

# Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2013-2014

Roberto Monti

Versione del 12 Novembre 2013



## Contents

Chapter 1. Cardinalità	5
1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale	5
2. Cardinalità	8
3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili	10
4. Numeri naturali e induzione	12
5. Esercizi	14
Chapter 2. Numeri reali	17
1. Relazioni d'ordine	17
2. Introduzione assiomatica dei numeri reali	17
3. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$	21
4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico	22
5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico	24
6. Esercizi	26
Chapter 3. Successioni reali e complesse	29
1. Successioni numeriche	29
2. Esempi di successioni elementari	33
3. Successioni monotone	35
4. Limiti inferiore e superiore	37
5. Esercizi	39
Chapter 4. Serie reali e complesse	47
1. Serie numeriche. Definizioni	47
2. Serie geometrica. Serie telescopiche	48
3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali	49
4. Criterio di condesazione di Cauchy per serie reali	51
5. Convergenza assoluta di serie reali e complesse	52
6. Criterio di Abel-Dirichlet e criterio di Leibniz	53
7. Esercizi	56



## Cardinalità

### 1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

**1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi.** Non diamo una definizione di “insieme”. Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato “insieme ambiente”, che indicheremo con  $X$ . Se un elemento  $x$  di  $X$  appartiene ad un insieme  $A$  scriveremo  $x \in A$ . Se  $x$  non appartiene ad  $A$  scriveremo  $x \notin A$ . Con  $A \subset B$  si intende l’inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo  $\subset$  viene talvolta indicato con  $\subseteq$ . Se  $A \subset B$  e  $B \subset A$  gli insiemi  $A$  e  $B$  contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali,  $A = B$ .

L’unione e l’intersezione di due insiemi  $A$  e  $B$  si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

L’insieme che non contiene alcun elemento, l’*insieme vuoto*, si indica con  $\emptyset$ . Chiaramente, si ha  $\emptyset \subset A$  per ogni insieme  $A$ . Due insiemi  $A$  e  $B$  si dicono *disgiunti* se  $A \cap B = \emptyset$ .

La differenza di insiemi  $A \setminus B$  (leggi “ $A$  meno  $B$ ”) è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Talvolta la differenza  $A \setminus B$  è indicata con  $A - B$ .

Il complementare di un insieme  $A$  in  $X$  è l’insieme  $A' = X \setminus A$ . Talvolta il complementare è indicato con  $A^c$ . Con tale notazione si ha  $A \setminus B = A \cap B'$ . Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Più in generale, sia  $\Lambda$  una famiglia di indici e siano  $A_\lambda$  insiemi indicizzati da  $\lambda \in \Lambda$ . Allora l’unione e intersezione della famiglia  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  sono:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\},$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\}.$$

Le formule di De Morgan sono

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda, \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$\begin{aligned} X \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda, \\ X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X \setminus A_\lambda. \end{aligned}$$

**1.2. Funzioni fra insiemi.** Una funzione  $f : A \rightarrow B$  dall'insieme  $A$  all'insieme  $B$  è un'applicazione che associa ad ogni elemento  $x \in A$  un elemento  $f(x) \in B$ . L'insieme  $A$  si dice *dominio* e l'insieme  $B$  si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi  $A$  e  $B$  è l'insieme

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Con  $(x, y)$  si indica la *coppia ordinata* formata da  $x$  e  $y$ , nell'ordine. Il *grafico* di una funzione  $f : A \rightarrow B$  è il seguente sottoinsieme di  $A \times B$ :

$$\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\}.$$

**OSSERVAZIONE 1.1.** La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da  $A$  a  $B$*  è una terna ordinata  $(A, B, G)$  dove  $G \subset A \times B$  è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni  $x \in A$  esiste un unico  $y \in B$  tale che  $(x, y) \in G$ . L'insieme  $G = \text{gr}(f)$  è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione  $f : A \rightarrow B$  per indicare una funzione.

**DEFINIZIONE 1.2** (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme  $C \subset A$ , l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \{f(x) \in B : x \in C\} \\ &= \{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di  $C$  rispetto ad  $f$ .

Dato un insieme  $D \subset B$ , l'insieme

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di  $D$  rispetto ad  $f$ . Nel libro di G. De Marco, l'antimmagine viene indicata con la notazione  $f^{\leftarrow}(D) = f^{-1}(D)$ .

**PROPOSIZIONE 1.3.** Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano  $A_\lambda \subset A$  e  $B_\lambda \subset B$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Allora si ha:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), & f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda), \\ f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda), & f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned}$$

DIM. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned}
 y \in f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\Leftrightarrow \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } x \text{ ed esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).
 \end{aligned}$$

Nell'equivalenza centrale abbiamo usato il fatto che  $\exists x \exists \lambda \dots \Leftrightarrow \dots \exists \lambda \exists x$ .

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda).
 \end{aligned}$$

Proviamo l'inclusione in alto a destra:

$$\begin{aligned}
 y \in f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) &\Leftrightarrow \text{esiste } x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{esiste } x \text{ tale che per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
 &\Rightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
 &\Leftrightarrow \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } y \in f(A_\lambda) \\
 &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda).
 \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 1.4. Si noti che nell'ultimo argomento della dimostrazione precedente si hanno tutte equivalenze tranne che l'implicazione centrale, che è del tipo

$$\exists x \forall \lambda : A(x, \lambda) \text{ è vera} \Rightarrow \forall \lambda \exists x : A(x, \lambda) \text{ è vera,}$$

dove  $A(x, \lambda)$  è un'affermazione che riguarda  $x$  e  $\lambda$ . Tale implicazione non può essere invertita. Infatti, nell'antecedente c'è una  $x$  che rende vera l'affermazione per ogni  $\lambda$ . Nella conseguente, invece, per ogni  $\lambda$  c'è una  $x$  (che quindi dipende da  $\lambda$ ) che rende vera l'affermazione.

ESEMPIO 1.5. Sia  $A = \{0, 1\}$  un insieme formato da due elementi e sia  $B = \{0\}$ . L'unica funzione  $f : A \rightarrow B$  è  $f(0) = f(1) = 0$ . Detti  $A_0 = \{0\}$  e  $A_1 = \{1\}$ , si ha  $A_0 \cap A_1 = \emptyset$  e quindi  $f(A_0 \cap A_1) = \emptyset$ , mentre  $f(A_0) \cap f(A_1) = \{0\} \neq \emptyset$ .

DEFINIZIONE 1.6. Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice:

- i) *iniettiva* (1-1) se  $f(x) = f(y)$  implica  $x = y$  (equivalentemente se  $x \neq y$  implica  $f(x) \neq f(y)$ );
- ii) *suriettiva* (su) se per ogni  $y \in B$  esiste  $x \in A$  tale che  $f(x) = y$ ;

iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$$\begin{aligned} f : A &\xrightarrow{1-1} B && \text{funzione iniettiva,} \\ f : A &\xrightarrow{\text{su}} B && \text{funzione suriettiva,} \\ f : A &\xrightarrow[\text{su}]{1-1} B && \text{funzione iniettiva e suriettiva.} \end{aligned}$$

**DEFINIZIONE 1.7** (Funzione inversa e composta). Se  $f : A \rightarrow B$  è una funzione iniettiva, allora  $f : A \rightarrow f(A)$  è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa*  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : C \rightarrow D$  due funzioni tali che  $f(A) \subset C$ . Allora è ben definita la *funzione composta*  $g \circ f : A \rightarrow D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se  $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$  allora si ha:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \text{Id}_A && \text{funzione identità su } A, \\ f \circ f^{-1} &= \text{Id}_B && \text{funzione identità su } B. \end{aligned}$$

**DEFINIZIONE 1.8.** Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione. Una funzione  $g : B \rightarrow A$  si dice *inversa sinistra* di  $f$  se  $g \circ f = \text{Id}_A$ . Una funzione  $h : B \rightarrow A$  si dice *inversa destra* di  $f$  se  $f \circ h = \text{Id}_B$ .

**OSSERVAZIONE 1.9.** Se  $f : A \rightarrow B$  è suriettiva, allora per ogni  $y \in B$  la “fibra”  $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$  è non vuota. Con l’Assioma della Scelta, per ogni  $y \in B$  si può selezionare un elemento  $x \in f^{-1}(\{y\})$  e definire una funzione  $h : B \rightarrow A$  ponendo  $h(y) = x$ . Dunque, si ha  $f \circ h(y) = f(h(y)) = y$  per ogni  $y \in B$ . La funzione  $h$  è un’inversa destra di  $f$ .

## 2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

**DEFINIZIONE 2.1.** Siano  $A$  e  $B$  insiemi. Diremo che:

- i)  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$  se esiste una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow B$ ;
- ii)  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$  se esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $f : A \rightarrow B$ ;
- iii)  $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$  se  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(B)$  ma non esiste alcuna funzione suriettiva  $f : A \rightarrow B$ .

Se  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$  diremo che gli insiemi  $A$  e  $B$  sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile.

**TEOREMA 2.2** (Tricotomia dei cardinali). Vale sempre una delle seguenti tre possibilità:  $\text{Card}(A) < \text{Card}(B)$ , oppure  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ , oppure  $\text{Card}(B) < \text{Card}(A)$ .



La dimostrazione di questo teorema richiede l'Assioma della Scelta ed è omessa. Proveremo invece che l'affermazione  $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$  equivale all'esistenza di una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow B$  e di una funzione iniettiva  $g : B \rightarrow A$ .

Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme  $A$  è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di  $A$ :

$$\mathcal{P}(A) = \{E : E \subset A\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme  $\mathcal{P}(A)$  contiene sempre l'elemento  $\emptyset$ .

**TEOREMA 2.3 (Cantor-Schröder-Bernstein).** Siano  $A$  e  $B$  due insiemi, e siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow A$  due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $h : A \rightarrow B$ .

**DIM.** Premettiamo un argomento preparatorio. Consideriamo una funzione  $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  che preserva le inclusioni:

$$(2.2) \quad E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F).$$

Affermiamo che esiste  $F \in \mathcal{P}(A)$  tale che  $F = T(F)$  (punto fisso).

Si consideri la famiglia di insiemi  $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\}$ . È certamente  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  in quanto  $\emptyset \in \mathcal{A}$ . Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che  $T(F) = F$ . Infatti, usando le proprietà (1.1) e (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\left(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\right) = T(F).$$

D'altra parte, applicando  $T$  all'inclusione  $F \subset T(F)$  si ottiene  $T(F) \subset T(T(F))$  e quindi  $T(F) \in \mathcal{A}$ , da cui segue l'inclusione opposta  $T(F) \subset F$ . La conclusione è che  $T(F) = F$ .

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia  $T : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che  $T$  preserva le inclusioni:

$$\begin{aligned} E \subset F &\Rightarrow f(E) \subset f(F) \\ &\Rightarrow B \setminus f(F) \subset B \setminus f(E) \\ &\Rightarrow g(B \setminus f(F)) \subset g(B \setminus f(E)) \\ &\Rightarrow A \setminus g(B \setminus f(E)) \subset A \setminus g(B \setminus f(F)). \end{aligned}$$

Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso  $A_1 \in \mathcal{P}(A)$  di  $T$  ovvero un insieme tale che  $T(A_1) = A_1$ . Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente  $A = A_1 \cup A_2$  e  $B = B_1 \cup B_2$  con unioni disgiunte. La funzione  $f : A_1 \rightarrow B_1$  è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che  $g(B_2) = A_2$ . Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque,  $g : B_2 \rightarrow A_2$  è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva  $h : A \rightarrow B$  nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

□

PROPOSIZIONE 2.4. Per ogni insieme  $A$  risulta  $\text{Card}(A) < \text{Card}(\mathcal{P}(A))$ .

DIM. Certamente  $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(A))$  in quanto la funzione  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ,  $f(x) = \{x\}$  è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ . La dimostrazione si basa sul “paradosso di Russell”. Si consideri l’insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè  $f$  è suriettiva, esiste  $x_0 \in A$  tale che  $f(x_0) = A_0$ . Ci sono due casi:

Caso 1:  $x_0 \in A_0$ . Allora:  $x_0 \notin f(x_0) = A_0$ , assurdo.

Caso 2:  $x_0 \notin A_0$ . Allora:  $x_0 \in f(x_0) = A_0$ , assurdo.

□

### 3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l’insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$  per escludere lo 0.

**1. Insieme finito.** Un insieme  $A$  si dice *finito* se esistono  $n \in \mathbb{N}$  ed una funzione  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$  iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che  $\text{Card}(A) = n$ . Se  $A$  non è finito, diremo che  $A$  è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo  $\text{Card}(A) = \infty$ .

PROPOSIZIONE 3.1. Se  $A$  è un insieme finito ed  $f : A \rightarrow A$  è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- 1)  $f$  è iniettiva;
- 2)  $f$  è suriettiva;
- 3)  $f$  è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio e si può fare per induzione sulla cardinalità di  $A$ .

ESEMPIO 3.2. L’insieme dei numeri pari  $2\mathbb{N} = \{0, 2, \dots, 2n, \dots\}$  è infinito ed è equipotente con  $\mathbb{N}$ . Infatti, la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ ,  $f(n) = 2n$  è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

DEFINIZIONE 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

**2. Insieme numerabile.** Un insieme  $A$  si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Diremo in questo caso che:

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad (\text{Alef zero}).$$

Il cardinale  $\aleph_0$  è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se  $A$  è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ . La costruzione di  $f$  è induttiva:

- i) Se definisce  $f(0) \in A$  a piacere;
- ii) Definiti  $f(1), \dots, f(n) \in A$  distinti, si osserva che l'insieme  $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$  non è vuoto, altrimenti  $A$  sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento  $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ . Ne risulta una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile  $A$  possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da  $n \in \mathbb{N}$ :

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

**3.  $\mathbb{Z}$  è numerabile.** L'insieme  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

**4.  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  è numerabile.** Proviamo che il prodotto cartesiano  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  è numerabile, ovvero che

$$\text{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,  $f(n) = (n, 1)$  è iniettiva. D'altra parte, la funzione  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(n, m) = 2^n 3^m$  è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.3 esiste una funzione iniettiva e suriettiva  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

**ESERCIZIO 3.1.** Controllare che la funzione  $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  così definita

$$h(n, m) = 2^m(2n+1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

**5.  $A \times A$  è numerabile se  $A$  è numerabile.** Se  $A$  è numerabile, anche il prodotto cartesiano  $A \times A$  è numerabile. Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  iniettiva e suriettiva. Allora  $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A \times A$ ,  $F(n, m) = (f(n), f(m))$  è iniettiva e suriettiva. La composizione  $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow A \times A$  è allora iniettiva e suriettiva. Qui  $h$  è la funzione definita sopra.

**6.  $\mathbb{Q}$  è numerabile.** L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$  e quindi l'inclusione è iniettiva da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{Q}$ . Si consideri la funzione  $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione  $g$  è iniettiva. Siccome  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  è numerabile, esiste  $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva e suriettiva. Dunque  $h \circ g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  è iniettiva.

### 7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

**PROPOSIZIONE 3.4.** Siano  $A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$ , insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  è al più numerabile.

**DIM.** Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi  $A_n$  siano a coppie disgiunti, ovvero  $A_n \cap A_m = \emptyset$  se  $n \neq m$ , e che  $A_n \neq \emptyset$ . Vogliamo provare che  $A$  è numerabile.

Enumeriamo gli elementi di  $A_n$  in questo modo:

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,j}, \dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ ,  $f(n) = a_{n,1}$  è iniettiva. Costruiamo una funzione  $g : A \rightarrow \mathbb{N}$  iniettiva. È noto che l'insieme  $P \subset \mathbb{N}$  dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo  $P$ :

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}.$$

Definiamo la funzione  $g : A \rightarrow \mathbb{N}$  nel seguente modo:

$$g(a_{n,j}) = p_n^j, \quad n, j \in \mathbb{N}, n, j \geq 1.$$

La funzione  $g$  è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j}) = g(a_{m,k}) \Leftrightarrow p_n^j = p_m^k \Leftrightarrow n = m, j = k \Leftrightarrow a_{n,j} = a_{m,k}.$$

□

**8.  $\mathbb{R}$  non è numerabile.** Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  non è numerabile. È più che numerabile.

### 4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione*.

**Principio d'induzione.** Sia  $A(n)$  un'affermazione che riguarda il numero naturale  $n \in \mathbb{N}$ . Supponiamo che:

- i)  $A(0)$  (oppure  $A(1)$  se  $\mathbb{N}$  inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
- ii)  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (*passo induttivo*).

Allora  $A(n)$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**4.1. Formula per la somma geometrica.** Per ogni numero reale  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 1$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$(4.3) \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

La formula vale anche se  $x \in \mathbb{C}$  è un numero complesso  $x \neq 1$ . La prova è per induzione su  $n \geq 1$ . Per  $n = 1$  si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per  $n \in \mathbb{N}$ . Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

**4.2. Disuguaglianza di Bernoulli.** Sia  $x \in \mathbb{R}$  un numero reale tale che  $x > -1$ . Allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha:

$$(4.4) \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

La prova è per induzione su  $n \geq 1$ . Per  $n = 1$  si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo  $n \in \mathbb{N}$  e proviamola per  $n + 1$ :

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

**4.3. Formula del Binomio di Newton.** Il *fattoriale*  $n!$  si definisce per induzione nel seguente modo:

- i)  $0! = 1$  e  $1! = 1$ ;
- ii)  $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$ .

Dati  $n, k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq n$ , si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Siano  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando  $n = 1$  la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per  $n$  e proviamola per  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}. \end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni  $n, k \in \mathbb{N}$  con  $k \leq n$  vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k. \end{aligned}$$

## 5. Esercizi

ESERCIZIO 5.1. Completare la dimostrazione della Proposizione 1.3. Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione e siano  $B_\lambda \subset B$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Provare che

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

ESERCIZIO 5.2. Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in A \subset \mathbb{R}$ .

- 1) Calcolare il dominio  $A \subset \mathbb{R}$  di  $f$ , ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui  $f$  è definita.
- 2) Calcolare l'immagine  $f(A) \subset \mathbb{R}$ .
- 3) Stabilire se  $f$  è iniettiva.
- 4) Al variare di  $y \in \mathbb{R}$  calcolare le "fibre"  $f^{-1}(\{y\}) \subset A$ .

ESERCIZIO 5.3. Siano  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  il disco unitario,  $z_0 \in \mathbb{C}$  con  $|z_0| < 1$ , ed  $f : D \rightarrow D$  sia la funzione

$$f(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}.$$

- 1) Verificare che  $f$  è definita su tutto  $D$  e che  $f(D) \subset D$ ;
- 2) Provare che  $f$  è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa  $f^{-1} : D \rightarrow D$ .

ESERCIZIO 5.4. Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione.

- 1) Provare che per ogni insieme  $C \subset A$  si ha

$$C \subset f^{-1}(f(C)).$$

Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui  $f$  sia iniettiva.

- 2) Provare che per ogni insieme  $D \subset B$  si ha

$$f(f^{-1}(D)) \subset D.$$

Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui  $f$  sia suriettiva.

ESERCIZIO 5.5. Siano  $A, B, C$  insiemi finiti e indichiamo con  $|A| = \text{Card}(A)$  la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

ESERCIZIO 5.6. Siano  $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$  e  $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ . Esibendo biiezioni concrete, provare che:

- 1)  $\text{Card}([0, 1]) = \text{Card}([0, 1))$ ;
- 2)  $\text{Card}([0, 1]) = \text{Card}((0, 1))$ ;
- 3)  $\text{Card}([0, 1]) = \text{Card}(\mathbb{R})$ .

ESERCIZIO 5.7. Verificare mediante induzione le seguenti identità per  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2.$$

ESERCIZIO 5.8. Sia  $x \in \mathbb{R}$  un numero reale tale che  $0 < x < 1$ . Usando il principio di induzione, mostrare che per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , vale

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

ESERCIZIO 5.9. Dimostrare per induzione che

- 1)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1), \quad n \geq 1$
- 2)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1,$
- 3)  $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \quad n \geq 6.$

ESERCIZIO 5.10. Sia  $\mathcal{A} = \{I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervallo}\}$  un insieme costituito da intervalli non degeneri  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  con  $-\infty < a < b < \infty$ . Supponiamo che  $\mathcal{A}$  verifichi:  $I, J \in \mathcal{A}$  con  $I \cap J \neq \emptyset$  implica  $I = J$  (ovvero, gli intervalli sono a coppie disgiunti).

Dimostrare che  $\mathcal{A}$  è numerabile.

Suggerimento: stimare il numero di intervalli di  $\mathcal{A}$  di lunghezza maggiore di  $1/n$  contenuti nell'intervallo  $(-m, m)$ , con  $n, m \geq 1$ .

ESERCIZIO 5.11. Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  ed  $n, m \in \mathbb{N}$  con  $n \geq m$ . Calcolare il resto della divisione del polinomio  $p(x) = (x+a)^n$  per il polinomio  $q(x) = (x+b)^m$ . Precisamente, calcolare i polinomi  $s(x)$  (il quoziente della divisione) ed  $r(x)$  (il resto della divisione) tali che  $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ , dove il grado di  $r$  è al più  $m-1$ .

ESERCIZIO 5.12. Sia  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  una funzione iniettiva tale che per ogni  $x, y \in \mathbb{Z}$  si abbia

$$|x - y| \leq 10 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq 10.$$

Determinare la funzione  $f$ .

ESERCIZIO 5.13. i) Costruire una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tale che  $f^{-1}(\{y\})$  sia numerabile per ogni  $y \in [0, 1]$ .

ii) Costruire una funzione  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tale che  $\text{Card}(f^{-1}(\{y\})) = \text{Card}(\mathbb{R})$  per ogni  $y \in [0, 1]$ . Assumere come noto il fatto che  $\text{Card}([0, 1] \times [0, 1]) = \text{Card}([0, 1])$ .



## CHAPTER 2

# Numeri reali

### 1. Relazioni d'ordine

Premettiamo le definizioni di relazione, relazione d'ordine parziale e relazione d'ordine totale.

**DEFINIZIONE 1.1 (Relazione).** Una relazione su un insieme  $X$  è un sottoinsieme  $R \subset X \times X$ . Dati  $x, y \in X$ , diciamo che  $x$  è nella relazione  $R$  con  $y$  se  $(x, y) \in R$ . Scriveremo in questo caso  $xRy$ .

**DEFINIZIONE 1.2 (Ordine parziale).** Una relazione  $\leq$  su un insieme  $X$  è una relazione di *ordine parziale* se per ogni  $x, y, z \in X$  si ha:

- i)  $x \leq x$  (proprietà riflessiva);
- ii) Se  $x \leq y$  e  $y \leq x$  allora  $x = y$  (proprietà antisimmetrica);
- iii) Se  $x \leq y$  e  $y \leq z$  allora  $x \leq z$  (proprietà transitiva).

Ad esempio, l'insieme  $X = \mathcal{P}(A)$  con la relazione di inclusione insiemistica  $\subset$  è parzialmente ordinato.

**DEFINIZIONE 1.3 (Ordine totale).** Una relazione  $\leq$  su un insieme  $X$  è una relazione di *ordine totale* se per ogni  $x, y, z \in X$  si ha:

- i)  $x \leq x$  (proprietà riflessiva);
- ii) Se  $x \leq y$  e  $y \leq x$  allora  $x = y$  (proprietà antisimmetrica);
- iii) Se  $x \leq y$  e  $y \leq z$  allora  $x \leq z$  (proprietà transitiva);
- iv)  $x \leq y$  oppure  $y \leq x$  (confrontabilità).

### 2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo*. Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

**DEFINIZIONE 2.1.** I numeri reali sono un insieme  $\mathbb{R}$  munito di due operazioni  $+$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e di una relazione di ordine totale  $\leq$  che verificano, per ogni  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

- (S1)  $x + y = y + x$  (proprietà commutativa);
- (S2)  $x + (y + z) = (x + y) + z$  (proprietà associativa);
- (S3) esiste  $0 \in \mathbb{R}$  tale che  $x + 0 = x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (esiste l'elemento neutro);
- (S4) per ogni  $x \in \mathbb{R}$  esiste  $-x \in \mathbb{R}$  tale che  $x + (-x) = 0$  (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

- (P1)  $x \cdot y = y \cdot x$  (proprietà commutativa);
- (P2)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$  (proprietà associativa);

(P3) esiste  $1 \in \mathbb{R}$ ,  $1 \neq 0$ , tale che  $1 \cdot x = x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (esiste l'elemento neutro);

(P4) per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , esiste  $x^{-1} \in \mathbb{R}$  tale che  $x \cdot x^{-1} = 1$  (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

$$(D) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Assiomi dell'ordine:

(O1) se  $x \leq y$  allora  $x + z \leq y + z$ ;

(O2) se  $x \leq y$  e  $z \geq 0$ , allora  $x \cdot z \leq y \cdot z$ .

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto  $A \subset \mathbb{R}$  superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve.

DEFINIZIONE 2.2 (Campo, campo ordinato, campo ordinato completo).

i) Un insieme  $X$  munito di due operazioni  $+$  e  $\cdot$  che verificano gli assiomi (o proprietà) (S1)-(D) si dice *campo*.

ii) Se, in aggiunta ad i), vi è su  $X$  una relazione di ordine totale  $\leq$  che verifica gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*.

iii) Se, infine,  $(X, +, \cdot, \leq)$  verifica anche l'assioma di completezza, si ottiene un *campo ordinato completo*.

Ad esempio,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  sono campi;  $\mathbb{Q}$  ed  $\mathbb{R}$  sono campi ordinati;  $\mathbb{R}$  è un campo ordinato completo.

Gli insiemi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  sono in modo naturale sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ .

ESEMPIO 2.3. A titolo di esempio, facciamo alcuni calcoli basandoci solo sugli assiomi di campo ordinato.

1) Si ha  $(-1) \cdot (-1) = 1$ . Infatti:

$$0 = 0 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$$

e la tesi segue sommando a destra e sinistra 1.

2) Si ha  $-x = (-1) \cdot x$ . Infatti:

$$0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x,$$

e aggiungendo a destra e sinistra  $-x$  si trova la tesi.

3) Si ha  $x^2 \geq 0$  per ogni  $x$  nel campo ordinato. Infatti, se  $x \geq 0$  allora  $x \cdot x \geq x \cdot 0 = 0$ . Se invece  $x \leq 0$  allora  $-x \geq 0$  e quindi

$$0 \leq (-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot x = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2.$$

PROPOSIZIONE 2.4. I numeri complessi  $\mathbb{C}$  sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

DIM. Che  $\mathbb{C}$  sia un campo è noto dal corso di Geometria. Supponiamo per assurdo che ci sia su  $\mathbb{C}$  una relazione d'ordine totale  $\geq$ . L'unità immaginaria  $i = \sqrt{-1}$  dovrebbe allora verificare  $-1 = i^2 \geq 0$  e quindi si avrebbe  $1 \leq 0$ . D'altra parte si ha anche  $1 = 1^2 \geq 0$ . Si deduce che  $1 = 0$  e questo non è possibile.  $\square$

DEFINIZIONE 2.5 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia  $A \subset \mathbb{R}$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ .

- i) Un elemento  $y \in \mathbb{R}$  è un *maggiorante* di  $A$  se  $x \leq y$  per ogni  $x \in A$ .
- ii) L'insieme  $A$  si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
- iii) Un elemento  $x \in \mathbb{R}$  si dice *estremo superiore* di  $A$  se è un maggiorante di  $A$  e se  $x \leq z$  per ogni altro maggiorante  $z$  di  $A$  (ovvero  $x$  è il minimo dei maggioranti). Se  $x \in \mathbb{R}$  è l'estremo superiore di  $A$  porremo

$$\sup A = x.$$

- iv) Se  $A$  non è superiormente limitato porremo

$$\sup A = \infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre  $\sup \emptyset = -\infty$ .

- v) Un numero  $x \in \mathbb{R}$  si dice *massimo* di  $A$  se  $x = \sup A$  ed  $x \in A$ . Scriveremo in questo caso

$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici.

OSSERVAZIONE 2.6 (Caratterizzazione dell'estremo superiore). Un numero  $x \in \mathbb{R}$  è l'estremo superiore di un insieme  $A \subset \mathbb{R}$  se e solo se:

- i)  $y \leq x$  per ogni  $y \in A$  ( $x$  è un maggiorante);
- ii) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $y \in A$  tale che  $y > x - \varepsilon$  ( $x$  è il minimo dei maggioranti).

DEFINIZIONE 2.7 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia  $A \subset \mathbb{R}$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ .

- i) Un elemento  $y \in \mathbb{R}$  è un *minorante* di  $A$  se  $y \leq x$  per ogni  $x \in A$ .
- ii) L'insieme  $A$  si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
- iii) Un elemento  $x \in \mathbb{R}$  si dice *estremo inferiore* di  $A$  se è un minorante di  $A$  e se  $z \leq x$  per ogni altro minorante  $z$  di  $A$  (ovvero  $x$  è il massimo dei minoranti). Se  $x \in \mathbb{R}$  è l'estremo inferiore di  $A$  porremo

$$\inf A = x.$$

- iv) Se  $A$  non è inferiormente limitato porremo

$$\inf A = -\infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre  $\inf \emptyset = \infty$ .

- v) Un numero  $x \in \mathbb{R}$  si dice *minimo* di  $A$  se  $x = \inf A$  ed  $x \in A$ . Scriveremo in questo caso

$$\min A = x.$$

OSSERVAZIONE 2.8 (Formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza). Riteniamo l'Assioma di completezza dei numeri reali:

(AC) Ogni insieme non vuoto  $A \subset \mathbb{R}$  superiormente limitato ha estremo superiore. Tale assioma può essere riformulato in diversi modi fra loro equivalenti:

- 1) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferiormente limitato di  $\mathbb{R}$  ha estremo inferiore.

- 2) Ogni sezione di  $\mathbb{R}$  ha un unico elemento separatore.
- 3) Ogni successione monotona e limitata in  $\mathbb{R}$  è convergente.
- 4) Ogni successione limitata in  $\mathbb{R}$  ha una sottosuccessione convergente (proprietà di Bolzano-Weierstrass).
- 5) Ogni successione di Cauchy in  $\mathbb{R}$  è convergente (ovvero,  $\mathbb{R}$  è uno spazio metrico completo).
- 6) Ogni successione di intervalli chiusi non vuoti  $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tale che  $I_{k+1} \subset I_k$  verifica

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset.$$

Ritorniamo su questi concetti durante il corso.

### 2.1. Conseguenze della completezza.

**PROPOSIZIONE 2.9** (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x, y > 0$ , esiste un numero naturale  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $nx > y$ .

**DIM.** Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x, y > 0$  tali che  $nx \leq y$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora l'insieme

$$A = \{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$$

è superiormente limitato, in quanto  $y$  ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore  $\bar{x} = \sup A$ . Il numero  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

- 1)  $nx \leq \bar{x}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , ovvero  $\bar{x}$  è un maggiorante di  $A$ ;
- 2) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $nx > \bar{x} - \varepsilon$ , ovvero  $\bar{x}$  è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo  $\varepsilon = x > 0$  nella proprietà 2) e sia  $n \in \mathbb{N}$  il corrispondente numero naturale, ovvero  $nx > \bar{x} - x$ . Allora da 1) e 2) si ottiene:

$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$

che è una contraddizione. □

**DEFINIZIONE 2.10** (Parte intera e frazionaria). Sia  $x \in \mathbb{R}$  un numero reale e si consideri l'insieme

$$A_x = \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\}.$$

Per la proprietà di Archimede, esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $n > x$ . Quindi  $A_x$  è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque massimo. Definiamo la *parte intera di  $x$*

$$[x] = \max \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero  $[x] \in \mathbb{Z}$  è il più grande intero minore o uguale ad  $x$ . La *parte frazionaria di  $x$*  è il numero  $\{x\} = x - [x]$ .

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo che i numeri razionali  $\mathbb{Q}$  sono densi in  $\mathbb{R}$ .

**PROPOSIZIONE 2.11** (Densità di  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$ ). Per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ , esiste  $q \in \mathbb{Q}$  tale che  $x < q < y$ .

**DIM.** Siccome  $y - x > 0$ , per la proprietà di Archimede esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $n(y - x) > 1$ , ovvero  $ny - nx > 1$ , ovvero  $nx < ny - 1$ . Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{[ny]}{n} \leq y.$$

Cerchiamo ora  $m \in \mathbb{N}$  tale che

$$x < \frac{[ny]}{n} - \frac{1}{m} < y.$$

La disuguaglianza a sinistra è equivalente a

$$m\left(\frac{[ny]}{n} - x\right) > 1,$$

ed un tale  $m \in \mathbb{N}$  esiste per la proprietà di Archimede.  $\square$

### 3. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$

La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) L'unicità di un campo ordinato completo.

È possibile dimostrare (ma noi non lo faremo) che due campi ordinati completi sono fra loro *isomorfi*. In questo senso esiste un unico campo ordinato completo, i numeri reali  $\mathbb{R}$ .

Illustriamo brevemente, senza dimostrazioni, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Sottolineamo che l'Assioma di Completezza è ora un Teorema.

**DEFINIZIONE 3.1.** Un insieme  $A \subset \mathbb{Q}$  è una sezione (di Dedekind) se:

- (i)  $A, A' \neq \emptyset$ , dove  $A'$  è il complementare di  $A$  in  $\mathbb{Q}$ ;
- (ii) se  $a \in A$  allora  $b \in A$  per ogni numero razionale  $b \leq a$ ;
- (iii) se  $a \in A$  esiste  $b \in A$  con  $a < b$ .

**OSSERVAZIONE 3.2.** La proprietà (iii) precisa che vogliamo considerare solo sezioni aperte di  $\mathbb{Q}$ . In questo modo, ad ogni numero razionale  $q \in \mathbb{Q}$  corrisponde l'unica sezione

$$A_q = \{a \in \mathbb{Q} : a < q\}.$$

Esistono sezioni che non corrispondono a numeri razionali. Ad esempio, questo è il caso della sezione

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0 \text{ oppure } a^2 < 2\}.$$

Indichiamo con  $\mathcal{A}$  l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con  $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$  la sezione nulla e con  $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$  la sezione unitaria.

**1. Relazione d'ordine.** Se  $A$  e  $B$  sono sezioni, diciamo che  $A \leq B$  se  $A \subset B$ . L'insieme  $\mathcal{A}$  è totalmente ordinato dalla relazione  $\leq$ .

**2. Somma.** Se  $A$  e  $B$  sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A, b \in B\}.$$

La sezione opposta è per definizione  $-A = \{b \in \mathbb{Q} : \text{esiste } a > b \text{ tale che } -a \in A'\}$ . Scriviamo  $A - B = A + (-B)$ .

**3. Prodotto.** La sezione prodotto si definisce per casi. Se  $A, B \geq 0$  definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A, b \in B, \text{ tali che } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

Se  $A, B \leq 0$  si definisce  $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$ , se  $A \geq 0$  e  $B \leq 0$  si definisce  $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$ , e se  $A \leq 0$  e  $B \geq 0$  si definisce  $A \cdot B = -(-A) \cdot B$ . Infine, per ogni sezione  $A > 0$  si definisce la sezione reciproca  $A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} : \text{esiste } a > b \text{ tale che } a^{-1} \in A'\}$ . Se invece  $A < 0$  si definisce  $A^{-1} = -(-A)^{-1}$ .

Con pazienti verifiche si controlla che  $\mathcal{A}$  è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

**4. Assioma di completezza.** Proviamo la proprietà di completezza.

**TEOREMA 3.3.** L'insieme  $\mathcal{A}$  con le operazioni  $+$  e  $\cdot$  e con la relazione d'ordine  $\leq$  è un campo ordinato *completo*.

**DIM.** Ci interessa verificare la completezza. Sia  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  un insieme superiormente limitato e non vuoto. Questo significa che esiste una sezione  $A \in \mathcal{A}$  tale che  $B \subset A$  per ogni sezione  $B \in \mathcal{B}$ . Vogliamo provare che  $\mathcal{B}$  ha estremo superiore. Definiamo l'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{Q}.$$

Controlliamo che  $C$  è una sezione di  $\mathbb{Q}$ :

- i)  $C \neq \emptyset$  in quanto  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ . Inoltre,  $C \subset A$  implica  $A' \subset C'$  e poichè per ipotesi  $A' \neq \emptyset$ , segue che  $C' \neq \emptyset$ .
- ii) Siano  $x, y \in \mathbb{Q}$  tali che  $x \in C$  e  $y \leq x$ . Allora esiste  $B \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B$ , e siccome  $B$  è una sezione segue che  $y \in B$ . Dunque si ha anche  $y \in C$ .
- iii) Se  $x \in C$  allora esiste  $B \in \mathcal{B}$  tale che  $x \in B$ . Siccome  $B$  è una sezione, esiste  $y \in B$  tale che  $x < y$ . Ma allora sia ha anche  $y \in C$ .

Verifichiamo infine che  $C = \sup \mathcal{B}$ .

- i) Sicuramente  $B \subset C$  per ogni  $B \in \mathcal{B}$ , ovvero  $C$  è un maggiorante di  $\mathcal{B}$ .
- ii) Proviamo che  $C$  è il minimo dei maggioranti. Sia  $D \in \mathcal{A}$  un maggiorante di  $\mathcal{B}$ . Dalle inclusioni  $B \subset D$  per ogni  $B \in \mathcal{B}$ , segue che

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset D.$$

□

È possibile una costruzione puramente metrica di  $\mathbb{R}$ , che prescindere dalla relazione d'ordine. Precisamente,  $\mathbb{R}$  può essere costruito come il completamento metrico di  $\mathbb{Q}$ .

#### 4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su  $\mathbb{R}$  è la funzione  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari  $x \leq |x|$  e  $-x \leq |x|$ , ed inoltre:

- i)  $|x| \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e  $|x| = 0$  se e solo se  $x = 0$ ;
- ii)  $|x| = |-x|$ ;
- iii)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$  (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti,  $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$ . Dalla iii) segue anche  $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$  che riordinata fornisce  $|x| - |y| \leq |x - y|$ . Siccome i ruoli di  $x, y$  si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza*  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ . Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

- i)  $d(x, y) \geq 0$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$ ;
- ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  per ogni  $x, y \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  per ogni  $x, y, z \in \mathbb{R}$  (disuguaglianza triangolare).

La coppia  $(\mathbb{R}, d)$  è allora uno *spazio metrico*. La funzione  $d(x, y) = |x - y|$  si dice distanza standard o Euclidea su  $\mathbb{R}$ .

Possiamo anticipare la definizione generale di spazio metrico.

**DEFINIZIONE 4.1** (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia  $(X, d)$  dove  $X$  è un insieme e  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni  $x, y, z \in X$  verifica le seguenti proprietà:

- 1)  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$ ;
- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (simmetria);
- 3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (disuguaglianza triangolare).

Dato uno spazio metrico  $(X, d)$ , fissato un punto  $x_0 \in X$  ed un raggio  $r > 0$ , l'insieme

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = B_X(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro  $x_0$  e raggio  $r$ . Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Nello spazio metrico  $\mathbb{R}$  con la distanza standard, le palle sono intervalli aperti che si indicano anche con la seguente notazione:

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

**4.1. Intervalli.** Gli intervalli di  $\mathbb{R}$  possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Ecco l'elenco. Siano  $-\infty < a < b < \infty$ . Si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{intervallo aperto,} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{intervallo aperto a destra,} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{intervallo aperto a sinistra,} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{intervallo chiuso.}\end{aligned}$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$\begin{aligned}(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} && \text{intervallo aperto,} \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} && \text{intervallo chiuso,} \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} && \text{intervallo aperto,} \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} && \text{intervallo chiuso,}\end{aligned}$$

cui si aggiunge l'intervallo  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ .

La famiglia degli intervalli di  $\mathbb{R}$  coincide con la famiglia degli insiemi convessi di  $\mathbb{R}$ . Inoltre, la famiglia degli intervalli di  $\mathbb{R}$  coincide con la famiglia degli insiemi connessi di  $\mathbb{R}$ .

## 5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Indichiamo con  $\mathbb{R}^n$  lo spazio Euclideo  $n$ -dimensionale,  $n \in \mathbb{N}$  con  $n \geq 1$ :

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

Un elemento  $x \in \mathbb{R}^n$  ha  $n$  coordinate reali  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Su  $\mathbb{R}^n$  è definita un'operazione di somma vettoriale

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Questa operazione è associativa e commutativa. Su  $\mathbb{R}^n$  è definita un'operazione di *prodotto per uno scalare*. Dati  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definiamo

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

In questo modo  $\mathbb{R}^n$  ha una struttura di *spazio vettoriale*, come si vedrà nel corso di geometria.

**DEFINIZIONE 5.1 (Prodotto scalare).** Definiamo l'operazione  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di  $\mathbb{R}^n$ .

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenero. Precisamente, per ogni  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  valgono le seguenti proprietà:

- 1)  $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ ;
- 2)  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ;
- 3)  $\langle x, x \rangle = 0$  se e solo se  $x = 0$ .



Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo  $(x, y)$  oppure con il simbolo  $x \cdot y$ .

**DEFINIZIONE 5.2** (Norma Euclidea). La norma Euclidea su  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , è la funzione  $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  così definita

$$|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente,  $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma. Precisamente, per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  si verifica:

- 1)  $|x| \geq 0$  e  $|x| = 0$  se e solo se  $x = 0$ ;
- 2)  $|\lambda x| = |\lambda| |x|$  (omogeneità);
- 3)  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

**PROPOSIZIONE 5.3** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^n$  vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| |y|.$$

**DIM.** Il polinomio reale della variabile  $t \in \mathbb{R}$ :

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t \langle x, y \rangle + t^2 |y|^2$$

non è mai negativo,  $P(t) \geq 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , e dunque il suo discriminante verifica  $\Delta = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$ . La tesi segue estraendo le radici.  $\square$

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + 2 \langle x, y \rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su  $\mathbb{R}^n$  la funzione distanza  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico  $(\mathbb{R}^n, d)$  si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

è la palla Euclidea di raggio  $r > 0$  centrata in  $x \in \mathbb{R}^n$ .

## 6. Esercizi

### 6.1. Numeri reali e razionali. Parte intera e frazionaria.

ESERCIZIO 6.1. Usando gli Assiomi (S1)-(O2) per un campo ordinato provare che per ogni  $x, y, z$  vale l'implicazione:  $x \leq y$  e  $z \leq 0 \Rightarrow yz \leq xz$ .

Indicare in ciascun passaggio la proprietà che si utilizza.

ESERCIZIO 6.2. i) Verificare che  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ . ii) Verificare che  $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$ .

ESERCIZIO 6.3. Verificare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , si ha:

$$[x] + [x + 1/n] + \dots + [x + (n-1)/n] = [nx],$$

dove  $[x]$  è la parte intera di  $x$ .

### 6.2. Estremo superiore ed inferiore. Massimo e minimo.

ESERCIZIO 6.4. Sia  $A \subset \mathbb{R}$  il seguente insieme

$$A = \left\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1 \right\}.$$

- 1) Calcolare  $\sup A$  e dire se esiste  $\max A$ .
- 2) Calcolare  $\inf A$  e dire se esiste  $\min A$ .

ESERCIZIO 6.5. Sia  $A \subset \mathbb{R}$  il seguente insieme

$$A := \{n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

- 1) Calcolare  $\sup A$  e dire se esiste  $\max A$ .
- 2) Calcolare  $\inf A$  e dire se esiste  $\min A$ .

ESERCIZIO 6.6. Sia  $A \subset \mathbb{R}$  il seguente insieme

$$A := \left\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

Provare che  $\inf A = -\infty$ .

ESERCIZIO 6.7. Siano  $m, n \in \mathbb{N}$  numeri naturali positivi. Provare che è sempre vera una delle due disuguaglianze

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n} \quad \text{oppure} \quad \frac{m+2n}{m+n} < \sqrt{2} < \frac{m}{n}.$$

Calcolare il minimo

$$\min \left\{ \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right|, \left| \frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2} \right| \right\}.$$

ESERCIZIO 6.8. Siano dati i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ :

$$A = \left\{ \frac{1+2n^2}{1+n^2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \right\},$$

$$C = \{x^2 - 2x \sin x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \quad D = \left\{ \frac{n^2 \cos(1/n)}{1-n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}.$$

- 1) Determinare  $\inf A$  e  $\sup A$ . Dire se esistono  $\min A$  e  $\max A$ .

- 2) Determinare  $\inf B$  e verificare che  $\sup B = 1/2$ . Dire se esistono  $\min B$  e  $\max B$ .
- 3) Verificare che  $\sup C = \infty$ .
- 4) Verificare che  $\inf D = -\infty$ .

ESERCIZIO 6.9. Sia  $A \subset \mathbb{R}$  il seguente insieme:

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \frac{n+1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

dove  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ . Calcolare  $\sup A$ ,  $\inf A$  e dire se esistono  $\max A$  e  $\min A$ .

### 6.3. Spazi metrici.

ESERCIZIO 6.10. Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e definiamo la funzione  $\delta : X \times X \rightarrow [0, \infty)$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Verificare che  $(X, \delta)$  è uno spazio metrico.

ESERCIZIO 6.11. Sia  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$  la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che  $d$  è una metrica su  $\mathbb{R}^2$  e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

ESERCIZIO 6.12. Sia  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ,  $n \geq 1$ , la funzione definita in ciascuno dei seguenti tre casi per  $x, y \in \mathbb{R}^n$ : A)  $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$ ; B)  $d(x, y) = |x - y|^2$ ; C)  $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$ . Dire in ciascuno dei tre casi se  $d$  è una distanza su  $\mathbb{R}^n$  oppure no. Provare ogni affermazione.

ESERCIZIO 6.13. Sia  $\alpha \in (0, 1]$  e definiamo la funzione  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove  $|\cdot|$  indica la norma Euclidea di  $\mathbb{R}^n$ . Provare che  $(\mathbb{R}^n, d)$  è uno spazio metrico. Ad esempio per  $\alpha = 1/2$ .

### 6.4. Disuguaglianze.

ESERCIZIO 6.14. Siano  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $t \in \mathbb{R}$  con  $t > 0$ . Provare la disuguaglianza:

$$xy \leq \frac{1}{2} \left( tx^2 + \frac{1}{t}y^2 \right).$$

ESERCIZIO 6.15. Siano  $x, y \in \mathbb{R}^n$  punti tali che  $\langle x, y \rangle = |x||y| \neq 0$ . Provare che esiste un numero reale  $\lambda > 0$  tale che  $x = \lambda y$ .

ESERCIZIO 6.16. Siano  $x_1, \dots, x_n \geq 0$  numeri reali e sia  $x = x_1 + \dots + x_n$  la loro somma. Provare che

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq \frac{x^2}{4}.$$

ESERCIZIO 6.17. Siano  $x_i \in (0, 1/2]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , numeri reali. Provare che

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1 - x_i)}{\left(\sum_{i=1}^n (1 - x_i)\right)^n}.$$

## Successioni reali e complesse

### 1. Successioni numeriche

Una *successione reale* (risp. *complessa*) è una funzione  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  (risp.  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ). Indicheremo con  $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$  (risp.  $a_n \in \mathbb{C}$ ) l'*elemento  $n$ -esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La successione si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $a_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

**DEFINIZIONE 1.1** (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale o complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *converge ad un limite*  $L \in \mathbb{R}$  (risp.  $L \in \mathbb{C}$ ) se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L.$$

Il numero  $L$  si dice *limite della successione*.

**ESEMPIO 1.2.** Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e cerchiamo  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che per  $n \geq \bar{n}$  si abbia

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ . Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

**PROPOSIZIONE 1.3** (Unicità del limite). Se una successione reale risp. complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ha limite  $L \in \mathbb{R}$  (risp.  $L \in \mathbb{C}$ ) allora questo limite è unico.

**DIM.** Siano  $L$  ed  $M$  entrambi limiti della successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Fissato  $\varepsilon > 0$  a piacere, esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - L| < \varepsilon$  e  $|a_n - M| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome  $\varepsilon > 0$  è arbitrario, questo implica che  $|L - M| = 0$  e quindi  $L = M$ . □

OSSERVAZIONE 1.4. Una successione complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si può scomporre nella sua parte reale e immaginaria:

$$a_n = \operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una successione complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge se e solo se convergono le successioni reali  $(\operatorname{Re} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(\operatorname{Im} a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Inoltre, in questo caso si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Queste affermazioni seguono dalle disuguaglianze

$$\max\{|\operatorname{Re}(a_n - L)|, |\operatorname{Im}(a_n - L)|\} \leq |a_n - L| \leq |\operatorname{Re}(a_n - L)| + |\operatorname{Im}(a_n - L)|.$$

DEFINIZIONE 1.5. Diremo che una successione reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $\infty$  (“più infinito”) se per ogni  $M \in \mathbb{R}$  (arbitrariamente grande) esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

Analogamente, diremo che una successione reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $-\infty$  (“meno infinito”) se per ogni  $M \in \mathbb{R}$  (arbitrariamente grande) esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$a_n \leq -M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

ESERCIZIO 1.1. Verificare usando la definizione che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 1} = \infty.$$

Fissato  $M > 0$  arbitrariamente grande, dobbiamo trovare  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$(1.5) \quad \frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 1} \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Usiamo il *metodo delle maggiorazioni* e riduciamo la disuguaglianza data ad una disuguaglianza elementare. Come primo passo stimiamo il logaritmo con la disuguaglianza fondamentale

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } x > -1.$$

In effetti, ci basta la disuguaglianza  $\log(1+n) \leq n$  per  $n \in \mathbb{N}$ , che può essere verificata per induzione. Usando questa informazione, si ottiene

$$\frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 1} \geq \frac{n^2(n-1)}{n^2 + 1} \geq \frac{n-1}{2},$$

per  $n \geq 1$ . Dunque ci siamo ridotti alla disuguaglianza elementare

$$\frac{n-1}{2} \geq M \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2M + 1.$$

Con una scelta di  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $\bar{n} \geq 2M + 1$ , la (1.5) è verificata.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 1.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 1.5 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè  $\pm\infty$ .

Una successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si dice *limitata* se l'insieme  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  è limitato in  $\mathbb{R}$  (risp. in  $\mathbb{C}$ ). Equivalentemente, la successione è limitata se esiste  $C > 0$  tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

**PROPOSIZIONE 1.6.** Se una successione reale o complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente allora è limitata.

**DIM.** Sia  $L \in \mathbb{R}$  (risp.  $L \in \mathbb{C}$ ) il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un  $\varepsilon > 0$ . Allora esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - L| < \varepsilon$  per ogni  $n > \bar{n}$ . Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora  $|a_n| \leq C$  per ogni  $n = 1, \dots, \bar{n}$ , elementarmente. Inoltre, per  $n > \bar{n}$  si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

□

**TEOREMA 1.7 (Operazioni coi limiti).** Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  due successioni in  $\mathbb{R}$  (risp. in  $\mathbb{C}$ ) convergenti. Allora:

- 1) La successione somma  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- 2) La successione prodotto  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è convergente e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- 3) Se  $b_n \neq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e il limite di  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non è 0, allora la successione quoziente  $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

**DIM.** Indichiamo con  $L, M \in \mathbb{R}$  (risp.  $L, M \in \mathbb{C}$ ) i limiti delle successioni  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e sia  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - L| < \varepsilon$  e  $|b_n - M| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ .

- 1) Allora si ha per ogni  $n \geq \bar{n}$ :

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

- 2) Per la Proposizione 1.6, esiste  $C > 0$  tale che  $|a_n| \leq C$  e  $|b_n| \leq C$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora si ha per ogni  $n \geq \bar{n}$ :

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - L b_n + L b_n - LM| \leq |b_n| |a_n - L| + |L| |b_n - M| \leq C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon.$$

- 3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso  $a_n = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Siccome  $M \neq 0$  per ipotesi, esiste  $\hat{n} \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq \hat{n}$  si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per  $n \geq \max\{\bar{n}, \hat{n}\}$  si ha

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

**TEOREMA 1.8** (Teorema del confronto). Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successioni reali tali che esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $n \geq \bar{n}$  si ha

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti  $L, M \in \mathbb{R}$  delle successioni  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , rispettivamente. Se  $L = M$ , allora anche  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge e  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$ .

**DIM.** Fissato  $\varepsilon > 0$  sia  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - L| < \varepsilon$  e  $|c_n - L| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Allora si ha anche

$$\begin{aligned} b_n - L &\leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon, \\ L - b_n &\leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

e quindi  $|b_n - L| < \varepsilon$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $n \geq \bar{n}$ . □

**DEFINIZIONE 1.9.** Sia  $A(n)$  un'affermazione che riguarda il generico numero naturale  $n \in \mathbb{N}$ . Se esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $A(n)$  è vera per ogni  $n \geq \bar{n}$  diremo che l'affermazione  $A(n)$  è vera *definitivamente*.

Il Teorema sulle operazioni coi limiti e il Teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

**PROPOSIZIONE 1.10.** Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione infinitesima (ovvero  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ) e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione limitata. Allora la successione prodotto  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è infinitesima.

**DIM.** Sia  $C > 0$  una costante tale che  $|b_n| \leq C$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n| \leq \varepsilon$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Allora si ha

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

**ESERCIZIO 1.2.** Provare le seguenti affermazioni.

- 1) Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  due successioni reali tali che  $a_n \leq b_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$$

- 2) Siano  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  due successioni reali tali che  $b_n \leq c_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$$

- 3) Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale che diverge a  $\infty$ , e sia  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale limitata. Provare che la successione somma  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $\infty$ .



- 4) Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale che diverge a  $\infty$ , e sia  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale, positiva, staccata da 0 ovvero: esiste  $\delta > 0$  tale che  $b_n \geq \delta$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora la successione prodotto  $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $\infty$ .

## 2. Esempi di successioni elementari

ESEMPIO 2.1 (Quoziente di polinomi). Siano  $P$  e  $Q$  polinomi a coefficienti reali (o complessi) nella variabile  $x \in \mathbb{R}$  di grado  $p$  e  $q$ , rispettivamente, con  $p, q \in \mathbb{N}$ . Precisamente, supponiamo di avere

$$\begin{aligned} P(x) &= a_p x^p + \dots + a_1 x + a_0, & x \in \mathbb{R} \\ Q(x) &= b_q x^q + \dots + b_1 x + b_0, & x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Avremo  $a_p \neq 0$  e  $b_q \neq 0$  e senza perdere di generalità supponiamo che  $a_p > 0$  e  $b_q > 0$ . Allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q, \\ \frac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } q > p. \end{cases}$$

La verifica è elementare e utilizza il teorema sulle operazioni con i limiti partendo dalla seguente identità:

$$\frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} \dots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \dots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}.$$

ESEMPIO 2.2 (Successione geometrica). Sia  $q \in \mathbb{R}$  un numero reale fissato. Studiamo la convergenza delle successione geometrica  $a_n = q^n$  per  $n \in \mathbb{N}$ . Verificheremo le seguenti affermazioni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

L'ultima affermazione significa che il limite non esiste nè in  $\mathbb{R}$  nè  $\pm\infty$ .

Esaminiamo il caso  $-1 < q < 1$ . È sufficiente considerare il caso  $0 < q < 1$ . Allora  $q = 1 - x$  con  $x \in (0, 1)$ . Per tali  $x$  valgono le disuguaglianze

$$0 \leq (1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Questa disuguaglianza può essere verificata per induzione (esercizio). Siccome

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + nx} = 0,$$

dal Teorema del confronto segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x)^n = 0.$$

Nel caso  $q > 1$  si può scrivere  $q = 1 + x$  con  $x > 0$ . Dalla disuguaglianza di Bernoulli si ottiene

$$q^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

e per confronto si trova  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ .

Sia ora  $z \in \mathbb{C}$  un numero complesso. Dall'identità  $|z^n| = |z|^n$  si deduce che per  $|z| < 1$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0.$$

Se invece  $|z| \geq 1$  e  $z \neq 1$  il limite non esiste.

**ESEMPIO 2.3** (Radice  $n$ -esima). Per ogni numero reale  $p > 0$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

È sufficiente considerare il caso  $p > 1$ . Il caso  $0 < p < 1$  si riduce a questo passando ai reciproci. Se  $p > 1$  si ha  $\sqrt[n]{p} = 1 + a_n$  con  $a_n > 0$ . Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

si ottiene

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n},$$

e quindi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**ESEMPIO 2.4** (Radice  $n$ -esima di una potenza di  $n$ ). Per ogni numero reale  $\beta > 0$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Proviamo l'affermazione nel caso  $\beta = 1$ . Si ha certamente  $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$  con  $a_n \geq 0$  per ogni  $n \geq 1$ . Usando nuovamente la disuguaglianza di Bernoulli si trova

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

e quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n}.$$

Dal Teorema del confronto segue che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . In conclusione, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n = 1.$$

**ESEMPIO 2.5** (Confronto fra potenze ed esponenziali). Siano  $a, \beta \in \mathbb{R}$  numeri reali tali che  $a > 1$  e  $\beta > 0$ . Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\beta a^n}{a^{n+1} n^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta = \frac{1}{a} < 1,$$

fissato  $\frac{1}{a} < q < 1$ , esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $b_{n+1} < qb_n$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Iterando tale disuguaglianza si ottiene

$$0 \leq b_n \leq qb_{n-1} \leq \dots \leq q^{n-\bar{n}} b_{\bar{n}} = q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}}.$$

Per confronto con la successione geometrica si deduce che  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

ESEMPIO 2.6 (Confronto fra esponenziale e fattoriale). Sia  $a \in \mathbb{R}$  un numero reale tale che  $a > 0$ . Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

fissato  $0 < q < 1$ , esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $b_{n+1} < qb_n$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Come sopra, si conclude che  $b_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

ESEMPIO 2.7 (Confronto fra potenze e logaritmi). Per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  con  $\alpha, \beta > 0$  risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0.$$

Con la sostituzione  $x_n = \log n$ , ovvero  $n = e^{x_n}$ , si ottiene per  $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{e^{x_n \alpha}} \leq \frac{([x_n] + 1)^\beta}{(e^\alpha)^{[x_n]}}.$$

Siccome  $e > 1$  e  $\alpha > 0$ , la base dell'esponenziale verifica  $e^\alpha > 1$ . Dunque, fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che risulti

$$\frac{([x_n] + 1)^\beta}{(e^\alpha)^{[x_n]}} < \varepsilon$$

non appena  $[x_n] > M$ . Ma siccome

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\log n] = \infty,$$

esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $[x_n] > M$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Abbiamo così provato che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq \bar{n}$  si ha

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

### 3. Successioni monotone

DEFINIZIONE 3.1 (Successioni monotone). Una successione reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si dice:

- i) *crescente* se  $a_n \leq a_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ;
- ii) *strettamente crescente* se  $a_n < a_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ;
- iii) *decrescente* se  $a_n \geq a_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ;
- iv) *strettamente decrescente* se  $a_n > a_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Una successione crescente o decrescente si dice *monotona*.

PROPOSIZIONE 3.2. Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione crescente e (superiormente) limitata. Allora la successione è convergente e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

DIM. L'insieme  $A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$  è superiormente limitato e quindi esiste finito

$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Siccome  $L$  è un maggiorante di  $A$  si ha  $a_n \leq L$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Siccome  $L$  è il minimo dei maggioranti di  $A$ , esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$ . Dal fatto che  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è crescente, si deduce che per  $n \geq \bar{n}$  si ha:

$$a_n \geq a_{\bar{n}} > L - \varepsilon.$$

Abbiamo dunque provato che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che per  $n \geq \bar{n}$  risulta

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Questa è la tesi della proposizione.  $\square$

Se una successione crescente  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non è superiormente limitata, allora un argomento analogo al precedente prova che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Per le successioni decrescenti valgono affermazioni analoghe. Ad esempio, se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è decrescente e inferiormente limitata, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 3.2 abbiamo usato l'Assioma di completezza dei numeri reali per assicurarci dell'esistenza del numero  $L \in \mathbb{R}$ . La Proposizione 3.2 implica a sua volta l'Assioma di completezza. La dimostrazione di questo fatto è lasciata come esercizio.

ESERCIZIO 3.1 (Successioni ricorsive). Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la seguente successione definita in modo ricorsivo:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 0.$$

Provare che la successione converge a calcolarne il limite.

Mostriamo che la successione è crescente e superiormente limitata. Sia  $f(x) = \sqrt{2 + x}$  la funzione, definita per  $x \geq -2$ , che interviene nella definizione ricorsiva  $a_{n+1} = f(a_n)$ . Studiamo la disuguaglianza

$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2.$$

Dunque, fintantochè  $0 \leq a_n < 2$  risulta  $a_{n+1} > a_n$ . Proviamo per induzione che  $0 \leq a_n < 2$ . Per  $n = 0$  questo è chiaro. Inoltre, si ha

$$a_{n+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 2.$$

Questo prova che la successione è crescente (strettamente) e superiormente limitata. Dunque esiste finito

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Passando al limite nella relazione ricorsiva  $a_{n+1} = f(a_n)$  ed usando la continuità di  $f$  si trova

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(L).$$

Le soluzioni dell'equazione  $L = f(L)$  sono  $L = -1$  che è da scartare ed  $L = 2$ . Dunque, il limite è  $L = 2$ .

#### 4. Limiti inferiore e superiore

Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si definiscano:

$$b_n = \inf\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \inf_{m \geq n} a_m,$$

$$c_n = \sup\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \sup_{m \geq n} a_m.$$

Può essere  $b_n = -\infty$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ . In tal caso si ha  $b_n = -\infty$  per tutti gli  $n \in \mathbb{N}$ . Può essere  $c_n = \infty$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ . In tal caso si ha  $c_n = \infty$  per tutti gli  $n \in \mathbb{N}$ .

La successione  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è monotona crescente:

$$b_{n+1} = \inf_{m \geq n+1} a_m \geq \inf_{m \geq n} a_m = b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Infatti, al crescere di  $n$  l'insieme di cui si calcola l'estremo inferiore si restringe. Analogamente, la successione  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è monotona decrescente:

$$c_{n+1} = \sup_{m \geq n+1} a_m \leq \sup_{m \geq n} a_m = c_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dunque, le successioni  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hanno limite (finito o infinito).

**DEFINIZIONE 4.1** (Limiti inferiore e superiore). Si definiscono i limiti inferiore e superiore di una successione reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rispettivamente come:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

La comodità dei limiti inferiore e superiore è che sono sempre definiti.

**ESEMPIO 4.2.** Ad esempio si ha:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} = -1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} = 1.$$

**PROPOSIZIONE 4.3.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale e sia  $L \in \mathbb{R}$ . Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A)  $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  esiste  $n \geq \bar{n}$  tale che  $a_n > L - \varepsilon$ ;

ii) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq \bar{n}$  si ha  $a_n < L + \varepsilon$ .

**DIM.** Sia  $L = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} a_m$ , ovvero  $L$  è il massimo dei minoranti dell'insieme  $A = \{c_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ , con  $c_n = \sup_{m \geq n} a_m$ .

Affermiamo che  $L$  è un minorante di  $A$  se e solo se vale i). Infatti,  $L$  è un minorante di  $A$  se e solo se:

$$\forall \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ si ha } \sup_{m \geq \bar{n}} a_m \geq L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \exists n \geq \bar{n} \text{ tale che } a_n > L - \varepsilon.$$

Affermiamo che  $L$  è il massimo dei minoranti di  $A$  se e solo se vale l'affermazione ii). Infatti,  $L$  è il massimo dei minoranti di  $A$  se e solo se  $L + \varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$  non è un minorante di  $A$ , ovvero se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \sup_{m \geq \bar{n}} a_m < L + \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } a_n < L + \varepsilon.$$

□

Per il limite inferiore si ha un'analogia caratterizzazione che riportiamo senza prova.

**PROPOSIZIONE 4.4.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale e sia  $L \in \mathbb{R}$ . Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A)  $L = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ ;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  esiste  $n \geq \bar{n}$  tale che  $a_n < L + \varepsilon$ ;

ii) Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq \bar{n}$  si ha  $a_n > L - \varepsilon$ .

La prova è omessa.

Chiaramente, vale la disuguaglianza

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Se si ha un'uguaglianza allora esiste il limite della successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**COROLLARIO 4.5.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale. Allora il limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

esiste (finito o infinito) se e solo se

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

**DIM.** Quando  $L$  è finito, la dimostrazione segue dall'affermazione ii) della Proposizione 4.3 insieme all'affermazione ii) della Proposizione 4.4. Quando  $L = \infty$  oppure  $L = -\infty$  la dimostrazione è lasciata al lettore.

□

**PROPOSIZIONE 4.6.** Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successioni reali. Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned}$$

Le disuguaglianze possono essere strette.

**DIM.** La prova segue passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  nelle disuguaglianze

$$\begin{aligned} \inf_{m \geq n} (a_m + b_m) &\geq \inf_{m \geq n} a_m + \inf_{m \geq n} b_m, \\ \sup_{m \geq n} (a_m + b_m) &\leq \sup_{m \geq n} a_m + \sup_{m \geq n} b_m. \end{aligned}$$

□

ESEMPIO 4.7. Si consideri la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  così definita

$$a_n = \frac{n^2 \cos(n\pi)}{n^2 + 1}.$$

Proviamo che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Partiamo dal limite superiore. Chiaramente, per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$a_n \leq 1 < 1 + \varepsilon.$$

D'altra parte, per ogni  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  è possibile trovare  $n \geq \bar{n}$  tale che  $a_n > 1 - \varepsilon$ , in quanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{4n^2 + 1} = 1.$$

Per il limite inferiore si argomenta in modo analogo. Da un lato si ha  $a_n \geq -1 > -1 - \varepsilon$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre, per ogni  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  esiste  $n \geq \bar{n}$  tale che  $a_n < -1 + \varepsilon$  in quanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(2n+1)^2}{(2n+1)^2 + 1} = -1.$$

## 5. Esercizi

### 5.1. Limiti di successione.

ESERCIZIO 5.1. 1) Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 4}{3n^2 + 2 \cos n} = \frac{2}{3}.$$

2) Usando il teorema sulle operazioni elementari coi limiti, calcolare il valore  $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  del seguente limite:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \sqrt{n^2 - n} \right).$$

Verificare la correttezza del risultato utilizzando la definizione.

ESERCIZIO 5.2. Usando la definizione, verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{e^{n/2} + e^{-n/2}}}{e^{n/4}} = 1.$$

ESERCIZIO 5.3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

ESERCIZIO 5.4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right).$$

ESERCIZIO 5.5. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 3^n + n^2 \sin(n) + 1}{n^3 2^n + n^2 + (-1)^n}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \sqrt{n!}}{n}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^4(n) + n \arctan(n)}{n^2 + \log n}; \\ 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n+1]{n+1} \cdot \dots \cdot \sqrt[2n]{2n}; \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 \log n + 1/n}; \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.6. Sia  $z \in \mathbb{C}$  un numero complesso e si consideri la successione complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con

$$a_n = \left( z^n + \frac{i}{2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Provare che per  $|z| < 1$  la successione converge e che per  $|z| > 1$  la successione non converge.

ESERCIZIO 5.7. Al variare di  $z \in \mathbb{C}$  studiare la convergenza della successione complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$a_n = \left( 3z^n + \frac{2ni}{3ni+1} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

e, quando esiste, calcolarne il limite.

ESERCIZIO 5.8. Al variare di  $z \in \mathbb{C}$  studiare la convergenza della successione complessa  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con

$$a_n = \frac{1 + iz^n}{i + |z|^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ESERCIZIO 5.9. Al variare dei numeri reali  $\alpha, \beta > 0$  studiare la convergenza della successione reale

$$a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ESERCIZIO 5.10. Al variare di  $b \in \mathbb{R}$  con  $b > 0$ , studiare la convergenza della successione numerica  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con

$$a_n = \frac{1}{b^n} \binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ESERCIZIO 5.11. Sia  $m \in \mathbb{N}$  con  $m \geq 1$ . Calcolare tutti i valori del parametro  $\beta \in \mathbb{R}$  in funzione di  $m$  tali che il limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta \left( \sqrt[m]{n+1} - \sqrt[m]{n} \right)$$

esista finito e risulti  $L \neq 0$ .

ESERCIZIO 5.12. Determinare tutte le coppie di numeri reali  $x, y \in \mathbb{R}$  tali che risulti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^{2n} + y^{4n}} = x^2.$$

Risposta:  $x \geq y^2$  oppure  $x \leq -y^2$ .

ESERCIZIO 5.13. Studiare la convergenza della successione  $a_n = \sqrt{2\sqrt{3}\dots\sqrt{n}}$ ,  $n \geq 2$ , e della successione  $a_n = \sqrt{1!\sqrt{2!}\dots\sqrt{n!}}$ ,  $n \geq 1$ .



ESERCIZIO 5.14 (Fattoriale ed  $n^n$ ). Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

ESERCIZIO 5.15. Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale positiva,  $a_n > 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Supponiamo che esista finito

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Provare allora che anche  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ .

ESERCIZIO 5.16. Al variare del parametro reale  $\alpha > 0$  calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n!}{n^\alpha}.$$

ESERCIZIO 5.17. Provare il seguente teorema. Data una successione reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

- (A) La successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge (ad un limite finito);
- (B) Esiste un numero  $L \in \mathbb{R}$  con questa proprietà: ogni sottosuccessione di  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ha una ulteriore sottosuccessione che converge ad  $L$ .

L'implicazione interessante è (B)  $\Rightarrow$  (A).

ESERCIZIO 5.18. Risolvendo le forme indeterminate, calcolare i seguenti limiti:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^3}{2n+1}}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n^n} \right)^{n!}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n + n! \log(n+1)}{2^n + (n+1)^n}.$$

## 5.2. Successioni ricorsive.

ESERCIZIO 5.19. Sia  $a_0 \in \mathbb{C}$  un numero complesso fissato e definiamo ricorsivamente la successione

$$a_{n+1} = \frac{1}{8}(3a_n - i), \quad n \geq 0.$$

Provare che la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge in  $\mathbb{C}$  e calcolarne il limite.

ESERCIZIO 5.20. Sia  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione  $\varphi(x) = x - x^3$ . Assegnato  $a_0 \in \mathbb{R}$ , definiamo la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in modo ricorsivo tramite la relazione

$$a_{n+1} = \varphi(a_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Provare che se  $a_0 \in [-1, 1]$  la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge e calcolarne il limite.
- 2) Provare che la successione converge se e solo se  $|a_0| < \sqrt{2}$ .

ESERCIZIO 5.21. Siano  $\beta > 0$  e  $a_0 \geq 0$ . Definiamo in modo ricorsivo la successione

$$a_{n+1} = \frac{\beta a_n^2}{1 + a_n^2}, \quad n \geq 0.$$

Discutere al variare di  $\beta > 0$  e  $a_0 \geq 0$  la convergenza della successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e, se esiste, calcolarne il limite. Studiare prima il caso  $0 < \beta < 2$ , poi il caso  $\beta = 2$  e infine  $\beta > 2$ .

ESERCIZIO 5.22. Siano  $a_0, a_1 > 0$  e per  $n \geq 1$  si definisca in modo ricorsivo  $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$ .

i) Supponendo che  $a_{n+1} \geq 2$  provare che

$$|\sqrt{a_{n+1}} - 2| \leq \frac{|\sqrt{a_n} - 2| + |\sqrt{a_{n-1}} - 2|}{2 + \sqrt{2}}.$$

ii) Calcolare il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

ESERCIZIO 5.23. Sia  $0 < x_0 < \pi$  e per  $n \geq 1$  sia  $x_n = \sin x_{n-1}$ . Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n.$$

Risposta: 1.

ESERCIZIO 5.24. Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione definita ricorsivamente nel seguente modo:  $a_0 \in (0, 1)$  è un numero fissato e  $a_{n+1} = a_n - a_n^2$  per  $n \geq 0$ .

- 1) Provare che il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  esiste e calcolarlo.
- 2) Calcolare il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$ .

ESERCIZIO 5.25. 1) Sia  $a_n$ ,  $n \geq 2$ , la successione definita in modo ricorsivo da

$$a_2 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{2^n}} a_n, \quad n \geq 2.$$

Stabilire se la successione  $(a_n)_{n \geq 2}$  converge.

2) Studiare la convergenza della successione  $a_n = \sqrt{1! \sqrt{2!} \dots \sqrt{n!}}$ ,  $n \geq 1$ .

ESERCIZIO 5.26. 1) Siano  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$ . Provare l'identità

$$\varepsilon_0 \sqrt{2 + \varepsilon_1 \sqrt{2 + \dots + \varepsilon_n \sqrt{2}}} = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \sum_{i=0}^n \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}{2^i} \right).$$

2) Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la successione definita in modo ricorsivo da  $a_0 = 0$  e  $a_{n+1} = (a_n + 2)^{1/2}$ . Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (2 - a_n)^{1/2}.$$

ESERCIZIO 5.27. Provare che la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definita ricorsivamente da

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = 2^{a_n/2}, \quad n \geq 1,$$

è convergente e calcolarne il limite.

**5.3. Limiti superiore e inferiore.**

ESERCIZIO 5.28. Verificare che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n}\} = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n}\} = 1,$$

dove  $\{\cdot\}$  indica la parte frazionaria.

ESERCIZIO 5.29. Dimostrare che la successione numerica

$$a_n = \frac{n^2 \cos(n\pi)}{n+1} \log\left(\frac{n}{n+1}\right), \quad n \geq 1,$$

non ha limite per  $n \rightarrow \infty$ .

ESERCIZIO 5.30. Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale. Provare che

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) &= -\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) &= -\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.31. Sia  $x \in \mathbb{Q}$  un numero razionale non negativo,  $x \geq 0$ . Calcolare il limite superiore:

$$L^+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \sin\left(\left(\frac{1}{2} + nx\right)\pi\right) - \frac{1}{n} \right).$$

Casa si riesce a dire del limite inferiore?

$$L^- = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \sin\left(\left(\frac{1}{2} + nx\right)\pi\right) - \frac{1}{n} \right)$$

ESERCIZIO 5.32. Sia  $x \in \mathbb{Q}$  un numero tale che  $x = p/q$  con  $p$  intero dispari e  $q \geq 2$  intero pari. Calcolare i seguenti

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |e^{2\pi n x i} + 1|^2 \quad \text{e} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |e^{2\pi n x i} + 1|^2.$$

ESERCIZIO 5.33. Si consideri la successione numerica

$$a_n = n! + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

Al variare del numero razionale  $x \in \mathbb{Q}$  calcolare i seguenti

$$L^+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} n \sin(x a_n \pi) \quad \text{e} \quad L^- = \liminf_{n \rightarrow \infty} n \sin(x a_n \pi).$$

ESERCIZIO 5.34. Dimostrare che la successione numerica

$$a_n = \frac{n^2 \cos(n\pi)}{n+1} \log\left(\frac{n}{n+1}\right), \quad n \geq 1,$$

non ha limite per  $n \rightarrow \infty$ .

ESERCIZIO 5.35. Siano  $z, w \in \mathbb{C}$  due numeri complessi. Calcolare il limite superiore

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |z^n - w^n|^{1/n}.$$

Cosa si riesce a dire sull'esistenza del limite?

#### 5.4. Altri esercizi.

ESERCIZIO 5.36. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j,k > 1, j+k=n} \frac{1}{jk}.$$

ESERCIZIO 5.37. Sia  $k > 0$ . Calcolare il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2k^{1/n} - 1)^n$ .

ESERCIZIO 5.38. Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale che verifica  $a_1 > 1$  e  $a_1 + \dots + a_{n-1} < a_n$  per ogni  $n \geq 2$ . Provare che esiste un numero reale  $q > 1$  tale che  $a_n > q^n$  per ogni  $n \geq 1$ .

ESERCIZIO 5.39. Usando il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e le proprietà elementari dei limiti, verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

ESERCIZIO 5.40. Calcolare il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2 + k^2}$ . Resp.:  $\frac{\pi}{2}$ .

ESERCIZIO 5.41. Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$ .

Provare che  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n)^{\frac{1}{3}} a_n = 1$ .

ESERCIZIO 5.42. Provare che  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!e) = 2\pi$ .

ESERCIZIO 5.43. Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione positiva,  $a_n > 0$ , convergente ad  $L \in \mathbb{R}$ . Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n} = L.$$

ESERCIZIO 5.44. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (2\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

ESERCIZIO 5.45. Siano  $a_n, b_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , tali che  $a_n \rightarrow a > 0$  e  $b_n \rightarrow b > 0$ . Siano  $p, q > 0$  tali che  $p + q = 1$ . Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (pa_n + qb_n)^n.$$

ESERCIZIO 5.46. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx.$$

ESERCIZIO 5.47. Per  $n \in \mathbb{N}$  sia  $a_n \in \mathbb{R}$  l'unica radice positiva del polinomio  $p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$  nella variabile  $x \in \mathbb{R}$ . Provare che la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge e calcolarne il limite.

ESERCIZIO 5.48. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1)^{1/2} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sin^n(x) \cos(x).$$

ESERCIZIO 5.49. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}.$$

ESERCIZIO 5.50. Sia  $\ell^\infty(\mathbb{R})$  l'insieme di tutte le successioni reali limitate:

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ successione in } \mathbb{R} \text{ limitata}\}.$$

Nel seguito indichiamo con  $x = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un generico elemento di  $\ell^\infty(\mathbb{R})$ .

- 1) Verificare che  $\ell^\infty(\mathbb{R})$  è uno spazio vettoriale reale con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione scalare per le successioni.
- 2) Verificare che la funzione  $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  così definita

$$\|x\|_\infty = \sup \{|a_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$$

definisce una norma.

- 3) Verificare che la funzione  $d_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \times \ell^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$  così definita

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$$

è una distanza su  $\ell^\infty(\mathbb{R})$ .



## Serie reali e complesse

### 1. Serie numeriche. Definizioni

Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale o complessa. Vogliamo definire, quando possibile, la somma di tutti gli  $a_n$  al variare di  $n \in \mathbb{N}$ . Tale somma di infiniti termini si indica con il seguente simbolo:

$$(1.6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Con tale notazione si vuole indicare un numero reale o complesso. Chiameremo un'espressione come in (1.6) una serie reale (risp. complessa).

Formiamo la *successione delle somme parziali*

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La successione  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  può convergere in  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , oppure può non convergere. Nel caso reale la successione  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  può divergere a  $\infty$  o  $-\infty$ .

DEFINIZIONE 1.1. i) Se la successione delle somme parziali  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ad un numero  $s \in \mathbb{R}$  oppure  $s \in \mathbb{C}$ , poniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

e diremo che la serie *converge* ed ha come *somma*  $s$ .

ii) Nel caso reale, se la successione delle somme parziali  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge a  $\infty$  o  $-\infty$ , diremo che la serie *diverge* a  $\infty$  o  $-\infty$  e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

iii) Se la successione delle somme parziali  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non ha limite in  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , e nel caso reale non diverge nè a  $\infty$  nè a  $-\infty$ , diremo che la serie *non è definita*.

iv) Il generico addendo  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , che appare nella serie (1.6) si dice *termine generale* della serie, ed  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è la successione dei termini generali.

TEOREMA 1.2 (Condizione necessaria di convergenza). Se una serie reale o complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge allora la successione dei termini generali è infinitesima, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

DIM. Per ipotesi esiste  $s \in \mathbb{R}$  oppure  $s \in \mathbb{C}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Dunque, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

## 2. Serie geometrica. Serie telescopiche

**2.1. Serie geometrica.** Sia  $z \in \mathbb{C}$  un numero complesso tale che  $z \neq 1$ . Ricordiamo la formula per le somme geometriche parziali

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se  $|z| < 1$ , allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0$ . Se invece  $|z| \geq 1$  il limite non esiste (o non esiste finito). Dunque, si ottiene la formula per la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C}, |z| < 1.$$

Ad esempio, con  $z = 1/2$  si trova la somma della serie geometrica reale di ragione  $1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$

**2.2. Serie telescopiche.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale o complessa e formiamo la successione delle differenze  $b_n = a_{n+1} - a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Allora si ha

$$\sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^n a_{k+1} - \sum_{k=0}^n a_k = a_{n+1} - a_0.$$

Se la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ad un limite  $L$ , allora la serie con termine generale  $b_n$  converge e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = L - a_0.$$

Ad esempio, si trova

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \end{aligned}$$



**2.3. Somma di tutti gli  $1/n^2$ .** Vogliamo provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

converge. È noto che la sua somma è  $\pi^2/6$ , ma non lo proveremo. Dalle disuguaglianze

$$n^2 \geq n(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

si ottiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$$

e per confronto la serie in esame converge.

**2.4. Somma di tutti gli  $1/n$ .** Vogliamo provare che la seguente serie (detta armonica) diverge a  $\infty$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

In effetti, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty, \end{aligned}$$

e dunque la serie diverge a  $\infty$ . Trasformeremo questa idea di dimostrazione in un criterio generale (Criterio di condensazione di Cauchy).

### 3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali

Se  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è una successione reale non negativa, allora la successione delle somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è monotona crescente e quindi il limite di  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  esiste sempre, finito oppure  $\infty$ .

**TEOREMA 3.1 (Criterio del confronto).** Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successioni reali tali che  $0 \leq a_n \leq b_n$  definitivamente (ovvero per ogni  $n \geq \bar{n}$  per qualche  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ ). Allora:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty &\quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty; \\ \text{ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty &\quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty. \end{aligned}$$

DIM. Senza perdere di generalità supponiamo che  $0 \leq a_n \leq b_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Le somme parziali

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n \\ \sigma_n &= b_0 + b_1 + \dots + b_n \end{aligned}$$

verificano  $s_n \leq \sigma_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  ed inoltre convergono perchè sono monotone crescenti. Dunque si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n,$$

da cui si ottengono le conclusioni i) e ii). □

TEOREMA 3.2 (Criterio della radice). Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale non negativa,  $a_n \geq 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , e sia

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Allora si hanno i seguenti due casi:

- i) Se  $L < 1$  allora la serie converge  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ .
- ii) Se  $L > 1$  allora la serie diverge  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ . Di più, il termine generale non è infinitesimo.

Se  $L = 1$  la serie può sia convergere che divergere.

DIM. i) Sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $q = L + \varepsilon < 1$ . Per la caratterizzazione del limite superiore, esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $\sqrt[n]{a_n} \leq q$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Dunque  $a_n \leq q^n$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ , e quindi

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Per confronto, questo prova la convergenza della serie data.

ii) Sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $q = L - \varepsilon > 1$ . Per la caratterizzazione del limite superiore, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste un indice  $k_n \in \mathbb{N}$  tale che  $k_n \geq n$  e  $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} > q$ . Inoltre, è possibile scegliere la successione  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in modo tale che  $k_n < k_{n+1}$ . La (sotto)successione  $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = \infty.$$

Quindi la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non è infinitesima, e per la condizione necessaria di convergenza la serie non converge, e dunque diverge (essendo a termini non negativi). □

TEOREMA 3.3 (Criterio del rapporto). Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale positiva,  $a_n > 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , e sia  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n$ . Allora si hanno i seguenti due casi:

- i) Se  $L < 1$  allora la serie converge  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ .

ii) Se  $L > 1$  allora la serie diverge  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ . Di più, il termine generale verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Se  $L = 1$  la serie può sia convergere che divergere.

DIM. i) Esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $q = L + \varepsilon < 1$ . Dalla definizione di limite segue che esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n/a_{n-1} \leq q$  per ogni  $n \geq \bar{n}$ . Dunque si ha

$$a_n \leq qa_{n-1} \leq \dots \leq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$

per ogni  $n \geq \bar{n}$ , e pertanto

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq a_{\bar{n}} q^{-\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Per confronto, questo prova la convergenza della serie.

ii) Esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $q = L - \varepsilon > 1$ , ed esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq \bar{n}$  si abbia

$$a_n \geq qa_{n-1} \geq \dots \geq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}.$$

Questo prova che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  e dunque non è verificata la condizione necessaria di convergenza e la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.  $\square$

#### 4. Criterio di condesazione di Cauchy per serie reali

TEOREMA 4.1 (Criterio di Cauchy). Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione non negativa, monotona decrescente. Allora si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

DIM. Per  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , sia  $i \in \mathbb{N}$  un indice tale che  $2^{n-1} \leq i \leq 2^n - 1$ . Siccome la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è monotona decrescente, per tali  $i$  si ha  $a_i \leq a_{2^{n-1}}$ , e sommando si ottiene

$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \leq a_{2^{n-1}} (2^n - 2^{n-1}) = 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Sommando ora su  $n$  si trova

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Se converge la serie a destra, allora per confronto converge anche la serie a sinistra.

Proviamo l'implicazione opposta. Se l'indice  $i \in \mathbb{N}$  verifica  $2^{n-1} + 1 \leq i \leq 2^n$  per qualche  $n \in \mathbb{N}$ , allora  $a_i \geq a_{2^n}$ . Sommando su tali  $i$  e poi su  $n \in \mathbb{N}$ , si trova

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

Per confronto, se converge la serie a sinistra, converge anche la serie a destra.  $\square$

ESEMPIO 4.2 (Serie armonica generalizzata). Sia  $\alpha > 0$  un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Abbiamo già discusso il caso  $\alpha = 1, 2$ . La successione  $a_n = 1/n^{\alpha}$ ,  $n \geq 1$ , è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

Se  $\alpha > 1$  si ha una serie geometrica convergente. Se  $0 < \alpha \leq 1$  la serie diverge. Dunque, la serie in esame converge se e solo se  $\alpha > 1$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

ESEMPIO 4.3 (Serie logaritmiche). Sia  $\alpha > 0$  un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}.$$

La successione  $a_n = 1/(n \log^{\alpha} n)$ ,  $n \geq 2$ , è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log^{\alpha} 2}.$$

Per quanto visto sulla serie armonica generalizzata, la serie in esame converge se e solo se  $\alpha > 1$ .

## 5. Convergenza assoluta di serie reali e complesse

In questa sezione illustriamo il Criterio della convergenza assoluta, che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza di serie complesse e di serie reali non necessariamente positive.

DEFINIZIONE 5.1. Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale o complessa. Diciamo che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge *assolutamente* se converge la serie reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

TEOREMA 5.2. Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale o complessa. Se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge assolutamente allora converge anche semplicemente ed inoltre

$$(5.7) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

DIM. Iniziamo a considerare il caso in cui  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sia una successione reale e definiamo per ogni  $n \in \mathbb{N}$  la parte positiva e la parte negativa della successione nel seguente modo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Le successioni  $(a_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(a_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  verificano le seguenti proprietà: i)  $a_n^+ \geq 0$  e  $a_n^- \leq 0$ ; ii)  $a_n = a_n^+ + a_n^-$ ; iii)  $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$ ; iv)  $a_n^+, -a_n^- \leq |a_n|$ . Dal teorema del confronto abbiamo

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad 0 \leq -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Dalle identità

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_k^+ + a_k^-) = \sum_{k=1}^n a_k^+ + \sum_{k=1}^n a_k^-$$

segue allora anche l'esistenza finita del limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Infine, dalla disuguaglianza

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

segue la tesi (5.7). Questo termina la prova nel caso reale.

Sia ora  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione complessa e definiamo  $\alpha_n = \operatorname{Re}(a_n)$  e  $\beta_n = \operatorname{Im}(a_n)$ . Dalle disuguaglianze  $|\alpha_n| \leq |a_n|$  e  $|\beta_n| \leq |a_n|$  deduciamo che le serie reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

convergono assolutamente e quindi semplicemente. Converge allora anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

La prova di (5.7) è identica al caso reale. □

## 6. Criterio di Abel-Dirichlet e criterio di Leibniz

In questa sezione vogliamo studiare la convergenza di serie reali oscillanti della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n \geq 0,$$

e di serie complesse della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

LEMMA 6.1. Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  due successioni reali o complesse. Allora per ogni  $N \in \mathbb{N}$  si ha

$$(6.8) \quad \sum_{n=1}^N a_n b_n = a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n),$$

dove abbiamo posto  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$  per  $n \geq 1$  e convenuto che  $B_0 = 0$ .

DIM. La verifica è elementare e parte dall'identità  $b_n = B_n - B_{n-1}$ . Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n b_n &= \sum_{n=1}^N a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=1}^N a_n B_n - \sum_{n=1}^N a_n B_{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^N a_n B_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n \\ &= a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n). \end{aligned}$$

□

Per analogia con gli integrali potremmo chiamare la successione delle somme parziali  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$  la *primitiva* della successione  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

TEOREMA 6.2 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale decrescente e infinitesima. Sia  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione complessa con primitiva limitata: esiste  $C > 0$  tale che  $|B_n| \leq C$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Allora la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

DIM. Usando la formula di somma per parti (6.8) si trova

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

Dalla disuguaglianza  $|a_n B_n| \leq C |a_n|$  segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n B_n = 0.$$

Se proviamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k (a_{k+1} - a_k).$$

converge assolutamente, allora converge anche semplicemente per il teorema sulla convergenza assoluta. La tesi segue.

Usiamo un argomento di confronto. Usando le proprietà delle serie telescopiche, troviamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k(a_{k+1} - a_k)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| = C \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = Ca_1 < \infty.$$

Per togliere il valore assoluto abbiamo usato il fatto che la successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  è decrescente. □

Da un esame della dimostrazione precedente è chiaro che il Teorema 6.2 ha la seguente variante.

**TEOREMA 6.3.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione complessa infinitesima tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Sia  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione con le stesse proprietà del Teorema 6.2. Allora la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Un caso speciale del Teorema 6.2 è il Criterio di Leibniz.

**TEOREMA 6.4 (Criterio di Leibniz).** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione reale decrescente e infinitesima. Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

converge.

**DIM.** La tesi segue dal Teorema 6.2, infatti la successione  $b_n = (-1)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ha primitiva limitata:

$$\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

**ESEMPIO 6.5.** Per ogni numero reale  $0 < \alpha \leq 1$  la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

è convergente per il Criterio di Leibniz, in quanto la successione  $a_n = 1/n^\alpha$  è decrescente ed infinitesima. La serie, tuttavia non è assolutamente convergente, come si deduce dal Criterio di condensazione di Cauchy.

**ESEMPIO 6.6.** Per  $0 < \alpha \leq 1$  e  $\vartheta \in [0, 2\pi)$ , studiamo la convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\vartheta}}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\vartheta)}{n^\alpha} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\vartheta)}{n^\alpha}.$$

Per  $\vartheta = 0$  la serie diverge. Studiamo il caso  $0 < \vartheta < 2\pi$ . Posto  $b_n = e^{in\vartheta}$ , la successione delle somme parziali è

$$B_n = \sum_{k=1}^n e^{ik\vartheta} = \sum_{k=1}^n (e^{i\vartheta})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\vartheta}}{1 - e^{i\vartheta}} - 1 = \frac{e^{i\vartheta} - e^{i(n+1)\vartheta}}{1 - e^{i\vartheta}},$$

con formula ben definita per  $e^{i\vartheta} \neq 1$ . Dunque, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$|B_n| = \left| \frac{e^{i\vartheta} - e^{i(n+1)\vartheta}}{1 - e^{i\vartheta}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\vartheta}|} < \infty.$$

Per il Criterio di Abel-Dirichlet, la serie in esame converge per  $\vartheta \in (0, 2\pi)$ .

## 7. Esercizi

### 7.1. Serie geometria e serie telescopiche.

ESERCIZIO 7.1. Calcolare esplicitamente la somma della seguenti serie

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}, \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

ESERCIZIO 7.2. Per  $0 \leq r < 1$  ed  $x \in \mathbb{R}$  calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos nx}{n}.$$

### 7.2. Criteri del confronto, radice, rapporto e condensazione.

ESERCIZIO 7.3. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + e^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n + 5^n}; \quad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \quad \text{iv) } \sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\sin n)|^n.$$

ESERCIZIO 7.4. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2 + 1}; \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \log(n+1)}; \quad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^{2n} + |2x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 7.5. Al variare dei numeri reali  $a, b > 0$  discutere la convergenza delle serie:

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} n \log(1 + a^n); \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 + b^n}; \quad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}.$$

ESERCIZIO 7.6. Al variare del numero reale  $x > 1$  discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}.$$

ESERCIZIO 7.7. Al variare del parametro reale  $\alpha \in \mathbb{R}$  discutere la convergenza delle serie:

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \log \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right); \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} (\sqrt{1 + n^4} - n^2); \quad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha + 1}.$$



ESERCIZIO 7.8. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x>0} \left( \frac{x}{1+x^n} \right)^n.$$

ESERCIZIO 7.9. Provare che la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log \log n}}$  diverge.

ESERCIZIO 7.10. Al variare del numero reale  $\alpha > 0$  studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}}.$$

ESERCIZIO 7.11. Al variare di  $x \in \mathbb{R}$ , studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}(n+1)^{n+2}}{(n+3)!}.$$