzione $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile A possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \{a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots\}.$$

3. $\mathbb{Z}$ è numerabile. L'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Proviamo che il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, ovvero che

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 1)$ è iniettiva. D'altra parte, la funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n, m) = 2^n 3^m$ è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.3 esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esercizio 3.1. Controllare che la funzione $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita

$$h(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

5. $A \times A$ è numerabile se A è numerabile. Se A è numerabile, anche il prodotto cartesiano $A \times A$ è numerabile. Sia $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva e suriettiva. Allora $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times A$, $F(n, m) = (f(n), f(m))$ è iniettiva e suriettiva. La composizione $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \to A \times A$ è allora iniettiva e suriettiva. Qui h è la funzione definita sopra.

6. $\mathbb{Q}$ è numerabile. L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e quindi l'inclusione è iniettiva da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$. Si consideri la funzione $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione g è iniettiva. Siccome $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ è numerabile, esiste $h:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva. Dunque $h\circ g:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ è iniettiva.

7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

Proposizione 3.4. Siano A_n, $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 1$, insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ è al più numerabile.

Dim. Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi A_n siano a coppie disgiunti, ovvero $A_n\cap A_m=\emptyset$ se $n\neq m$, e che $A_n\neq\emptyset$. Vogliamo provare che A è numerabile.

Enumeriamo gli elementi di A_n in questo modo:

$$A_n=\{a_{n,1},a_{n,2},\dots,a_{n,j},\dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione $f:\mathbb{N}\to A$, $f(n)=a_{n,1}$ è iniettiva. Costruiamo una funzione $g:A\to\mathbb{N}$ iniettiva. È noto che l'insieme $P\subset\mathbb{N}$ dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo P:

$$P=\{p_1=2,p_2=3,\dots\}.$$

Definiamo la funzione $g:A\to\mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$g(a_{n,j})=p_n^j,\quad n,j\in\mathbb{N},n,j\geq 1.$$

La funzione g è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j})=g(a_{m,k})\quad\Leftrightarrow\quad p_n^j=p_m^k\quad\Leftrightarrow\quad n=m,\ j=k\quad\Leftrightarrow\quad a_{n,j}=a_{m,k}.$$

$\square$

8. $\mathbb{R}$ non è numerabile. Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile. È più che numerabile.

4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione*.

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n\in\mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n)\Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n\in\mathbb{N}$.

4.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 1$ e per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ha

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \tag{4.3}$$

La formula vale anche se $x\in\mathbb{C}$ è un numero complesso $x\neq 1$. La prova è per induzione su $n\geq 1$. Per $n=1$ si ha

$$\frac{1-x^2}{1-x}=\frac{(1+x)(1-x)}{1-x}=1+x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1}$$
$$= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

4.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{4.4}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

4.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
ii) $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n + 1$:

$$\begin{aligned}
(x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.\end{aligned}$$

5. Esercizi

Esercizio 5.1. Completare la dimostrazione della Proposizione 1.3. Sia $f : A \to B$ una funzione e siano $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Provare che

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

Esercizio 5.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f, ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita.
2) Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
3) Stabilire se f è iniettiva.
4) Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

Esercizio 5.3. Siano $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ il disco unitario, $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| < 1$, ed $f : D \to D$ sia la funzione

$$f(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}.$$

1) Verificare che f è definita su tutto D e che $f(D) \subset D$;
2) Provare che f è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa $f^{-1} : D \to D$.

Esercizio 5.4. Sia $f : A \to B$ una funzione.

1) Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha
$$C \subset f^{-1}(f(C)).$$
Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia iniettiva.
2) Provare che per ogni insieme $D \subset B$ si ha
$$f(f^{-1}(D)) \subset D.$$
Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia suriettiva.

Esercizio 5.5. Siano A, B, C insiemi finiti e indichiamo con $|A| = \mathrm{Card}(A)$ la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Esercizio 5.6. Siano $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ e $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Esibendo biiezioni concrete, provare che:

1) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}([0,1))$;
2) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}((0,1))$;
3) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.7. Verificare mediante induzione le seguenti identità per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2.$$

Esercizio 5.8. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $0 < x < 1$. Usando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

Esercizio 5.9. Dimostrare per induzione che

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1), \quad n \geq 1$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$$

$$3) \quad n! < \Big(\frac{n}{2}\Big)^n, \quad n \geq 6.$$

Esercizio 5.10. Sia $\mathcal{A} = \big\{I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervallo}\big\}$ un insieme costituito da intervalli non degeneri $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$. Supponiamo che $\mathcal{A}$ verifichi: $I, J \in \mathcal{A}$ con $I \cap J \neq \emptyset$ implica $I = J$ (ovvero, gli intervalli sono a coppie disgiunti).

Dimostrare che $\mathcal{A}$ è numerabile.

Suggerimento: stimare il numero di intervalli di $\mathcal{A}$ di lunghezza maggiore di $1/n$ contenuti nell'intervallo $(-m, m)$, con $n, m \geq 1$.

Esercizio 5.11. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Calcolare il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x+a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x+b)^m$. Precisamente, calcolare i polinomi $s(x)$ (il quoziente della divisione) ed $r(x)$ (il resto della divisione) tali che $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, dove il grado di r è al più $m-1$.

Esercizio 5.12. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una funzione iniettiva tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si abbia

$$|x - y| \le 10 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \le 10.$$

Determinare la funzione f.

Esercizio 5.13. i) Costruire una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ tale che $f^{-1}(\{y\})$ sia numerabile per ogni $y \in [0,1]$.

ii) Costruire una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ tale che $\mathrm{Card}\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ per ogni $y \in [0,1]$. Assumere come noto il fatto che $\mathrm{Card}([0,1] \times [0,1]) = \mathrm{Card}([0,1])$.

CHAPTER 2

Numeri reali

1. Relazioni d'ordine

Premettiamo le definizioni di relazione, relazione d'ordine parziale e relazione d'ordine totale.

Definizione 1.1 (Relazione). Una relazione su un insieme X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$. Dati $x, y \in X$, diciamo che x è nella relazione R con y se $(x, y) \in R$. Scriveremo in questo caso xRy.

Definizione 1.2 (Ordine parziale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine parziale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:
i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

Ad esempio, l'insieme $X = \mathcal{P}(A)$ con la relazione di inclusione insiemistica $\subset$ è parzialmente ordinato.

Definizione 1.3 (Ordine totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:
i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva);
iv) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità).

2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo.* Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

Definizione 2.1. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:
(S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):
(P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);

(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);

(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;

(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve.

Definizione 2.2 (Campo, campo ordinato, campo ordinato completo).
i) Un insieme X munito di due operazioni $+$ e $\cdot$ che verificano gli assiomi (o proprietà) (S1)-(D) si dice *campo*.
ii) Se, in aggiunta ad i), vi è su X una relazione di ordine totale $\leq$ che verifica gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*.
iii) Se, infine, $(X, +, \cdot, \leq)$ verifica anche l'assioma di completezza, si ottiene un *campo ordinato completo*.

Ad esempio, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono campi; $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ sono campi ordinati; $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo.
Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Esempio 2.3. A titolo di esempio, facciamo alcuni calcoli basandoci solo sugli assiomi di campo ordinato.

1) Si ha $(-1) \cdot (-1) = 1$. Infatti:

$$0 = 0 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$$

e la tesi segue sommando a destra e sinistra 1.

2) Si ha $-x = (-1) \cdot x$. Infatti:

$$0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x,$$

e aggiungendo a destra e sinistra $-x$ si trova la tesi.

3) Si ha $x^2 \geq 0$ per ogni x nel campo ordinato. Infatti, se $x \geq 0$ allora $x \cdot x \geq x \cdot 0 = 0$. Se invece $x \leq 0$ allora $-x \geq 0$ e quindi

$$0 \leq (-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot x = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2.$$

Proposizione 2.4. I numeri complessi $\mathbb{C}$ sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

Dim. Che $\mathbb{C}$ sia un campo è noto dal corso di Geometria. Supponiamo per assurdo che ci sia su $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine totale $\geq$. L'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ dovrebbe allora verificare $-1 = i^2 \geq 0$ e quindi si avrebbe $1 \leq 0$. D'altra parte si ha anche $1 = 1^2 \geq 0$. Si deduce che $1 = 0$ e questo non è possibile. $\square$

DEFINIZIONE 2.5 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \le y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \le z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo
$$\sup A = x.$$
iv) Se A non è superioremente limitato porremo
$$\sup A = \infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici.

OSSERVAZIONE 2.6 (Caratterizzazione dell'estremo superiore). Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \le x$ per ogni $y \in A$ (x è un maggiorante);
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$ (x è il minimo dei maggioranti).

DEFINIZIONE 2.7 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \le x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \le x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo
$$\inf A = x.$$
iv) Se A non è inferiormente limitato porremo
$$\inf A = -\infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\min A = x.$$

OSSERVAZIONE 2.8 (Formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza). Rienunciamo l'Assioma di completezza dei numeri reali:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Tale assioma puè essere riformulato in diversi modi fra loro equivalenti:

1) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferioremente limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo inferiore.

2) Ogni sezione di $\mathbb{R}$ ha un unico elemento separatore.
3) Ogni successione monotona e limitata in $\mathbb{R}$ è convergente.
4) Ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ha una sottosuccessione convergente (proprietà di Bolzano-Weierstrass).
5) Ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente (ovvero, $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo).
6) Ogni successione di intervalli chiusi non vuoti $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tale che $I_{k+1} \subset I_k$ verifica
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset.$$

Ritorneremo su questi concetti durante il corso.

2.1. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.9 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme
$$A = \big\{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$
è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:
$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$
che è una contraddizione. □

Definizione 2.10 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme
$$A_x = \big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\}.$$
Per la proprietà di Archimede, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque massimo. Definiamo la *parte intera di x*
$$[x] = \max \big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\} \in \mathbb{Z}.$$
Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di x* è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:
$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 2.11 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

DIM. Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y-x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$, ovvero $nx < ny - 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \le ny \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{[ny]}{n} \le y.$$

Cerchiamo ora $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$x < \frac{[ny]}{n} - \frac{1}{m} < y.$$

La disuguaglianza a sinistra è equivalente a

$$m\Big(\frac{[ny]}{n} - x\Big) > 1,$$

ed un tale $m \in \mathbb{N}$ esiste per la proprietà di Archimede. $\square$

3. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$

La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) L'unicità di un campo ordinato completo.

È possibile dimostrare (ma noi non lo faremo) che due campi ordinati completi sono fra loro *isomorfi*. In questo senso esiste un unico campo ordinato completo, i numeri reali $\mathbb{R}$.

Illustriamo brevemente, senza dimostrazioni, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Sottolineamo che l'Assioma di Completezza è ora un Teorema.

DEFINIZIONE 3.1. Un insieme $A \subset \mathbb{Q}$ è una sezione (di Dedekind) se:

(i) $A, A' \neq \emptyset$, dove A' è il complementare di A in $\mathbb{Q}$;
(ii) se $a \in A$ allora $b \in A$ per ogni numero razionale $b \le a$;
(iii) se $a \in A$ esiste $b \in A$ con $a < b$.

OSSERVAZIONE 3.2. La proprietà (iii) precisa che vogliamo considerare solo sezioni aperte di $\mathbb{Q}$. In questo modo, ad ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ corrisponde l'unica sezione

$$A_q = \big\{a \in \mathbb{Q} : a < q\big\}.$$

Esistono sezioni che non corrispondono a numeri razionali. Ad esempio, questo è il caso della sezione

$$A = \big\{a \in \mathbb{Q} : a \le 0 \text{ oppure } a^2 < 2\big\}.$$

Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$ la sezione nulla e con $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$ la sezione unitaria.

1. Relazione d'ordine. Se A e B sono sezioni, diciamo che $A \le B$ se $A \subset B$. L'insieme $\mathcal{A}$ è totalmente ordinato dalla relazione $\le$.

2. Somma. Se A e B sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B\}.$$

La sezione opposta è per definizione $-A = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } a > b \text{ tale che } -a \in A'\}$. Scriviamo $A - B = A + (-B)$.

3. Prodotto. La sezione prodotto si definisce per casi. Se $A, B \geq 0$ definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B, \text{ tali che } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

Se $A, B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$, se $A \geq 0$ e $B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$, e se $A \leq 0$ e $B \geq 0$ si definisce $A \cdot B = -(-A) \cdot B$. Infine, per ogni sezione $A > 0$ si definisce la sezione reciproca $A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } a > b \text{ tale che } a^{-1} \in A'\}$. Se invece $A < 0$ si definisce $A^{-1} = -(-A)^{-1}$.

Con pazienti verifiche si controlla che $\mathcal{A}$ è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

4. Assioma di completezza. Proviamo la proprietà di completezza.

Teorema 3.3. L'insieme $\mathcal{A}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ e con la relazione d'ordine $\leq$ è un campo ordinato *completo*.

Dim. Ci interessa verificare la completezza. Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ un insieme superioremente limitato e non vuoto. Questo significa che esiste una sezione $A \in \mathcal{A}$ tale che $B \subset A$ per ogni sezione $B \in \mathcal{B}$. Vogliamo provare che $\mathcal{B}$ ha estremo superiore. Definiamo l'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{Q}.$$

Controlliamo che C è una sezione di $\mathbb{Q}$:

i) $C \neq \emptyset$ in quanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Inoltre, $C \subset A$ implica $A' \subset C'$ e poichè per ipotesi $A' \neq \emptyset$, segue che $C' \neq \emptyset$.
ii) Siano $x, y \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in C$ e $y \leq x$. Allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$, e siccome B è una sezione segue che $y \in B$. Dunque si ha anche $y \in C$.
iii) Se $x \in C$ allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$. Siccome B è una sezione, esiste $y \in B$ tale che $x < y$. Ma allora sia ha anche $y \in C$.

Verifichiamo infine che $C = \sup \mathcal{B}$.

i) Sicuramente $B \subset C$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, ovvero C è un maggiorante di $\mathcal{B}$.
ii) Proviamo che C è il minimo dei maggioranti. Sia $D \in \mathcal{A}$ un maggiorante di $\mathcal{B}$. Dalle inclusioni $B \subset D$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, segue che

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset D.$$

□

È possibile una costruzione puramente metrica di $\mathbb{R}$, che prescinde dalla relazione d'ordine. Precisamente, $\mathbb{R}$ può essere costruito come il completamento metrico di $\mathbb{Q}$.

4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \le |x|$ e $-x \le |x|$, ed inoltre:

i) $|x| \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $|x| = |-x|$;
iii) $|x+y| \le |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \le |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x+y) = -x - y \le |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x-y| \le |x-z| + |z-y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x-y| = |x-z+z-y| \le |x-z| + |z-y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x-y+y| \le |x-y| + |y|$ che riordinata fornisce $|x| - |y| \le |x-y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x| - |y|\big| \le |x-y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $d(x,y) = |x-y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x,y) \ge 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
iii) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ è allora uno *spazio metrico*. La funzione $d(x,y) = |x-y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

Possiamo anticipare la definizione generale di spazio metrico.

Definizione 4.1 (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x,y) \ge 0$ e $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria);
3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ (disuguaglianza triangolare).

Dato uno spazio metrico (X, d), fissato un punto $x_0 \in X$ ed un raggio $r > 0$, l'insieme

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = B_X(x_0, r) = \big\{x \in X : d(x, x_0) < r\big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x_0 e raggio r. Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Nello spazio metrico $\mathbb{R}$ con la distanza standard, le palle sono intervalli aperti che si indicano anche con la seguente notazione:

$$I_r(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\big\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

4.1. Intervalli. Gli intevalli di $\mathbb{R}$ possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Ecco l'elenco. Siano $-\infty < a < b < \infty$. Si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
[a, b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\big\} && \text{intervallo aperto a destra,}\\
(a, b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\big\} && \text{intervallo aperto a sinistra,}\\
[a, b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\big\} && \text{intervallo chiuso.}
\end{aligned}$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$\begin{aligned}
(-\infty, b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x < b\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
(-\infty, b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : x \le b\big\} && \text{intervallo chiuso,}\\
(a, \infty) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x > a\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
[a, \infty) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x \ge a\big\} && \text{intervallo chiuso,}
\end{aligned}$$

cui si aggiunge l'intervallo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

La famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi convessi di $\mathbb{R}$. Inoltre, la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi connessi di $\mathbb{R}$.