

Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2013-2014

Roberto Monti

Versione del 25 Ottobre 2013

Contents

Chapter 1. Cardinalità	5
1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale	5
2. Cardinalità	8
3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili	10
4. Numeri naturali e induzione	12
5. Esercizi	14
Chapter 2. Numeri reali	17
1. Relazioni d'ordine	17
2. Introduzione assiomatica dei numeri reali	17
3. Costruzione di \mathbb{R} con le sezioni di \mathbb{Q}	21
4. \mathbb{R} come spazio metrico	22
5. \mathbb{R}^n come spazio metrico	24
6. Esercizi	26
Chapter 3. Successioni reali e complesse	29
1. Successioni numeriche	29

Cardinalità

1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi. Non diamo una definizione di “insieme”. Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato “insieme ambiente”, che indicheremo con X . Se un elemento x di X appartiene ad un insieme A scriveremo $x \in A$. Se x non appartiene ad A scriveremo $x \notin A$. Con $A \subset B$ si intende l’inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo \subset viene talvolta indicato con \subseteq . Se $A \subset B$ e $B \subset A$ gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali, $A = B$.

L’unione e l’intersezione di due insiemi A e B si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

L’insieme che non contiene alcun elemento, l’*insieme vuoto*, si indica con \emptyset . Chiaramente, si ha $\emptyset \subset A$ per ogni insieme A . Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$.

La differenza di insiemi $A \setminus B$ (leggi “ A meno B ”) è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Talvolta la differenza $A \setminus B$ è indicata con $A - B$.

Il complementare di un insieme A in X è l’insieme $A' = X \setminus A$. Talvolta il complementare è indicato con A^c . Con tale notazione si ha $A \setminus B = A \cap B'$. Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Più in generale, sia Λ una famiglia di indici e siano A_λ insiemi indicizzati da $\lambda \in \Lambda$. Allora l’unione e intersezione della famiglia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sono:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\}.$$

Le formule di De Morgan sono

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda, \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda, \\ X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda. \end{aligned}$$

1.2. Funzioni fra insiemi. Una funzione $f : A \rightarrow B$ dall'insieme A all'insieme B è un'applicazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ un elemento $f(x) \in B$. L'insieme A si dice *dominio* e l'insieme B si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Con (x, y) si indica la *coppia ordinata* formata da x e y , nell'ordine. Il *grafico* di una funzione $f : A \rightarrow B$ è il seguente sottoinsieme di $A \times B$:

$$\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}.$$

OSSERVAZIONE 1.1. La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da A a B* è una terna ordinata (A, B, G) dove $G \subset A \times B$ è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni $x \in A$ esiste un unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$. L'insieme $G = \text{gr}(f)$ è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione $f : A \rightarrow B$ per indicare una funzione.

DEFINIZIONE 1.2 (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme $C \subset A$, l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \{f(x) \in B : x \in C\} \\ &= \{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di C rispetto ad f .

Dato un insieme $D \subset B$, l'insieme

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di D rispetto ad f . Nel libro di G. De Marco, l'antimmagine viene indicata con la notazione $f^{\leftarrow}(D) = f^{-1}(D)$.

PROPOSIZIONE 1.3. Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano $A_\lambda \subset A$ e $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Allora si ha:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), & f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), \\ f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda), & f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned}$$

DIM. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned}
 y \in f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\Leftrightarrow \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } x \text{ ed esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).
 \end{aligned}$$

Nell'equivalenza centrale abbiamo usato il fatto che $\exists x \exists \lambda \dots \Leftrightarrow \dots \exists \lambda \exists x$.

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda).
 \end{aligned}$$

Proviamo l'inclusione in alto a destra:

$$\begin{aligned}
 y \in f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\Leftrightarrow \text{esiste } x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } x \text{ tale che per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
 &\Rightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } y \in f(A_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).
 \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 1.4. Si noti che nell'ultimo argomento della dimostrazione precedente si hanno tutte equivalenze tranne che l'implicazione centrale, che è del tipo

$$\exists x \forall \lambda : A(x, \lambda) \text{ è vera} \Rightarrow \forall \lambda \exists x : A(x, \lambda) \text{ è vera,}$$

dove $A(x, \lambda)$ è un'affermazione che riguarda x e λ . Tale implicazione non può essere invertita. Infatti, nell'antecedente c'è una x che rende vera l'affermazione per ogni λ . Nella conseguente, invece, per ogni λ c'è una x (che quindi dipende da λ) che rende vera l'affermazione.

ESEMPIO 1.5. Sia $A = \{0, 1\}$ un insieme formato da due elementi e sia $B = \{0\}$. L'unica funzione $f : A \rightarrow B$ è $f(0) = f(1) = 0$. Detti $A_0 = \{0\}$ e $A_1 = \{1\}$, si ha $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ e quindi $f(A_0 \cap A_1) = \emptyset$, mentre $f(A_0) \cap f(A_1) = \{0\} \neq \emptyset$.

DEFINIZIONE 1.6. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice:

- i) *iniettiva* (1-1) se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$ (equivalentemente se $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$);
- ii) *suriettiva* (su) se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;

iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$f : A \xrightarrow{1-1} B$ funzione iniettiva,

$f : A \xrightarrow{\text{su}} B$ funzione suriettiva,

$f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$ funzione iniettiva e suriettiva.

DEFINIZIONE 1.7 (Funzione inversa e composta). Se $f : A \rightarrow B$ è una funzione iniettiva, allora $f : A \rightarrow f(A)$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa* $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ due funzioni tali che $f(A) \subset C$. Allora è ben definita la *funzione composta* $g \circ f : A \rightarrow D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$ allora si ha:

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_A \quad \text{funzione identità su } A,$$

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_B \quad \text{funzione identità su } B.$$

DEFINIZIONE 1.8. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione. Una funzione $g : B \rightarrow A$ si dice *inversa sinistra* di f se $g \circ f = \text{Id}_A$. Una funzione $h : B \rightarrow A$ si dice *inversa destra* di f se $f \circ h = \text{Id}_B$.

OSSERVAZIONE 1.9. Se $f : A \rightarrow B$ è suriettiva, allora per ogni $y \in B$ la “fibra” $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ è non vuota. Con l’Assioma della Scelta, per ogni $y \in B$ si può selezionare un elemento $x \in f^{-1}(\{y\})$ e definire una funzione $h : B \rightarrow A$ ponendo $h(y) = x$. Dunque, si ha $f \circ h(y) = f(h(y)) = y$ per ogni $y \in B$. La funzione h è un’inversa destra di f .

2. Cardinalità

Defniremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

DEFINIZIONE 2.1. Siano A e B insiemi. Diremo che:

- i) $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \rightarrow B$;
- ii) $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : A \rightarrow B$;
- iii) $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$ se $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$ ma non esiste alcuna funzione suriettiva $f : A \rightarrow B$.

Se $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ diremo che gli insiemi A e B sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile.

TEOREMA 2.2 (Tricotomia dei cardinali). Vale sempre una delle seguenti tre possibilità: $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$, oppure $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$, oppure $\text{Card}(B) < \text{Card}(A)$.

La dimostrazione di questo teorema richiede l'Assioma della Scelta ed è omessa. Proveremo invece che l'affermazione $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ equivale all'esistenza di una funzione iniettiva $f : A \rightarrow B$ e di una funzione iniettiva $g : B \rightarrow A$.

Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme A è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A :

$$\mathcal{P}(A) = \{E : E \subset A\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ contiene sempre l'elemento \emptyset .

TEOREMA 2.3 (Cantor-Schröder-Bernstein). Siano A e B due insiemi, e siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : A \rightarrow B$.

DIM. Premettiamo un argomento preparatorio. Consideriamo una funzione $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ che preserva le inclusioni:

$$(2.2) \quad E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F).$$

Affermiamo che esiste $F \in \mathcal{P}(A)$ tale che $F = T(F)$ (punto fisso).

Si consideri la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\}$. È certamente $\mathcal{A} \neq \emptyset$ in quanto $\emptyset \in \mathcal{A}$. Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che $T(F) = F$. Infatti, usando le proprietà (1.1) e (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\left(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\right) = T(F).$$

D'altra parte, applicando T all'inclusione $F \subset T(F)$ si ottiene $T(F) \subset T(T(F))$ e quindi $T(F) \in \mathcal{A}$, da cui segue l'inclusione opposta $T(F) \subset F$. La conclusione è che $T(F) = F$.

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che T preserva le inclusioni:

$$\begin{aligned} E \subset F &\Rightarrow f(E) \subset f(F) \\ &\Rightarrow B \setminus f(F) \subset B \setminus f(E) \\ &\Rightarrow g(B \setminus f(F)) \subset g(B \setminus f(E)) \\ &\Rightarrow A \setminus g(B \setminus f(E)) \subset A \setminus g(B \setminus f(F)). \end{aligned}$$

Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso $A_1 \in \mathcal{P}(A)$ di T ovvero un insieme tale che $T(A_1) = A_1$. Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ con unioni disgiunte. La funzione $f : A_1 \rightarrow B_1$ è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che $g(B_2) = A_2$. Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque, $g : B_2 \rightarrow A_2$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva $h : A \rightarrow B$ nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

□

PROPOSIZIONE 2.4. Per ogni insieme A risulta $\text{Card}(A) < \text{Card}(\mathcal{P}(A))$.

DIM. Certamente $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(A))$ in quanto la funzione $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$ è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$. La dimostrazione si basa sul “paradosso di Russell”. Si consideri l’insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè f è suriettiva, esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = A_0$. Ci sono due casi:

Caso 1: $x_0 \in A_0$. Allora: $x_0 \notin f(x_0) = A_0$, assurdo.

Caso 2: $x_0 \notin A_0$. Allora: $x_0 \in f(x_0) = A_0$, assurdo.

□

3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l’insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ per escludere lo 0.

1. Insieme finito. Un insieme A si dice *finito* se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed una funzione $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che $\text{Card}(A) = n$. Se A non è finito, diremo che A è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo $\text{Card}(A) = \infty$.

PROPOSIZIONE 3.1. Se A è un insieme finito ed $f : A \rightarrow A$ è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1) f è iniettiva;
- 2) f è suriettiva;
- 3) f è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio e si può fare per induzione sulla cardinalità di A .

ESEMPIO 3.2. L’insieme dei numeri pari $2\mathbb{N} = \{0, 2, \dots, 2n, \dots\}$ è infinito ed è equipotente con \mathbb{N} . Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

DEFINIZIONE 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

2. Insieme numerabile. Un insieme A si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Diremo in questo caso che:

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad (\text{Alef zero}).$$

Il cardinale \aleph_0 è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se A è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. La costruzione di f è induttiva:

- i) Se definisce $f(0) \in A$ a piacere;
- ii) Definiti $f(1), \dots, f(n) \in A$ distinti, si osserva che l'insieme $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ non è vuoto, altrimenti A sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$. Ne risulta una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile A possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

3. \mathbb{Z} è numerabile. L'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Proviamo che il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, ovvero che

$$\text{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 1)$ è iniettiva. D'altra parte, la funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n, m) = 2^n 3^m$ è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.3 esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

ESERCIZIO 3.1. Controllare che la funzione $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ così definita

$$h(n, m) = 2^m(2n+1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

5. $A \times A$ è numerabile se A è numerabile. Se A è numerabile, anche il prodotto cartesiano $A \times A$ è numerabile. Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ iniettiva e suriettiva. Allora $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A \times A$, $F(n, m) = (f(n), f(m))$ è iniettiva e suriettiva. La composizione $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow A \times A$ è allora iniettiva e suriettiva. Qui h è la funzione definita sopra.

6. \mathbb{Q} è numerabile. L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e quindi l'inclusione è iniettiva da \mathbb{N} in \mathbb{Q} . Si consideri la funzione $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione g è iniettiva. Siccome $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile, esiste $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva. Dunque $h \circ g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ è iniettiva.

7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

PROPOSIZIONE 3.4. Siano A_n , $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è al più numerabile.

DIM. Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi A_n siano a coppie disgiunti, ovvero $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$, e che $A_n \neq \emptyset$. Vogliamo provare che A è numerabile.

Enumeriamo gli elementi di A_n in questo modo:

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,j}, \dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, $f(n) = a_{n,1}$ è iniettiva. Costruiamo una funzione $g : A \rightarrow \mathbb{N}$ iniettiva. È noto che l'insieme $P \subset \mathbb{N}$ dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo P :

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}.$$

Definiamo la funzione $g : A \rightarrow \mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$g(a_{n,j}) = p_n^j, \quad n, j \in \mathbb{N}, n, j \geq 1.$$

La funzione g è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j}) = g(a_{m,k}) \Leftrightarrow p_n^j = p_m^k \Leftrightarrow n = m, j = k \Leftrightarrow a_{n,j} = a_{m,k}.$$

□

8. \mathbb{R} non è numerabile. Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} non è numerabile. È più che numerabile.

4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione*.

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

- i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se \mathbb{N} inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
- ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(4.3) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

4.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(4.4) \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

4.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

- i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
- ii) $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n + 1$:

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}. \end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k. \end{aligned}$$

5. Esercizi

ESERCIZIO 5.1. Completare la dimostrazione della Proposizione 1.3. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione e siano $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Provare che

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

ESERCIZIO 5.2. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

- 1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f , ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita.
- 2) Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
- 3) Stabilire se f è iniettiva.
- 4) Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

ESERCIZIO 5.3. Siano $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ il disco unitario, $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| < 1$, ed $f : D \rightarrow D$ sia la funzione

$$f(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}.$$

- 1) Verificare che f è definita su tutto D e che $f(D) \subset D$;
- 2) Provare che f è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa $f^{-1} : D \rightarrow D$.

ESERCIZIO 5.4. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione.

- 1) Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha

$$C \subset f^{-1}(f(C)).$$

Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia iniettiva.

- 2) Provare che per ogni insieme $D \subset B$ si ha

$$f(f^{-1}(D)) \subset D.$$

Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia suriettiva.

ESERCIZIO 5.5. Siano A, B, C insiemi finiti e indichiamo con $|A| = \text{Card}(A)$ la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

ESERCIZIO 5.6. Siano $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ e $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Esibendo biiezioni concrete, provare che:

- 1) $\text{Card}([0, 1]) = \text{Card}([0, 1))$;
- 2) $\text{Card}([0, 1]) = \text{Card}((0, 1))$;
- 3) $\text{Card}([0, 1]) = \text{Card}(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 5.7. Verificare mediante induzione le seguenti identità per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2.$$

ESERCIZIO 5.8. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $0 < x < 1$. Usando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

ESERCIZIO 5.9. Dimostrare per induzione che

- 1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1), \quad n \geq 1$
- 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$
- 3) $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \quad n \geq 6.$

ESERCIZIO 5.10. Sia $\mathcal{A} = \{I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervallo}\}$ un insieme costituito da intervalli non degeneri $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$. Supponiamo che \mathcal{A} verifichi: $I, J \in \mathcal{A}$ con $I \cap J \neq \emptyset$ implica $I = J$ (ovvero, gli intervalli sono a coppie disgiunti).

Dimostrare che \mathcal{A} è numerabile.

Suggerimento: stimare il numero di intervalli di \mathcal{A} di lunghezza maggiore di $1/n$ contenuti nell'intervallo $(-m, m)$, con $n, m \geq 1$.

ESERCIZIO 5.11. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Calcolare il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x+a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x+b)^m$. Precisamente, calcolare i polinomi $s(x)$ (il quoziente della divisione) ed $r(x)$ (il resto della divisione) tali che $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, dove il grado di r è al più $m-1$.

ESERCIZIO 5.12. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una funzione iniettiva tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si abbia

$$|x - y| \leq 10 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq 10.$$

Determinare la funzione f .

ESERCIZIO 5.13. i) Costruire una funzione $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tale che $f^{-1}(\{y\})$ sia numerabile per ogni $y \in [0, 1]$.

ii) Costruire una funzione $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tale che $\text{Card}(f^{-1}(\{y\})) = \text{Card}(\mathbb{R})$ per ogni $y \in [0, 1]$. Assumere come noto il fatto che $\text{Card}([0, 1] \times [0, 1]) = \text{Card}([0, 1])$.

CHAPTER 2

Numeri reali

1. Relazioni d'ordine

Premettiamo le definizioni di relazione, relazione d'ordine parziale e relazione d'ordine totale.

DEFINIZIONE 1.1 (Relazione). Una relazione su un insieme X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$. Dati $x, y \in X$, diciamo che x è nella relazione R con y se $(x, y) \in R$. Scriveremo in questo caso xRy .

DEFINIZIONE 1.2 (Ordine parziale). Una relazione \leq su un insieme X è una relazione di *ordine parziale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

- i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
- ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
- iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

Ad esempio, l'insieme $X = \mathcal{P}(A)$ con la relazione di inclusione insiemistica \subset è parzialmente ordinato.

DEFINIZIONE 1.3 (Ordine totale). Una relazione \leq su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

- i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
- ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
- iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva);
- iv) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità).

2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo*. Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

DEFINIZIONE 2.1. I numeri reali sono un insieme \mathbb{R} munito di due operazioni $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale \leq che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

- (S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
- (S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
- (S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
- (S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

- (P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
- (P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);

(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);

(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

$$(D) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;

(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve.

DEFINIZIONE 2.2 (Campo, campo ordinato, campo ordinato completo).

i) Un insieme X munito di due operazioni $+$ e \cdot che verificano gli assiomi (o proprietà) (S1)-(D) si dice *campo*.

ii) Se, in aggiunta ad i), vi è su X una relazione di ordine totale \leq che verifica gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*.

iii) Se, infine, $(X, +, \cdot, \leq)$ verifica anche l'assioma di completezza, si ottiene un *campo ordinato completo*.

Ad esempio, \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} sono campi; \mathbb{Q} ed \mathbb{R} sono campi ordinati; \mathbb{R} è un campo ordinato completo.

Gli insiemi \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sono in modo naturale sottoinsiemi di \mathbb{R} .

ESEMPIO 2.3. A titolo di esempio, facciamo alcuni calcoli basandoci solo sugli assiomi di campo ordinato.

1) Si ha $(-1) \cdot (-1) = 1$. Infatti:

$$0 = 0 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$$

e la tesi segue sommando a destra e sinistra 1.

2) Si ha $-x = (-1) \cdot x$. Infatti:

$$0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x,$$

e aggiungendo a destra e sinistra $-x$ si trova la tesi.

3) Si ha $x^2 \geq 0$ per ogni x nel campo ordinato. Infatti, se $x \geq 0$ allora $x \cdot x \geq x \cdot 0 = 0$. Se invece $x \leq 0$ allora $-x \geq 0$ e quindi

$$0 \leq (-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot x = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2.$$

PROPOSIZIONE 2.4. I numeri complessi \mathbb{C} sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

DIM. Che \mathbb{C} sia un campo è noto dal corso di Geometria. Supponiamo per assurdo che ci sia su \mathbb{C} una relazione d'ordine totale \geq . L'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ dovrebbe allora verificare $-1 = i^2 \geq 0$ e quindi si avrebbe $1 \leq 0$. D'altra parte si ha anche $1 = 1^2 \geq 0$. Si deduce che $1 = 0$ e questo non è possibile. \square

DEFINIZIONE 2.5 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di \mathbb{R} .

- i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
- ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
- iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \leq z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo

$$\sup A = x.$$

- iv) Se A non è superiormente limitato porremo

$$\sup A = \infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.

- v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici.

OSSERVAZIONE 2.6 (Caratterizzazione dell'estremo superiore). Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

- i) $y \leq x$ per ogni $y \in A$ (x è un maggiorante);
- ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$ (x è il minimo dei maggioranti).

DEFINIZIONE 2.7 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di \mathbb{R} .

- i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \leq x$ per ogni $x \in A$.
- ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
- iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \leq x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo

$$\inf A = x.$$

- iv) Se A non è inferiormente limitato porremo

$$\inf A = -\infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.

- v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\min A = x.$$

OSSERVAZIONE 2.8 (Formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza). Riteniamo l'Assioma di completezza dei numeri reali:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore. Tale assioma può essere riformulato in diversi modi fra loro equivalenti:

- 1) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferiormente limitato di \mathbb{R} ha estremo inferiore.

- 2) Ogni sezione di \mathbb{R} ha un unico elemento separatore.
- 3) Ogni successione monotona e limitata in \mathbb{R} è convergente.
- 4) Ogni successione limitata in \mathbb{R} ha una sottosuccessione convergente (proprietà di Bolzano-Weierstrass).
- 5) Ogni successione di Cauchy in \mathbb{R} è convergente (ovvero, \mathbb{R} è uno spazio metrico completo).
- 6) Ogni successione di intervalli chiusi non vuoti $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tale che $I_{k+1} \subset I_k$ verifica

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset.$$

Ritourneremo su questi concetti durante il corso.

2.1. Conseguenze della completezza.

PROPOSIZIONE 2.9 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

DIM. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme

$$A = \{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$$

è superiormente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

- 1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero \bar{x} è un maggiorante di A ;
- 2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero \bar{x} è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corrispondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:

$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$

che è una contraddizione. □

DEFINIZIONE 2.10 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme

$$A_x = \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\}.$$

Per la proprietà di Archimede, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque massimo. Definiamo la *parte intera di x*

$$[x] = \max \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x . La *parte frazionaria di x* è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo che i numeri razionali \mathbb{Q} sono densi in \mathbb{R} .

PROPOSIZIONE 2.11 (Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

DIM. Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$, ovvero $nx < ny - 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{[ny]}{n} \leq y.$$

Cerchiamo ora $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$x < \frac{[ny]}{n} - \frac{1}{m} < y.$$

La disuguaglianza a sinistra è equivalente a

$$m\left(\frac{[ny]}{n} - x\right) > 1,$$

ed un tale $m \in \mathbb{N}$ esiste per la proprietà di Archimede. \square

3. Costruzione di \mathbb{R} con le sezioni di \mathbb{Q}

La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) L'unicità di un campo ordinato completo.

È possibile dimostrare (ma noi non lo faremo) che due campi ordinati completi sono fra loro *isomorfi*. In questo senso esiste un unico campo ordinato completo, i numeri reali \mathbb{R} .

Illustriamo brevemente, senza dimostrazioni, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Sottolineamo che l'Assioma di Completezza è ora un Teorema.

DEFINIZIONE 3.1. Un insieme $A \subset \mathbb{Q}$ è una sezione (di Dedekind) se:

- (i) $A, A' \neq \emptyset$, dove A' è il complementare di A in \mathbb{Q} ;
- (ii) se $a \in A$ allora $b \in A$ per ogni numero razionale $b \leq a$;
- (iii) se $a \in A$ esiste $b \in A$ con $a < b$.

OSSERVAZIONE 3.2. La proprietà (iii) precisa che vogliamo considerare solo sezioni aperte di \mathbb{Q} . In questo modo, ad ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ corrisponde l'unica sezione

$$A_q = \{a \in \mathbb{Q} : a < q\}.$$

Esistono sezioni che non corrispondono a numeri razionali. Ad esempio, questo è il caso della sezione

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0 \text{ oppure } a^2 < 2\}.$$

Indichiamo con \mathcal{A} l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$ la sezione nulla e con $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$ la sezione unitaria.

1. Relazione d'ordine. Se A e B sono sezioni, diciamo che $A \leq B$ se $A \subset B$. L'insieme \mathcal{A} è totalmente ordinato dalla relazione \leq .

2. Somma. Se A e B sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A, b \in B\}.$$

La sezione opposta è per definizione $-A = \{b \in \mathbb{Q} : \text{esiste } a > b \text{ tale che } -a \in A'\}$. Scriviamo $A - B = A + (-B)$.

3. Prodotto. La sezione prodotto si definisce per casi. Se $A, B \geq 0$ definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A, b \in B, \text{ tali che } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

Se $A, B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$, se $A \geq 0$ e $B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$, e se $A \leq 0$ e $B \geq 0$ si definisce $A \cdot B = -(-A) \cdot B$. Infine, per ogni sezione $A > 0$ si definisce la sezione reciproca $A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} : \text{esiste } a > b \text{ tale che } a^{-1} \in A'\}$. Se invece $A < 0$ si definisce $A^{-1} = -(-A)^{-1}$.

Con pazienti verifiche si controlla che \mathcal{A} è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

4. Assioma di completezza. Proviamo la proprietà di completezza.

TEOREMA 3.3. L'insieme \mathcal{A} con le operazioni $+$ e \cdot e con la relazione d'ordine \leq è un campo ordinato *completo*.

DIM. Ci interessa verificare la completezza. Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ un insieme superiormente limitato e non vuoto. Questo significa che esiste una sezione $A \in \mathcal{A}$ tale che $B \subset A$ per ogni sezione $B \in \mathcal{B}$. Vogliamo provare che \mathcal{B} ha estremo superiore. Definiamo l'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{Q}.$$

Controlliamo che C è una sezione di \mathbb{Q} :

- i) $C \neq \emptyset$ in quanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Inoltre, $C \subset A$ implica $A' \subset C'$ e poichè per ipotesi $A' \neq \emptyset$, segue che $C' \neq \emptyset$.
- ii) Siano $x, y \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in C$ e $y \leq x$. Allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$, e siccome B è una sezione segue che $y \in B$. Dunque si ha anche $y \in C$.
- iii) Se $x \in C$ allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$. Siccome B è una sezione, esiste $y \in B$ tale che $x < y$. Ma allora sia ha anche $y \in C$.

Verifichiamo infine che $C = \sup \mathcal{B}$.

- i) Sicuramente $B \subset C$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, ovvero C è un maggiorante di \mathcal{B} .
- ii) Proviamo che C è il minimo dei maggioranti. Sia $D \in \mathcal{A}$ un maggiorante di \mathcal{B} . Dalle inclusioni $B \subset D$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, segue che

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset D.$$

□

È possibile una costruzione puramente metrica di \mathbb{R} , che prescindere dalla relazione d'ordine. Precisamente, \mathbb{R} può essere costruito come il completamento metrico di \mathbb{Q} .

4. \mathbb{R} come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su \mathbb{R} è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, ed inoltre:

- i) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- ii) $|x| = |-x|$;
- iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ che riordinata fornisce $|x| - |y| \leq |x - y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

- i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
- iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia (\mathbb{R}, d) è allora uno *spazio metrico*. La funzione $d(x, y) = |x - y|$ si dice distanza standard o Euclidea su \mathbb{R} .

Possiamo anticipare la definizione generale di spazio metrico.

DEFINIZIONE 4.1 (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

- 1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
- 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Dato uno spazio metrico (X, d) , fissato un punto $x_0 \in X$ ed un raggio $r > 0$, l'insieme

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = B_X(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x_0 e raggio r . Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Nello spazio metrico \mathbb{R} con la distanza standard, le palle sono intervalli aperti che si indicano anche con la seguente notazione:

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

4.1. Intervalli. Gli intervalli di \mathbb{R} possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Ecco l'elenco. Siano $-\infty < a < b < \infty$. Si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{intervallo aperto,} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{intervallo aperto a destra,} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{intervallo aperto a sinistra,} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{intervallo chiuso.}\end{aligned}$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$\begin{aligned}(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} && \text{intervallo aperto,} \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} && \text{intervallo chiuso,} \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} && \text{intervallo aperto,} \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} && \text{intervallo chiuso,}\end{aligned}$$

cui si aggiunge l'intervallo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

La famiglia degli intervalli di \mathbb{R} coincide con la famiglia degli insiemi convessi di \mathbb{R} . Inoltre, la famiglia degli intervalli di \mathbb{R} coincide con la famiglia degli insiemi connessi di \mathbb{R} .

5. \mathbb{R}^n come spazio metrico

Indichiamo con \mathbb{R}^n lo spazio Euclideo n -dimensionale, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ ha n coordinate reali $x = (x_1, \dots, x_n)$. Su \mathbb{R}^n è definita un'operazione di somma vettoriale

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Questa operazione è associativa e commutativa. Su \mathbb{R}^n è definita un'operazione di *prodotto per uno scalare*. Dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

In questo modo \mathbb{R}^n ha una struttura di *spazio vettoriale*, come si vedrà nel corso di geometria.

DEFINIZIONE 5.1 (Prodotto scalare). Definiamo l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di \mathbb{R}^n .

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenero. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

- 1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
- 2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- 3) $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) oppure con il simbolo $x \cdot y$.

DEFINIZIONE 5.2 (Norma Euclidea). La norma Euclidea su \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ così definita

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente, $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma. Precisamente, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si verifica:

- 1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- 2) $|\lambda x| = |\lambda| |x|$ (omogeneità);
- 3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

PROPOSIZIONE 5.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|.$$

DIM. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue estraendo le radici. \square

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su \mathbb{R}^n la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico (\mathbb{R}^n, d) si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r > 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

6. Esercizi

6.1. Numeri reali e razionali. Parte intera e frazionaria.

ESERCIZIO 6.1. Usando gli Assiomi (S1)-(O2) per un campo ordinato provare che per ogni x, y, z vale l'implicazione: $x \leq y$ e $z \leq 0 \Rightarrow yz \leq xz$.

Indicare in ciascun passaggio la proprietà che si utilizza.

ESERCIZIO 6.2. i) Verificare che $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. ii) Verificare che $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$.

ESERCIZIO 6.3. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha:

$$[x] + [x + 1/n] + \dots + [x + (n-1)/n] = [nx],$$

dove $[x]$ è la parte intera di x .

6.2. Estremo superiore ed inferiore. Massimo e minimo.

ESERCIZIO 6.4. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \left\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1 \right\}.$$

- 1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
- 2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

ESERCIZIO 6.5. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \{n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

- 1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
- 2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

ESERCIZIO 6.6. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \left\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

ESERCIZIO 6.7. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri naturali positivi. Provare che è sempre vera una delle due disuguaglianze

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n} \quad \text{oppure} \quad \frac{m+2n}{m+n} < \sqrt{2} < \frac{m}{n}.$$

Calcolare il minimo

$$\min \left\{ \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right|, \left| \frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2} \right| \right\}.$$

ESERCIZIO 6.8. Siano dati i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} :

$$A = \left\{ \frac{1+2n^2}{1+n^2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \right\},$$

$$C = \{x^2 - 2x \sin x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \quad D = \left\{ \frac{n^2 \cos(1/n)}{1-n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}.$$

- 1) Determinare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.

- 2) Determinare $\inf B$ e verificare che $\sup B = 1/2$. Dire se esistono $\min B$ e $\max B$.
- 3) Verificare che $\sup C = \infty$.
- 4) Verificare che $\inf D = -\infty$.

ESERCIZIO 6.9. (8 punti) Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme:

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \frac{n+1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

dove $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Calcolare $\sup A$, $\inf A$ e dire se esistono $\max A$ e $\min A$.

6.3. Spazi metrici.

ESERCIZIO 6.10. Sia (X, d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Verificare che (X, δ) è uno spazio metrico.

ESERCIZIO 6.11. Sia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che d è una metrica su \mathbb{R}^2 e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

ESERCIZIO 6.12. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di \mathbb{R}^n . Provare che (\mathbb{R}^n, d) è uno spazio metrico. Ad esempio per $\alpha = 1/2$.

ESERCIZIO 6.13. Sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, $n \geq 1$, la funzione definita in ciascuno dei seguenti tre casi per $x, y \in \mathbb{R}^n$: A) $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$; B) $d(x, y) = |x - y|^2$; C) $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$. Dire in ciascuno dei tre casi se d è una distanza su \mathbb{R}^n oppure no. Provare ogni affermazione.

ESERCIZIO 6.14. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $0 < \alpha \leq 1$. Provare che (X, d^α) è ancora uno spazio metrico.

6.4. Disuguaglianze.

ESERCIZIO 6.15. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ con $t > 0$. Provare la disuguaglianza:

$$xy \leq \frac{1}{2} \left(tx^2 + \frac{1}{t} y^2 \right).$$

ESERCIZIO 6.16. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ punti tali che $\langle x, y \rangle = |x||y| \neq 0$. Provare che esiste un numero reale $\lambda > 0$ tale che $x = \lambda y$.

ESERCIZIO 6.17. Siano $x_1, \dots, x_n \geq 0$ numeri reali e sia $x = x_1 + \dots + x_n$ la loro somma. Provare che

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq \frac{x^2}{4}.$$

ESERCIZIO 6.18. Siano $x_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, \dots, n$, numeri reali. Provare che

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1 - x_i)}{\left(\sum_{i=1}^n (1 - x_i)\right)^n}.$$

CHAPTER 3

Successioni reali e complesse

1. Successioni numeriche

Una *successione reale* (risp. *complessa*) è una funzione $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (risp. $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$). Indicheremo con $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ (risp. $a_n \in \mathbb{C}$) l'*elemento n-esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La successione si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

DEFINIZIONE 1.1 (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale o complessa $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L.$$

Il numero L si dice *limite della successione*.

ESEMPIO 1.2. Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

PROPOSIZIONE 1.3 (Unicità del limite). Se una successione reale risp. complessa $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) allora questo limite è unico.

DIM. Siano L ed M entrambi limiti della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|a_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che $|L - M| = 0$ e quindi $L = M$. □

OSSERVAZIONE 1.4. Una successione complessa $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si può scomporre nella sua parte reale e immaginaria:

$$a_n = \operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una successione complessa $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge se e solo se convergono le successioni reali $(\operatorname{Re} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\operatorname{Im} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Inoltre, in questo caso si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Queste affermazioni seguono dalle disuguaglianze

$$\max\{|\operatorname{Re}(a_n - L)|, |\operatorname{Im}(a_n - L)|\} \leq |a_n - L| \leq |\operatorname{Re}(a_n - L)| + |\operatorname{Im}(a_n - L)|.$$

DEFINIZIONE 1.5. Diremo che una successione reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a ∞ (“più infinito”) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Analogamente, diremo che una successione reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ (“meno infinito”) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leq -M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

ESERCIZIO 1.1. Verificare usando la definizione che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 1} = \infty.$$

Fissato $M > 0$ arbitrariamente grande, dobbiamo trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$(1.5) \quad \frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 1} \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Usiamo il *metodo delle maggiorazioni* e riduciamo la disuguaglianza data ad una disuguaglianza elementare. Come primo passo stimiamo il logaritmo con la disuguaglianza fondamentale

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } x > -1.$$

In effetti, ci basta la disuguaglianza $\log(1+n) \leq n$ per $n \in \mathbb{N}$, che può essere verificata per induzione. Usando questa informazione, si ottiene

$$\frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 1} \geq \frac{n^2(n-1)}{n^2 + 1} \geq \frac{n-1}{2},$$

per $n \geq 1$. Dunque ci siamo ridotti alla disuguaglianza elementare

$$\frac{n-1}{2} \geq M \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2M + 1.$$

Con una scelta di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \geq 2M + 1$, la (1.5) è verificata.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 1.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 1.5 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè $\pm\infty$.

Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice *limitata* se l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in \mathbb{R} (risp. in \mathbb{C}). Equivalentemente, la successione è limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIZIONE 1.6. Se una successione reale o complessa $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

DIM. Sia $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora $|a_n| \leq C$ per ogni $n = 1, \dots, \bar{n}$, elementarmente. Inoltre, per $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

□

TEOREMA 1.7 (Operazioni coi limiti). Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni in \mathbb{R} (risp. in \mathbb{C}) convergenti. Allora:

- 1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- 2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- 3) Se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e il limite di $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è 0, allora la successione quoziente $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

DIM. Indichiamo con $L, M \in \mathbb{R}$ (risp. $L, M \in \mathbb{C}$) i limiti delle successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

- 1) Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

2) Per la Proposizione 1.6, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ e $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - L b_n + L b_n - LM| \leq |b_n| |a_n - L| + |L| |b_n - M| \leq C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon.$$

3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $M \neq 0$ per ipotesi, esiste $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \hat{n}$ si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per $n \geq \max\{\bar{n}, \hat{n}\}$ si ha

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

TEOREMA 1.8 (Teorema del confronto). Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successioni reali tali che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti $L, M \in \mathbb{R}$ delle successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, rispettivamente. Se $L = M$, allora anche $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$.

DIM. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|c_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha anche

$$\begin{aligned} b_n - L &\leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon, \\ L - b_n &\leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

e quindi $|b_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$. □

DEFINIZIONE 1.9. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$ diremo che l'affermazione $A(n)$ è vera *definitivamente*.

Il Teorema sulle operazioni coi limiti e il Teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

PROPOSIZIONE 1.10. Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione infinitesima (ovvero $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora la successione prodotto $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesima.

DIM. Sia $C > 0$ una costante tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

ESERCIZIO 1.2. Provare le seguenti affermazioni.

- 1) Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$$

- 2) Siano $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$$

- 3) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞ , e sia $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale limitata. Provare che la successione somma $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a ∞ .

- 4) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞ , e sia $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale, positiva, staccata da 0 ovvero: esiste $\delta > 0$ tale che $b_n \geq \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a ∞ .