Appunti del Corso Analisi 1

Anno Accademico 2013-2014

Roberto Monti

Versione del 27 Novembre 2013

Contents

CHAPTER 1

Cardinalità

1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi. Non diamo una definizione di "insieme". Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato "insieme ambiente", che indicheremo con X. Se un elemento x di X appartiene ad un insieme A scriveremo $x \in A$. Se x non appartiene ad A scriveremo $x \notin A$. Con $A \subset B$ si intende l'inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo $\subset$ viene talvolta indicato con $\subseteq$. Se $A \subset B$ e $B \subset A$ gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali, $A = B$.

L'unione e l'intersezione di due insiemi A e B si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$A \cup B = \big\{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\big\},$$
$$A \cap B = \big\{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\big\}.$$

L'insieme che non contiene alcun elemento, l'*insieme vuoto*, si indica con $\emptyset$. Chiaramente, si ha $\emptyset \subset A$ per ogni insieme A. Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$.

La differenza di insiemi $A \setminus B$ (leggi "A meno B") è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \big\{x \in A : x \notin B\big\}.$$

Talvolta la differenza $A \setminus B$ è indicata con $A - B$.

Il complementare di un insieme A in X è l'insieme $A' = X \setminus A$. Talvolta il complementare è indicato con A^c. Con tale notazione si ha $A \setminus B = A \cap B'$. Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$(A \cup B)' = A' \cap B',$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'.$$

Più in generale, sia Λ una famiglia di indici e siano A_λ insiemi indicizzati da $\lambda \in \Lambda$. Allora l'unione e intersezione della famiglia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sono:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \big\{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\big\},$$
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \big\{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\big\}.$$

Le formule di De Morgan sono

$$\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda, \quad \Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda,$$
$$X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda.$$

1.2. Funzioni fra insiemi. Una funzione $f : A \to B$ dall'insieme A all'insieme B è un'applicazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ un elemento $f(x) \in B$. L'insieme A si dice *dominio* e l'insieme B si dice *codominio* della funzione.

Ricordiamo che il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \big\{(x, y) : x \in A,\ y \in B\big\}.$$

Con (x, y) si indica la *coppia ordinata* formata da x e y, nell'ordine. Il *grafico* di una funzione $f : A \to B$ è il seguente sottoinsieme di $A \times B$:

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\big\}.$$

Osservazione 1.1. La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da A a B* è una terna ordinata (A, B, G) dove $G \subset A\times B$ è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni $x \in A$ esiste un unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$. L'insieme $G = \mathrm{gr}(f)$ è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione $f : A \to B$ per indicare una funzione.

Definizione 1.2 (Immagine ed antimmagine). Dato un insieme $C \subset A$, l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \big\{f(x) \in B : x \in C\big\} \\ &= \big\{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\big\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di C rispetto ad f.

Dato in insieme $D \subset B$, l'insieme

$$f^{-1}(D) = \big\{x \in A : f(x) \in D\big\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di D ripetto ad f. Nel libro di G. De Marco, l'antimmagine viene indicata con la notazione $f^{\leftarrow}(D) = f^{-1}(D)$.

Proposizione 1.3. Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione. Precisamente, siano $A_\lambda \subset A$ e $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} & f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \quad f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \\ & f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned} \tag{1.1}$$

DIM. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$
\begin{aligned}
y \in f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y\\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ ed esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y\\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y\\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda)\\
&\Leftrightarrow \quad y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).
\end{aligned}
$$

Nell'equivalenza centrale abbiamo usato il fatto che $\exists x \exists \lambda \ldots \Leftrightarrow \ldots \exists \lambda \exists x$.

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda\\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda)\\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda).
\end{aligned}
$$

Proviamo l'inclusione in alto a destra:

$$
\begin{aligned}
y \in f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y\\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ tale che per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y\\
&\Rightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y\\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } y \in f(A_\lambda)\\
&\Leftrightarrow \quad y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).
\end{aligned}
$$

□

OSSERVAZIONE 1.4. Si noti che nell'ultimo argomento della dimostrazione precedente si hanno tutte equivalenze tranne che l'implicazione centrale, che è del tipo

$$\exists x \forall \lambda \,:\, A(x,\lambda) \text{ è vera } \;\Rightarrow\; \forall \lambda \exists x \,:\, A(x,\lambda) \text{ è vera},$$

dove $A(x,\lambda)$ è un'affermazione che riguarda x e λ. Tale implicazione non può essere invertita. Infatti, nell'antecendente c'è una x che rende vera l'affermazione per ogni λ. Nella conseguente, invece, per ogni λ c'è una x (che quindi dipende da λ) che rende vera l'affermazione.

ESEMPIO 1.5. Sia $A = \{0,1\}$ un insieme formato da due elementi e sia $B = \{0\}$. L'unica funzione $f : A \to B$ è $f(0) = f(1) = 0$. Detti $A_0 = \{0\}$ e $A_1 = \{1\}$, si ha $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ e quindi $f(A_0 \cap A_1) = \emptyset$, mentre $f(A_0) \cap f(A_1) = \{0\} \neq \emptyset$.

DEFINIZIONE 1.6. Una funzione $f : A \to B$ si dice:

i) *iniettiva* (1-1) se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$ (equivalentemente se $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$);
ii) *suriettiva* (su) se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;

iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$$f : A \xrightarrow{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva,}$$
$$f : A \xrightarrow{\text{su}} B \quad \text{funzione suriettiva,}$$
$$f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B \quad \text{funzione iniettiva e suriettiva.}$$

Definizione 1.7 (Funzione inversa e composta). Se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora $f : A \to f(A)$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa* $f^{-1} : f(A) \to A$ ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni tali che $f(A) \subset C$. Allora è ben definita la *funzione composta* $g \circ f : A \to D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$ allora si ha:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \quad \text{funzione identità su } A,$$
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \quad \text{funzione identità su } B.$$

Definizione 1.8. Sia $f : A \to B$ una funzione. Una funzione $g : B \to A$ si dice *inversa sinistra* di f se $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Una funzione $h : B \to A$ si dice *inversa destra* di f se $f \circ h = \mathrm{Id}_B$.

Osservazione 1.9. Se $f : A \to B$ è suriettiva, allora per ogni $y \in B$ la "fibra" $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ è non vuota. Con l'Assioma della Scelta, per ogni $y \in B$ si può selezionare un elemento $x \in f^{-1}(\{y\})$ e definire una funzione $h : B \to A$ ponendo $h(y) = x$. Dunque, si ha $f \circ h(y) = f(h(y)) = y$ per ogni $y \in B$. La funzione h è un'inversa destra di f.

2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

Definizione 2.1. Siano A e B insiemi. Diremo che:

i) $\mathrm{Card}(A) \le \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$;
ii) $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : A \to B$;
iii) $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$ se $\mathrm{Card}(A) \le \mathrm{Card}(B)$ ma non esiste alcuna funzione suriettiva $f : A \to B$.

Se $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ diremo che gli insiemi A e B sono *equipotenti*. Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile.

Teorema 2.2 (Tricotomia dei cardinali). Vale sempre una delle seguenti tre possibilità: $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(B) < \mathrm{Card}(A)$.

La dimostrazione di questo teorema richiede l'Assioma della Scelta ed è omessa. Proveremo invece che l'affermazione $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ equivale all'esistenza di una funzione iniettiva $f : A \to B$ e di una funzione iniettiva $g : B \to A$.

Ricordiamo che l'*insieme potenza* di un insieme A è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A:

$$\mathcal{P}(A) = \big\{E : E \subset A\big\}.$$

L'esistenza di tale insieme va garantita con un apposito assioma. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ contiene sempre l'elemento $\emptyset$.

TEOREMA 2.3 (Cantor-Schröder-Bernstein). Siano A e B due insiemi, e siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$.

DIM. Premettiamo un argomento preparatorio. Consideriamo una funzione $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ che preserva le inclusioni:

$$E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F). \tag{2.2}$$

Affermiamo che esiste $F \in \mathcal{P}(A)$ tale che $F = T(F)$ (punto fisso).

Si consideri la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \big\{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\big\}$. È certamente $\mathcal{A} \neq \emptyset$ in quanto $\emptyset \in \mathcal{A}$. Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che $T(F) = F$. Infatti, usando le proprietà (1.1) e (2.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\Big(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\Big) = T(F).$$

D'altra parte, applicando T all'inclusione $F \subset T(F)$ si ottiene $T(F) \subset T(T(F))$ e quindi $T(F) \in \mathcal{A}$, da cui segue l'inclusione opposta $T(F) \subset F$. La conclusione è che $T(F) = F$.

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che T preserva le inclusioni:

$$\begin{aligned} E \subset F \quad &\Rightarrow \quad f(E) \subset f(F) \\ &\Rightarrow \quad B \setminus f(F) \subset B \setminus f(E) \\ &\Rightarrow \quad g(B \setminus f(F)) \subset g(B \setminus f(E)) \\ &\Rightarrow \quad A \setminus g(B \setminus f(E)) \subset A \setminus g(B \setminus f(F)). \end{aligned}$$

Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso $A_1 \in \mathcal{P}(A)$ di T ovvero un insieme tale che $T(A_1) = A_1$. Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ con unioni disgiunte. La funzione $f : A_1 \to B_1$ è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che $g(B_2) = A_2$. Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque, $g : B_2 \to A_2$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$ nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

$\square$

Proposizione 2.4. Per ogni insieme A risulta $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$.

Dim. Certamente $\mathrm{Card}(A) \le \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$ in quanto la funzione $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$ è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$. La dimostrazione si basa sul "paradosso di Russell". Si consideri l'insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè f è suriettiva, esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = A_0$. Ci sono due casi:
Caso 1: $x_0 \in A_0$. Allora: $x_0 \notin f(x_0) = A_0$, assurdo.
Caso 2: $x_0 \notin A_0$. Allora: $x_0 \in f(x_0) = A_0$, assurdo.

$\square$

3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge 1$ per escludere lo 0.

1. Insieme finito. Un insieme A si dice *finito* se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed una funzione $f : \{1, \dots, n\} \to A$ iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che $\mathrm{Card}(A) = n$. Se A non è finito, diremo che A è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo $\mathrm{Card}(A) = \infty$.

Proposizione 3.1. Se A è un insieme finito ed $f : A \to A$ è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:
1) f è iniettiva;
2) f è suriettiva;
3) f è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio e si può fare per induzione sulla cardinalità di A.

Esempio 3.2. L'insieme dei numeri pari $2\mathbb{N} = \{0, 2, \dots, 2n, \dots\}$ è infinito ed è equipotente con $\mathbb{N}$. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

Definizione 3.3 (di Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

2. Insieme numerabile. Un insieme A si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : \mathbb{N} \to A$. Diremo in questo caso che:

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad \text{(Alef zero)}.$$

Il cardinale $\aleph_0$ è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se A è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$. La costruzione di f è induttiva:

i) Se definisce $f(0) \in A$ a piacere;

ii) Definiti $f(1), \dots, f(n) \in A$ distinti, si osserva che l'insieme $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ non è vuoto, altrimenti A sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$. Ne risulta una funzione $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile A possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \{a_0, a_1, \dots a_n, \dots\}.$$

3. $\mathbb{Z}$ è numerabile. L'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ così definita

$$\varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Proviamo che il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, ovvero che

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 1)$ è iniettiva. D'altra parte, la funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n, m) = 2^n 3^m$ è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 2.3 esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esercizio 3.1. Controllare che la funzione $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita

$$h(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

5. $A \times A$ è numerabile se A è numerabile. Se A è numerabile, anche il prodotto cartesiano $A \times A$ è numerabile. Sia $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva e suriettiva. Allora $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times A$, $F(n, m) = (f(n), f(m))$ è iniettiva e suriettiva. La composizione $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \to A \times A$ è allora iniettiva e suriettiva. Qui h è la funzione definita sopra.

6. $\mathbb{Q}$ è numerabile. L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \right\}$$

è numerabile. Infatti $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e quindi l'inclusione è iniettiva da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$. Si consideri la funzione $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione g è iniettiva. Siccome $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ è numerabile, esiste $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva. Dunque $h \circ g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ è iniettiva.

7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

PROPOSIZIONE 3.4. Siano A_n, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è al più numerabile.

DIM. Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi A_n siano a coppie disgiunti, ovvero $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $n \neq m$, e che $A_n \neq \emptyset$. Vogliamo provare che A è numerabile.

Enumeriamo gli elementi di A_n in questo modo:

$$A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,j}, \dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione $f : \mathbb{N} \to A$, $f(n) = a_{n,1}$ è iniettiva. Costruiamo una funzione $g : A \to \mathbb{N}$ iniettiva. È noto che l'insieme $P \subset \mathbb{N}$ dei numeri primi (ci interessano quelli maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo P:

$$P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots\}.$$

Definiamo la funzione $g : A \to \mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$g(a_{n,j}) = p_n^j, \quad n, j \in \mathbb{N}, n, j \geq 1.$$

La funzione g è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j}) = g(a_{m,k}) \quad \Leftrightarrow \quad p_n^j = p_m^k \quad \Leftrightarrow \quad n = m,\ j = k \quad \Leftrightarrow \quad a_{n,j} = a_{m,k}.$$

$\square$

8. $\mathbb{R}$ non è numerabile. Vedremo in seguito che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile. È più che numerabile.

4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione*.

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{4.3}$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (4.3) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$
\begin{aligned}
1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\
&= \frac{1 - x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1-x}.
\end{aligned}
$$

4.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{4.4}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (4.4) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

4.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
ii) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n + 1$:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \le n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.\end{aligned}$$

5. Esercizi

Esercizio 5.1. Completare la dimostrazione della Proposizione 1.3. Sia $f : A \to B$ una funzione e siano $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Provare che

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

Esercizio 5.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f, ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita.
2) Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
3) Stabilire se f è iniettiva.
4) Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

Esercizio 5.3. Siano $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ il disco unitario, $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| < 1$, ed $f : D \to D$ sia la funzione

$$f(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}.$$

1) Verificare che f è definita su tutto D e che $f(D) \subset D$;
2) Provare che f è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa $f^{-1} : D \to D$.

Esercizio 5.4. Sia $f : A \to B$ una funzione.

1) Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha
$$C \subset f^{-1}(f(C)).$$
Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia iniettiva.
2) Provare che per ogni insieme $D \subset B$ si ha
$$f(f^{-1}(D)) \subset D.$$
Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia suriettiva.

ESERCIZIO 5.5. Siano A, B, C insiemi finiti e indichiamo con $|A| = \mathrm{Card}(A)$ la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

ESERCIZIO 5.6. Siano $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$, $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < 1\}$ e $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Esibendo biiezioni concrete, provare che:

1) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}([0,1))$;
2) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}((0,1))$;
3) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 5.7. Verificare mediante induzione le seguenti identità per $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k\Big)^2.$$

ESERCIZIO 5.8. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $0 < x < 1$. Usando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, vale

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

ESERCIZIO 5.9. Dimostrare per induzione che

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge 2(\sqrt{n+1} - 1), \quad n \ge 1$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{n}, \quad n \ge 1,$$

$$3) \quad n! < \Big(\frac{n}{2}\Big)^n, \quad n \ge 6.$$

ESERCIZIO 5.10. Sia $\mathcal{A} = \big\{I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervallo}\big\}$ un insieme costituito da intervalli non degeneri $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$. Supponiamo che $\mathcal{A}$ verifichi: $I, J \in \mathcal{A}$ con $I \cap J \ne \emptyset$ implica $I = J$ (ovvero, gli intervalli sono a coppie disgiunti).

Dimostrare che $\mathcal{A}$ è numerabile.

Suggerimento: stimare il numero di intervalli di $\mathcal{A}$ di lunghezza maggiore di $1/n$ contenuti nell'intervallo $(-m, m)$, con $n, m \ge 1$.

ESERCIZIO 5.11. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \ge m$. Calcolare il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x+a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x+b)^m$. Precisamente, calcolare i polinomi $s(x)$ (il quoziente della divisione) ed $r(x)$ (il resto della divisione) tali che $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, dove il grado di r è al più $m - 1$.

Esercizio 5.12. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una funzione iniettiva tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si abbia
$$|x - y| \leq 10 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq 10.$$
Determinare la funzione f.

Esercizio 5.13. i) Costruire una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ tale che $f^{-1}(\{y\})$ sia numerabile per ogni $y \in [0,1]$.

ii) Costruire una funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ tale che $\mathrm{Card}\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ per ogni $y \in [0,1]$. Assumere come noto il fatto che $\mathrm{Card}([0,1] \times [0,1]) = \mathrm{Card}([0,1])$.

CHAPTER 2

Numeri reali

1. Relazioni d'ordine

Premettiamo le definizioni di relazione, relazione d'ordine parziale e relazione d'ordine totale.

Definizione 1.1 (Relazione). Una relazione su un insieme X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$. Dati $x, y \in X$, diciamo che x è nella relazione R con y se $(x, y) \in R$. Scriveremo in questo caso xRy.

Definizione 1.2 (Ordine parziale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine parziale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

Ad esempio, l'insieme $X = \mathcal{P}(A)$ con la relazione di inclusione insiemistica $\subset$ è parzialmente ordinato.

Definizione 1.3 (Ordine totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine totale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva);
iv) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità).

2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

Introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo*. Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

Definizione 2.1. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi della somma:

(S1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(S2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(S3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(S4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi del prodotto (o moltiplicazione):

(P1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(P2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);

(P3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);

(P4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;

(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve.

Definizione 2.2 (Campo, campo ordinato, campo ordinato completo).
i) Un insieme X munito di due operazioni $+$ e $\cdot$ che verificano gli assiomi (o proprietà) (S1)-(D) si dice *campo*.
ii) Se, in aggiunta ad i), vi è su X una relazione di ordine totale $\leq$ che verifica gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*.
iii) Se, infine, $(X, +, \cdot, \leq)$ verifica anche l'assioma di completezza, si ottiene un *campo ordinato completo*.

Ad esempio, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono campi; $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ sono campi ordinati; $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo.
Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Esempio 2.3. A titolo di esempio, facciamo alcuni calcoli basandoci solo sugli assiomi di campo ordinato.

1) Si ha $(-1) \cdot (-1) = 1$. Infatti:

$$0 = 0 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$$

e la tesi segue sommando a destra e sinistra 1.

2) Si ha $-x = (-1) \cdot x$. Infatti:

$$0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x,$$

e aggiungendo a destra e sinistra $-x$ si trova la tesi.

3) Si ha $x^2 \geq 0$ per ogni x nel campo ordinato. Infatti, se $x \geq 0$ allora $x \cdot x \geq x \cdot 0 = 0$. Se invece $x \leq 0$ allora $-x \geq 0$ e quindi

$$0 \leq (-x) \cdot (-x) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot x = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2.$$

Proposizione 2.4. I numeri complessi $\mathbb{C}$ sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

Dim. Che $\mathbb{C}$ sia un campo è noto dal corso di Geometria. Supponiamo per assurdo che ci sia su $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine totale $\geq$. L'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ dovrebbe allora verificare $-1 = i^2 \geq 0$ e quindi si avrebbe $1 \leq 0$. D'altra parte si ha anche $1 = 1^2 \geq 0$. Si deduce che $1 = 0$ e questo non è possibile. □

Definizione 2.5 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \leq z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A porremo
$$\sup A = x.$$
iv) Se A non è superioremente limitato porremo
$$\sup A = \infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici.

Osservazione 2.6 (Caratterizzazione dell'estremo superiore). Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

i) $y \leq x$ per ogni $y \in A$ (x è un maggiorante);
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$ (x è il minimo dei maggioranti).

Definizione 2.7 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \leq x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \leq x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A porremo
$$\inf A = x.$$
iv) Se A non è inferiormente limitato porremo
$$\inf A = -\infty.$$
La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso
$$\min A = x.$$

Osservazione 2.8 (Formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza). Rienunciamo l'Assioma di completezza dei numeri reali:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Tale assioma puè essere riformulato in diversi modi fra loro equivalenti:

1) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferioremente limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo inferiore.

2) Ogni sezione di $\mathbb{R}$ ha un unico elemento separatore.
3) Ogni successione monotona e limitata in $\mathbb{R}$ è convergente.
4) Ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ha una sottosuccessione convergente (proprietà di Bolzano-Weierstrass).
5) Ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente (ovvero, $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo).
6) Ogni successione di intervalli chiusi non vuoti $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tale che $I_{k+1} \subset I_k$ verifica
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset.$$

Ritorneremo su questi concetti durante il corso.

2.1. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.9 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme
$$A = \big\{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$
è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:
$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$
che è una contraddizione. □

Definizione 2.10 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme
$$A_x = \big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\}.$$
Per la proprietà di Archimede, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque massimo. Definiamo la *parte intera di x*
$$[x] = \max\big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\} \in \mathbb{Z}.$$
Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di x* è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:
$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 2.11 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

DIM. Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y-x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$, ovvero $nx < ny - 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \le ny \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{[ny]}{n} \le y.$$

Cerchiamo ora $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$x < \frac{[ny]}{n} - \frac{1}{m} < y.$$

La disuguaglianza a sinistra è equivalente a

$$m\Big(\frac{[ny]}{n} - x\Big) > 1,$$

ed un tale $m \in \mathbb{N}$ esiste per la proprietà di Archimede. □

3. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$

La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) L'unicità di un campo ordinato completo.

È possibile dimostrare (ma noi non lo faremo) che due campi ordinati completi sono fra loro *isomorfi*. In questo senso esiste un unico campo ordinato completo, i numeri reali $\mathbb{R}$.

Illustriamo brevemente, senza dimostrazioni, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Sottolineamo che l'Assioma di Completezza è ora un Teorema.

DEFINIZIONE 3.1. Un insieme $A \subset \mathbb{Q}$ è una sezione (di Dedekind) se:
(i) $A, A' \neq \emptyset$, dove A' è il complementare di A in $\mathbb{Q}$;
(ii) se $a \in A$ allora $b \in A$ per ogni numero razionale $b \le a$;
(iii) se $a \in A$ esiste $b \in A$ con $a < b$.

OSSERVAZIONE 3.2. La proprietà (iii) precisa che vogliamo considerare solo sezioni aperte di $\mathbb{Q}$. In questo modo, ad ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ corrisponde l'unica sezione

$$A_q = \big\{a \in \mathbb{Q} : a < q\big\}.$$

Esistono sezioni che non corrispondono a numeri razionali. Ad esempio, questo è il caso della sezione

$$A = \big\{a \in \mathbb{Q} : a \le 0 \text{ oppure } a^2 < 2\big\}.$$

Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$ la sezione nulla e con $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$ la sezione unitaria.

1. Relazione d'ordine. Se A e B sono sezioni, diciamo che $A \le B$ se $A \subset B$. L'insieme $\mathcal{A}$ è totalmente ordinato dalla relazione $\le$.

2. Somma. Se A e B sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B\}.$$

La sezione opposta è per definizione $-A = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } a > b \text{ tale che } -a \in A'\}$. Scriviamo $A - B = A + (-B)$.

3. Prodotto. La sezione prodotto si definisce per casi. Se $A, B \geq 0$ definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B, \text{ tali che } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

Se $A, B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$, se $A \geq 0$ e $B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$, e se $A \leq 0$ e $B \geq 0$ si definisce $A \cdot B = -(-A) \cdot B$. Infine, per ogni sezione $A > 0$ si definisce la sezione reciproca $A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } a > b \text{ tale che } a^{-1} \in A'\}$. Se invece $A < 0$ si definisce $A^{-1} = -(-A)^{-1}$.

Con pazienti verifiche si controlla che $\mathcal{A}$ è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

4. Assioma di completezza. Proviamo la proprietà di completezza.

Teorema 3.3. L'insieme $\mathcal{A}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ e con la relazione d'ordine $\leq$ è un campo ordinato *completo*.

Dim. Ci interessa verificare la completezza. Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ un insieme superioremente limitato e non vuoto. Questo significa che esiste una sezione $A \in \mathcal{A}$ tale che $B \subset A$ per ogni sezione $B \in \mathcal{B}$. Vogliamo provare che $\mathcal{B}$ ha estremo superiore. Definiamo l'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{Q}.$$

Controlliamo che C è una sezione di $\mathbb{Q}$:

i) $C \neq \emptyset$ in quanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Inoltre, $C \subset A$ implica $A' \subset C'$ e poichè per ipotesi $A' \neq \emptyset$, segue che $C' \neq \emptyset$.
ii) Siano $x, y \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in C$ e $y \leq x$. Allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$, e siccome B è una sezione segue che $y \in B$. Dunque si ha anche $y \in C$.
iii) Se $x \in C$ allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$. Siccome B è una sezione, esiste $y \in B$ tale che $x < y$. Ma allora sia ha anche $y \in C$.

Verifichiamo infine che $C = \sup \mathcal{B}$.

i) Sicuramente $B \subset C$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, ovvero C è un maggiorante di $\mathcal{B}$.
ii) Proviamo che C è il minimo dei maggioranti. Sia $D \in \mathcal{A}$ un maggiorante di $\mathcal{B}$. Dalle inclusioni $B \subset D$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, segue che

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset D.$$

$\square$

È possibile una costruzione puramente metrica di $\mathbb{R}$, che prescinde dalla relazione d'ordine. Precisamente, $\mathbb{R}$ può essere costruito come il completamento metrico di $\mathbb{Q}$.

4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \le |x|$ e $-x \le |x|$, ed inoltre:

i) $|x| \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $|x| = |-x|$;
iii) $|x + y| \le |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \le |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x + y) = -x - y \le |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \le |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x - y| = |x - z + z - y| \le |x - z| + |z - y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x - y + y| \le |x - y| + |y|$ che riordinata fornisce $|x| - |y| \le |x - y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x| - |y|\big| \le |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x, y) \ge 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
iii) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ è allora uno *spazio metrico*. La funzione $d(x, y) = |x - y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

Possiamo anticipare la definizione generale di spazio metrico.

Definizione 4.1 (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \ge 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Dato uno spazio metrico (X, d), fissato un punto $x_0 \in X$ ed un raggio $r > 0$, l'insieme

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = B_X(x_0, r) = \big\{x \in X : d(x, x_0) < r\big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x_0 e raggio r. Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Nello spazio metrico $\mathbb{R}$ con la distanza standard, le palle sono intervalli aperti che si indicano anche con la seguente notazione:

$$I_r(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\big\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

4.1. Intervalli. Gli intevalli di $\mathbb{R}$ possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Ecco l'elenco. Siano $-\infty < a < b < \infty$. Si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$
\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{intervallo aperto,}\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{intervallo aperto a destra,}\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{intervallo aperto a sinistra,}\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{intervallo chiuso.}
\end{aligned}
$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$
\begin{aligned}
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} && \text{intervallo aperto,}\\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} && \text{intervallo chiuso,}\\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} && \text{intervallo aperto,}\\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} && \text{intervallo chiuso,}
\end{aligned}
$$

cui si aggiunge l'intervallo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

La famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi convessi di $\mathbb{R}$. Inoltre, la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi connessi di $\mathbb{R}$.

5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio Euclideo n-dimensionale, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ ha n coordinate reali $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di somma vettoriale

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Questa operazione è associativa e commutativa. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di *prodotto per uno scalare*. Dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

In questo modo $\mathbb{R}^n$ ha una struttura di *spazio vettoriale*, come si vedrà nel corso di geometria.

Definizione 5.1 (Prodotto scalare). Definiamo l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3) $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) oppure con il simbolo $x \cdot y$.

Definizione 5.2 (Norma Euclidea). La norma Euclidea su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ così definita

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente, $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma. Precisamente, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si verifica:

1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (omogeneità);
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Proposizione 5.3 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue estraendo le radici. □

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su $\mathbb{R}^n$ la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\big\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r > 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

6. Esercizi

6.1. Numeri reali e razionali. Parte intera e frazionaria.

Esercizio 6.1. Usando gli Assiomi (S1)-(O2) per un campo ordinato provare che per ogni x, y, z vale l'implicazione: $x \leq y$ e $z \leq 0 \Rightarrow yz \leq xz$.
Indicare in ciascun passaggio la proprietà che si utilizza.

Esercizio 6.2. i) Verificare che $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. ii) Verificare che $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 6.3. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha:

$$[x] + [x + 1/n] + \ldots + [x + (n-1)/n] = [nx],$$

dove $[x]$ è la parte intera di x.

6.2. Estremo superiore ed inferiore. Massimo e minimo.

Esercizio 6.4. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \Big\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1 \Big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 6.5. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \big\{ n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \big\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 6.6. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \Big\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \Big\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

Esercizio 6.7. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri naturali positivi. Provare che è sempre vera una delle due disuguaglianze

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n} \quad \text{oppure} \quad \frac{m+2n}{m+n} < \sqrt{2} < \frac{m}{n}.$$

Calcolare il minimo

$$\min \Big\{ \Big| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \Big|, \Big| \frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2} \Big| \Big\}.$$

Esercizio 6.8. Siano dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{1+2n^2}{1+n^2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \right\},$$

$$C = \big\{ x^2 - 2x \sin x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \big\}, \quad D = \left\{ \frac{n^2 \cos(1/n)}{1-n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \right\}.$$

1) Determinare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.

2) Determinare $\inf B$ e verificare che $\sup B = 1/2$. Dire se esistono $\min B$ e $\max B$.
3) Verificare che $\sup C = \infty$.
4) Verificare che $\inf D = -\infty$.

ESERCIZIO 6.9. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme:

$$A = \Big\{\sqrt{\frac{n}{n+1}} - \frac{n+1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\Big\},$$

dove $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Calcolare $\sup A$, $\inf A$ e dire se esistono $\max A$ e $\min A$.

6.3. Spazi metrici.

ESERCIZIO 6.10. Sia (X, d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X\times X \to [0, \infty)$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X.$$

Verificare che (X, δ) è uno spazio metrico.

ESERCIZIO 6.11. Sia $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ e } 0 \text{ sono collineari,} \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}^2$ e descrivere (graficamente) le palle in questa metrica.

ESERCIZIO 6.12. Sia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, $n \geq 1$, la funzione definita in ciascuno dei seguenti tre casi per $x, y \in \mathbb{R}^n$: A) $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$; B) $d(x, y) = |x - y|^2$; C) $d(x, y) = \log(1 + |x - y|)$. Dire in ciascuno dei tre casi se d è una distanza su $\mathbb{R}^n$ oppure no. Provare ogni affermazione.

ESERCIZIO 6.13. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico. Ad esempio per $\alpha = 1/2$.

6.4. Disuguaglianze.

ESERCIZIO 6.14. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ con $t > 0$. Provare la disuguaglianza:

$$xy \leq \frac{1}{2}\Big(tx^2 + \frac{1}{t}y^2\Big).$$

ESERCIZIO 6.15. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ punti tali che $\langle x, y\rangle = |x||y| \neq 0$. Provare che esiste un numero reale $\lambda > 0$ tale che $x = \lambda y$.

ESERCIZIO 6.16. Siano $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ numeri reali e sia $x = x_1 + \ldots + x_n$ la loro somma. Provare che

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq \frac{x^2}{4}.$$

Esercizio 6.17. Siano $x_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, \dots, n$, numeri reali. Provare che

$$\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i}{\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^n} \le \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)}{\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)\Big)^n}.$$

CHAPTER 3

Successioni reali e complesse

1. Successioni numeriche

Una *successione reale (risp. complessa)* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (risp. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). Indicheremo con $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ (risp. $a_n \in \mathbb{C}$) l'*elemento n-esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La successione si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots .$$

Definizione 1.1 (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L.$$

Il numero L si dice *limite della successione.*

Esempio 1.2. Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

Proposizione 1.3 (Unicità del limite). Se una successione reale risp. complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) allora questo limite è unico.

Dim. Siano L ed M entrambi limiti della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|a_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che $|L - M| = 0$ e quindi $L = M$. □

Osservazione 1.4. Una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può scomporre nella sua parte reale e immaginaria:

$$a_n = \operatorname{Re} a_n + i\operatorname{Im} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se convergono le successioni reali $(\operatorname{Re} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\operatorname{Im} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre, in questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Queste affermazioni seguono dalle disuguaglianze

$$\max\{|\operatorname{Re}(a_n - L)|, |\operatorname{Im}(a_n - L)|\} \le |a_n - L| \le |\operatorname{Re}(a_n - L)| + |\operatorname{Im}(a_n - L)|.$$

Definizione 1.5. Diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ ("più infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \ge M \quad \text{per ogni } n \ge \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Analogamente, diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ ("meno infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \le -M \quad \text{per ogni } n \ge \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Esercizio 1.1. Verificare usando la definizione che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} = \infty.$$

Fissato $M > 0$ arbitrariamente grande, dobbiamo trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} \ge M \quad \text{per ogni } n \ge \bar{n}. \tag{1.5}$$

Usiamo il *metodo delle maggiorazioni* e riduciamo la disuguaglianza data ad una disuguaglianza elementare. Come primo passo stimiamo il logaritmo con la disuguaglianza fondamentale

$$\log(1+x) \le x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } x > -1.$$

In effetti, ci basta la disuguaglianza $\log(1+n) \le n$ per $n \in \mathbb{N}$, che può essere verificata per induzione. Usando questa informazione, si ottiene

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} \ge \frac{n^2(n-1)}{n^2+1} \ge \frac{n-1}{2},$$

per $n \ge 1$. Dunque ci siamo ridotti alla disuguaglianza elementare

$$\frac{n-1}{2} \ge M \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 2M+1.$$

Con una scelta di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \ge 2M+1$, la (1.5) è verificata.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 1.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 1.5 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè $\pm\infty$.

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata* se l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$). Equivalentemente, la successione è limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIZIONE 1.6. Se una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

DIM. Sia $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora $|a_n| \leq C$ per ogni $n = 1, \ldots, \bar{n}$, elementarmente. Inoltre, per $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

$\square$

TEOREMA 1.7 (Operazioni coi limiti). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni in $\mathbb{R}$ (risp. in $\mathbb{C}$) convergenti. Allora:

1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3) Se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e il limite di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è 0, allora la successione quoziente $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

DIM. Indichiamo con $L, M \in \mathbb{R}$ (risp. $L, M \in \mathbb{C}$) i limiti delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

1) Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

2) Per la Proposizione 1.6, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ e $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n b_n - LM| = |a_n b_n - L b_n + L b_n - LM| \leq |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M| \leq C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon.$$

3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $M \neq 0$ per ipotesi, esiste $\widehat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \widehat{n}$ si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per $n \geq \max\{\bar{n}, \widehat{n}\}$ si ha
$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\Big| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$
□

Teorema 1.8 (Teorema del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$ si ha
$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$
Supponiamo che esistano i limiti $L, M \in \mathbb{R}$ delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rispettivamente. Se $L = M$, allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$.

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|c_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha anche
$$b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon,$$
$$L - b_n \leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon,$$
e quindi $|b_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$. □

Definizione 1.9. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$ diremo che l'affermazione $A(n)$ è vera *definitivamente*.

Il Teorema sulle operazioni coi limiti e il Teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

Proposizione 1.10. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima (ovvero $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora la successione prodotto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

Dim. Sia $C > 0$ una costante tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha
$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$
Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

Esercizio 1.2. Provare le seguenti affermazioni.

1) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$
2) Siano $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$
3) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata. Provare che la successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

4) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale, positiva, staccata da 0 ovvero: esiste $\delta > 0$ tale che $b_n \geq \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

2. Esempi di successioni elementari

Esempio 2.1 (Quoziente di polinomi). Siano P e Q polinomi a coefficienti reali (o complessi) nella variabile $x \in \mathbb{R}$ di grado p e q, rispettivamente, con $p, q \in \mathbb{N}$. Precisamente, supponiamo di avere

$$P(x) = a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$Q(x) = b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Avremo $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$ e senza perdere di generalità supponiamo che $a_p > 0$ e $b_q > 0$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q, \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } q > p. \end{cases}$$

La verifica è elementare e utilizza il teorema sulle operazioni con i limiti partendo dalla seguente identità:

$$\frac{a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_1 n + b_0} = n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} \ldots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \ldots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}.$$

Esempio 2.2 (Successione geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Studiamo la convergenza delle successione geometrica $a_n = q^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Verificheremo le seguenti affermazioni:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

L'ultima affermazione significa che il limite non esiste nè in $\mathbb{R}$ nè $\pm\infty$.

Esaminiamo il caso $-1 < q < 1$. È sufficiente considerare il caso $0 < q < 1$. Allora $q = 1 - x$ con $x \in (0, 1)$. Per tali x valgono le disuguaglianze

$$0 \leq (1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Questa disuguaglianza può essere verificata per induzione (esercizio).Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + nx} = 0,$$

dal Teorema del confronto segue che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1 - x)^n = 0.$$

Nel caso $q > 1$ si può scrivere $q = 1 + x$ con $x > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli si ottiene

$$q^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

e per confronto si trova $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Sia ora $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Dall'identità $|z^n| = |z|^n$ si deduce che per $|z| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

Se invece $|z| \geq 1$ e $z \neq 1$ il limite non esiste.

Esempio 2.3 (Radice n-esima). Per ogni numero reale $p > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

È sufficiente considerare il caso $p > 1$. Il caso $0 < p < 1$ si riduce a questo passando ai reciproci. Se $p > 1$ si ha $\sqrt[n]{p} = 1 + a_n$ con $a_n > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

si ottiene

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n},$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esempio 2.4 (Radice n-esima di una potenza di n). Per ogni numero reale $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Proviamo l'effermazione nel caso $\beta = 1$. Si ha certamente $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Usando nuovamente la disuguaglianza di Bernoulli si trova

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

e quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}.$$

Dal Teorema del confronto segue che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. In conclusione, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^2 = 1.$$

Esempio 2.5 (Confronto fra potenze ed esponenziali). Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a > 1$ e $\beta > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\beta a^n}{a^{n+1} n^\beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\beta = \frac{1}{a} < 1,$$

fissato $\frac{1}{a} < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Iterando tale disuguaglianza si ottiene

$$0 \leq b_n \leq qb_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n-\bar{n}} b_{\bar{n}} = q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}}.$$

Per confronto con la successione geometrica si deduce che $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Esempio 2.6 (Confronto fra esponenziale e fattoriale). Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $a > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

fissato $0 < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Come sopra, si conclude che $b_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio 2.7 (Confronto fra potenze e logaritmi). Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0.$$

Con la sostituzione $x_n = \log n$, ovvero $n = \mathrm{e}^{x_n}$, si ottiene per $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{\mathrm{e}^{x_n \alpha}} \leq \frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}}.$$

Siccome $\mathrm{e} > 1$ e $\alpha > 0$, la base dell'esponenziale verifica $\mathrm{e}^\alpha > 1$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\frac{([x_n]+1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}} < \varepsilon$$

non appena $[x_n] > M$. Ma siccome

$$\lim_{n\to\infty} [x_n] = \lim_{n\to\infty} [\log n] = \infty,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $[x_n] > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

3. Successioni monotone

Definizione 3.1 (Successioni monotone). Una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice:

i) *crescente* se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) *strettamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) *decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iv) *strettamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione crescente o decrescente si dice *monotona*.

Proposizione 3.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente e (superiormente) limitata. Allora la successione è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

Dim. L'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato e quindi esiste finito
$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$
Siccome L è un maggiorante di A si ha $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome L è il minimo dei maggioranti di A, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$. Dal fatto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, si deduce che per $n \geq \bar{n}$ si ha:
$$a_n \geq a_{\bar{n}} > L - \varepsilon.$$
Abbiamo dunque provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ risulta
$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon.$$
Questa è la tesi della proposizione. □

Se una successione crescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è superiormente limitata, allora un argomento analogo al precedente prova che
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$
Per le successioni decrescenti valgono affermazioni analoghe. Ad esempio, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e inferiormente limitata, allora
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$
Nella dimostrazione della Proposizione 3.2 abbiamo usato l'Assioma di completezza dei numeri reali per assicurarci dell'esistenza del numero $L \in \mathbb{R}$. La Proposizione 3.2 implica a sua volta l'Assioma di completezza. La dimostrazione di questo fatto è lasciata come esercizio.

Esercizio 3.1 (Successioni ricorsive). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la seguente successione definita in modo ricorsivo:
$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 0.$$
Provare che la successione converge a calcolarne il limite.

Mostriamo che la successione è crescente e superiormente limitata. Sia $f(x) = \sqrt{2+x}$ la funzione, definita per $x \geq -2$, che interviene nella definizione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$. Studiamo la disuguaglianza
$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2.$$
Dunque, fintantochè $0 \leq a_n < 2$ risulta $a_{n+1} > a_n$. Proviamo per induzione che $0 \leq a_n < 2$. Per $n = 0$ questo è chiaro. Inoltre, si ha
$$a_{n+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 2.$$
Questo prova che la successione è crescente (strettamente) e superiormente limitata. Dunque esiste finito
$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$
Passando al limite nella relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ ed usando la continuità di f si trova
$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L).$$
Le soluzioni dell'equazione $L = f(L)$ sono $L = -1$ che è da scartare ed $L = 2$. Dunque, il limite è $L = 2$.

4. Limiti inferiore e superiore

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definiscano:

$$b_n = \inf\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \inf_{m\geq n} a_m,$$
$$c_n = \sup\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \sup_{m\geq n} a_m.$$

Può essere $b_n = -\infty$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. In tal caso si ha $b_n = -\infty$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Può essere $c_n = \infty$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. In tal caso si ha $c_n = \infty$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

La successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente:

$$b_{n+1} = \inf_{m\geq n+1} a_m \geq \inf_{m\geq n} a_m = b_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Infatti, al crescere di n l'insieme di cui si calcola l'estremo inferiore si restringe. Analogamente, la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente:

$$c_{n+1} = \sup_{m\geq n+1} a_m \leq \sup_{m\geq n} a_m = c_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dunque, le successioni $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno limite (finito o infinito).

Definizione 4.1 (Limiti inferiore e superiore). Si definiscono i limiti inferiore e superiore di una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rispettivamente come:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

La comodità dei limiti inferiore e superiore è che sono sempre definiti.

Esempio 4.2. Ad esempio si ha:

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1} = -1, \qquad \limsup_{n\to\infty}(-1)^n \frac{n}{n+1} = 1.$$

Proposizione 4.3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $L \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A) $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n > L - \varepsilon$;

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n < L + \varepsilon$.

Dim. Sia $L = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m$, ovvero L è il massimo dei minoranti dell'insieme $A = \{c_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, con $c_n = \sup_{m\geq n} a_m$.

Affermiamo che L è un minorante di A se e solo se vale i). Infatti, L è un minorante di A se e solo se:

$$\forall \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ si ha } \sup_{m\geq \bar{n}} a_m \geq L \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\, \forall \bar{n} \in \mathbb{N}\, \exists n \geq \bar{n} \text{ tale che } a_n > L - \varepsilon.$$

Affermiamo che L è il massimo dei minoranti di A se e solo se vale l'affermazione ii). Infatti, L è il massimo dei minoranti di A se e solo se $L+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon>0$ non è un minorante di A, ovvero se e solo se:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\bar{n}\in\mathbb{N} \text{ tale che } \sup_{m\geq\bar{n}} a_m < L+\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\,\exists\bar{n}\in\mathbb{N}\,\forall n\geq\bar{n} \text{ si ha } a_n<L+\varepsilon.$$

□

Per il limite inferiore si ha un'analoga caratterizzazione che riportiamo senza prova.

Proposizione 4.4. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $L\in\mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A) $L=\liminf_{n\to\infty} a_n$;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni $\varepsilon>0$ e per ogni $\bar{n}\in\mathbb{N}$ esiste $n\geq\bar{n}$ tale che $a_n<L+\varepsilon$;

ii) Per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\bar{n}\in\mathbb{N}$ tale che per ogni $n\geq\bar{n}$ si ha $a_n>L-\varepsilon$.

La prova è omessa.

Chiaramente, vale la disuguaglianza

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Se si ha un'uguaglianza allora esiste il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Corollario 4.5. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Allora il limite

$$L=\lim_{n\to\infty} a_n$$

esiste (finito o infinito) se e solo se

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L.$$

Dim. Quando L è finito, la dimostrazione segue dall'affermazione ii) della Proposizione 4.3 insieme all'affermazione ii) della Proposizione 4.4. Quando $L=\infty$ oppure $L=-\infty$ la dimostrazione è lasciata al lettore.

□

Proposizione 4.6. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali. Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Le disuguaglianze possono essere strette.

Dim. La prova segue passando al limite per $n\to\infty$ nelle disuguaglianze

$$\inf_{m\geq n}(a_m+b_m) \geq \inf_{m\geq n} a_m + \inf_{m\geq n} b_m,$$
$$\sup_{m\geq n}(a_m+b_m) \leq \sup_{m\geq n} a_m + \sup_{m\geq n} b_m.$$

□

Esempio 4.7. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita
$$a_n = \frac{n^2\cos(n\pi)}{n^2+1}.$$
Proviamo che
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$
Partiamo dal limite superiore. Chiaramente, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha
$$a_n \leq 1 < 1+\varepsilon.$$
D'altra parte, per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ è possibile trovare $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n > 1-\varepsilon$, in quanto
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{4n^2+1} = 1.$$
Per il limite inferiore si argomenta in modo analogo. Da un lato si ha $a_n \geq -1 > -1-\varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n < -1+\varepsilon$ in quanto
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(2n+1)^2}{(2n+1)^2+1} = -1.$$

5. Esercizi

5.1. Limiti di successione.

Esercizio 5.1. 1) Usando la definizione di limite, verificare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-4}{3n^2+2\cos n} = \frac{2}{3}.$$
2) Usando il teorema sulle operazioni elementari coi limiti, calcolare il valore $L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ del seguente limite:
$$L = \lim_{n\to\infty} \Big(n - \sqrt{n^2-n}\Big).$$
Verificare la correttezza del risultato utilizzando la definizione.

Esercizio 5.2. Usando la definizione, verificare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{n/2}+\mathrm{e}^{-n/2}}}{\mathrm{e}^{n/4}} = 1.$$

Esercizio 5.3. Calcolare il seguente limite:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}.$$

Esercizio 5.4. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big).$$

Esercizio 5.5. Calcolare i seguenti limiti:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 3^n + n^2\sin(n)+1}{n^3 2^n + n^2 + (-1)^n}$; 2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n}$; 3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log^4(n)+n\arctan(n)}{n^2+\log n}$;

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n+1]{n+1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{2n}$; 5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\log n + 1/n}$; 6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Esercizio 5.6. Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso e si consideri la successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con
$$a_n = \Big(z^n + \frac{i}{2}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Provare che per $|z| < 1$ la successione converge e che per $|z| > 1$ la successione non converge.

Esercizio 5.7. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ studiare la convergenza della successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$a_n = \Big(3z^n + \frac{2ni}{3ni+1}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$
e, quando esiste, calcolarne il limite.

Esercizio 5.8. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ studiare la convergenza della successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con
$$a_n = \frac{1+iz^n}{i+|z|^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 5.9. Al variare dei numeri reali $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza della successione reale
$$a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 5.10. Al variare di $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$, studiare la convergenza della successione numerica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con
$$a_n = \frac{1}{b^n}\binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 5.11. Sia $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$. Calcolare tutti i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ in funzione di m tali che il limite
$$L = \lim_{n\to\infty} n^\beta \left(\sqrt[m]{n+1} - \sqrt[m]{n}\right)$$
esista finito e risulti $L \neq 0$.

Esercizio 5.12. Determinare tutte le coppie di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ tali che risulti
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{2n} + y^{4n}} = x^2.$$
Risposta: $x \geq y^2$ oppure $x \leq -y^2$.

Esercizio 5.13. Studiare la convergenza della successione $a_n = \sqrt{2\sqrt{3\ldots\sqrt{n}}}$, $n \geq 2$, e della successione $a_n = \sqrt{1!\sqrt{2!\ldots\sqrt{n!}}}$, $n \geq 1$.

ESERCIZIO 5.14 (Fattoriale ed n^n). Verificare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

ESERCIZIO 5.15. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista finito
$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
Provare allora che anche $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

ESERCIZIO 5.16. Al variare del parametro reale $\alpha > 0$ calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n!}{n^\alpha}.$$

ESERCIZIO 5.17. Provare il seguente teorema. Data una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

(A) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ad un limite finito);

(B) Esiste un numero $L \in \mathbb{R}$ con questa proprietà: ogni sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una ulteriore sottosuccessione che converge ad L.

L'implicazione interessante è (B)$\Rightarrow$(A).

ESERCIZIO 5.18. Risolvendo le forme indeterminate, calcolare i seguenti limiti:
$$1)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^3}{2n+1}}; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!}; \quad 3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^n + n!\log(n+1)}{2^n + (n+1)^n}.$$

5.2. Successioni ricorsive.

ESERCIZIO 5.19. Sia $a_0 \in \mathbb{C}$ un numero complesso fissato e definiamo ricorsivamente la successione
$$a_{n+1} = \frac{1}{8}\big(3a_n - i\big), \quad n \geq 0.$$
Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $\mathbb{C}$ e calcolarne il limite.

ESERCIZIO 5.20. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(x) = x - x^3$. Assegnato $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo ricorsivo tramite la relazione
$$a_{n+1} = \varphi(a_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Provare che se $a_0 \in [-1, 1]$ la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.

2) Provare che la successione converge se e solo se $|a_0| < \sqrt{2}$.

ESERCIZIO 5.21. Siano $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$. Definiamo in modo ricorsivo la successione
$$a_{n+1} = \frac{\beta a_n^2}{1 + a_n^2}, \quad n \geq 0.$$
Discutere al variare di $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$ la convergenza della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, se esiste, calcolarne il limite. Studiare prima il caso $0 < \beta < 2$, poi il caso $\beta = 2$ e infine $\beta > 2$.

Esercizio 5.22. Siano $a_0, a_1 > 0$ e per $n \geq 1$ si definisca in modo ricorsivo $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$.

i) Supponendo che $a_{n+1} \geq 2$ provare che

$$\left|\sqrt{a_{n+1}} - 2\right| \leq \frac{|\sqrt{a_n} - 2| + |\sqrt{a_{n-1}} - 2|}{2 + \sqrt{2}}.$$

ii) Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Esercizio 5.23. Sia $0 < x_0 < \pi$ e per $n \geq 1$ sia $x_n = \sin x_{n-1}$. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n.$$

Risposta: 1.

Esercizio 5.24. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente nel seguente modo: $a_0 \in (0,1)$ è un numero fissato e $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ per $n \geq 0$.

1) Provare che il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste e calcolarlo.
2) Calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} na_n$.

Esercizio 5.25. 1) Sia a_n, $n \geq 2$, la successione definita in modo ricorsivo da

$$a_2 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{2^n}} a_n, \quad n \geq 2.$$

Stabilire se la successione $(a_n)_{n\geq 2}$ converge.

2) Studiare la convergenza della successione $a_n = \sqrt{1!\sqrt{2!\dots\sqrt{n!}}}$, $n \geq 1$.

Esercizio 5.26. 1) Siano $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$. Provare l'identità

$$\varepsilon_0\sqrt{2 + \varepsilon_1\sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\Big(\frac{\pi}{4}\sum_{i=0}^{n}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\dots\varepsilon_n}{2^i}\Big).$$

2) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita in modo ricorsivo da $a_0 = 0$ e $a_{n+1} = (a_n + 2)^{1/2}$. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} 2^n(2 - a_n)^{1/2}.$$

Esercizio 5.27. Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ricorsivamente da

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = 2^{a_n/2}, \quad n \geq 1,$$

è convergente e calcolarne il limite.

5.3. Limiti superiore e inferiore.

Esercizio 5.28. Verificare che
$$\liminf_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\}=0, \quad \limsup_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\}=1,$$
dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Esercizio 5.29. Dimostrare che la successione numerica
$$a_n=\frac{n^2\cos(n\pi)}{n+1}\log\Big(\frac{n}{n+1}\Big), \quad n\geq 1,$$
non ha limite per $n\to\infty$.

Esercizio 5.30. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Provare che
$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n)=-\limsup_{n\to\infty}a_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n)=-\liminf_{n\to\infty}a_n.$$

Esercizio 5.31. Sia $x\in\mathbb{Q}$ un numero razionale non negativo, $x\geq 0$. Calcolare il limite superiore:
$$L^+=\limsup_{n\to\infty}\Big(\sin\Big(\Big(\frac{1}{2}+nx\Big)\pi\Big)-\frac{1}{n}\Big).$$
Casa si riesce a dire del limite inferiore?
$$L^-=\liminf_{n\to\infty}\Big(\sin\Big(\Big(\frac{1}{2}+nx\Big)\pi\Big)-\frac{1}{n}\Big)$$

Esercizio 5.32. Sia $x\in\mathbb{Q}$ un numero tale che $x=p/q$ con p intero dispari e $q\geq 2$ intero pari. Calcolare i seguenti
$$\liminf_{n\to\infty}\big|\mathrm{e}^{2\pi nxi}+1\big|^2 \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty}\big|\mathrm{e}^{2\pi nxi}+1\big|^2.$$

Esercizio 5.33. Si consideri la successione numerica
$$a_n=n!+\frac{(-1)^n}{n}, \quad n\in\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}.$$
Al variare del numero razionale $x\in\mathbb{Q}$ calcolare i seguenti
$$L^+=\limsup_{n\to\infty}n\sin\big(xa_n\pi\big) \quad \text{e} \quad L^-=\liminf_{n\to\infty}n\sin\big(xa_n\pi\big).$$

Esercizio 5.34. Dimostrare che la successione numerica
$$a_n=\frac{n^2\cos(n\pi)}{n+1}\log\Big(\frac{n}{n+1}\Big), \quad n\geq 1,$$
non ha limite per $n\to\infty$.

Esercizio 5.35. Siano $z, w \in \mathbb{C}$ due numeri complessi. Calcolare il limite superiore
$$\limsup_{n\to\infty} |z^n - w^n|^{1/n}.$$
Cosa si riesce a dire sull'esistenza del limite?

5.4. Altri esercizi.

Esercizio 5.36. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{j,k>1, j+k=n}\frac{1}{jk}.$$

Esercizio 5.37. Sia $k > 0$. Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to\infty}\big(2k^{1/n}-1\big)^n$.

Esercizio 5.38. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che verifica $a_1 > 1$ e $a_1 + \ldots + a_{n-1} < a_n$ per ogni $n \geq 2$. Provare che esiste un numero reale $q > 1$ tale che $a_n > q^n$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 5.39. Usando il limite
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$
e le proprietà elementari dei limiti, verificare che
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Esercizio 5.40. Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+k^2}$. Risp.: $\frac{\pi}{2}$.

Esercizio 5.41. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale tale che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 = 1$. Provare che $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n)^{\frac{1}{3}}a_n = 1$.

Esercizio 5.42. Provare che $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!\mathrm{e}) = 2\pi$.

Esercizio 5.43. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione positiva, $a_n > 0$, convergente ad $L \in \mathbb{R}$. Provare che
$$\lim_{n\to\infty}(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^{1/n} = L.$$

Esercizio 5.44. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\big(2\sqrt[n]{n}-1\big)^n.$$

ESERCIZIO 5.45. Siano $a_n, b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $a_n \to a > 0$ e $b_n \to b > 0$. Siano $p, q > 0$ tali che $p + q = 1$. Calcolare il limite

$$\lim_{n\to\infty} (pa_n + qb_n)^n.$$

ESERCIZIO 5.46. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx.$$

ESERCIZIO 5.47. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n \in \mathbb{R}$ l'unica radice positiva del polinomio $p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$ nella variabile $x \in \mathbb{R}$. Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.

ESERCIZIO 5.48. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}} \sin^n(x) \cos(x).$$

ESERCIZIO 5.49. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}.$$

ESERCIZIO 5.50. Sia $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni reali limitate:

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione in } \mathbb{R} \text{ limitata}\big\}.$$

Nel seguito indichiamo con $\mathrm{x} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un generico elemento di $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

1) Verificare che $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione scalare per le successioni.
2) Verificare che la funzione $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ così definita
$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \sup\big\{|a_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$
definisce una norma.
3) Verificare che la funzione $d_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \times \ell^\infty(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ così definita
$$d_\infty(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_\infty$$
è una distanza su $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

CHAPTER 4

Serie reali e complesse

1. Serie numeriche. Definizioni

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succesione reale ocomplessa. Vogliamo definire, quando possibile, la somma di tutti gli a_n al variare di $n \in \mathbb{N}$. Tale somma di infiniti termini si indica con il seguente simbolo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{1.6}$$

Con tale notazione si vuole indicare un numero reale o complesso. Chiameremo un'espressione come in (1.6) una serie reale (risp. complessa).

Formiamo la *successione delle somme parziali*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può convergere in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, oppure può non convergere. Nel caso reale la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può divergere a ∞ o $-\infty$.

Definizione 1.1. i) Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $s \in \mathbb{R}$ oppure $s \in \mathbb{C}$, poniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

e diremo che la serie *converge* ed ha come *somma* s.

ii) Nel caso reale, se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ o $-\infty$, diremo che la serie *diverge* a ∞ o $-\infty$ e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

iii) Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e nel caso reale non diverge nè a ∞ nè a $-\infty$, diremo che la serie *non è definita*.

iv) Il generico addendo a_n, $n \in \mathbb{N}$, che appare nella serie (1.6) si dice *termine generale* della serie, ed $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione dei termini generali.

Teorema 1.2 (Condizione necessaria di convergenza). Se una serie reale o complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge allora la successione dei termini generali è infinitesima, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dim. Per ipotesi esiste $s \in \mathbb{R}$ oppure $s \in \mathbb{C}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Dunque, si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

□

2. Serie geometrica. Serie telescopiche

2.1. Serie geometrica. Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso tale che $z \neq 1$. Ricordiamo la formula per le somme geometriche parziali

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $|z| < 1$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$. Se invece $|z| \geq 1$ il limite non esiste (o non esiste finito). Dunque, si ottiene la formula per la serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| < 1.$$

Ad esempio, con $z = 1/2$ si trova la somma della serie geometrica reale di ragione $1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$

2.2. Serie telescopiche. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa e formiamo la successione delle differenze $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} - a_0.$$

Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un limite L, allora la serie con termine generale b_n converge e inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = L - a_0.$$

Ad esempio, si trova

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.\end{aligned}$$

2.3. Somma di tutti gli $1/n^2$. Vogliamo provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

converge. È noto che la sua somma è $\pi^2/6$, ma non lo proveremo. Dalle disuguaglianze

$$n^2 \geq n(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

si ottiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$$

e per confronto la serie in esame converge.

2.4. Somma di tutti gli $1/n$. Vogliamo provare che la seguente serie (detta armonica) diverge a ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

In effetti, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty,\end{aligned}$$

e dunque la serie diverge a ∞. Trasformeremo questa idea di dimostrazione in un criterio generale (Criterio di condensazione di Cauchy).

3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione reale non negativa, allora la successione delle somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è monotona crescente e quindi il limite di $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esiste sempre, finito oppure ∞.

Teorema 3.1 (Criterio del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente (ovvero per ogni $n \geq \bar{n}$ per qualche $\bar{n} \in \mathbb{N}$). Allora:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty;$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$

DIM. Senza perdere di generalità supponiamo che $0 \le a_n \le b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Le somme parziali

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n \\ \sigma_n &= b_0 + b_1 + \ldots + b_n \end{aligned}$$

verificano $s_n \le \sigma_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed inoltre convergono perchè sono monotone crescenti. Dunque si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to\infty} \sigma_n,$$

da cui si ottengono le conclusioni i) e ii).

□

TEOREMA 3.2 (Criterio della radice). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale non negativa, $a_n \ge 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale non è infinitesimo.

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

DIM. i) Sia $\varepsilon > 0$ tale che $q = L + \varepsilon < 1$. Per la caratterizzazione del limite superiore, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \le q$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Dunque $a_n \le q^n$ per ogni $n \ge \bar{n}$, e quindi

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \le \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Per confronto, questo prova la convergenza della serie data.

ii) Sia $\varepsilon > 0$ tale che $q = L - \varepsilon > 1$. Per la caratterizzazione del limite superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un indice $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $k_n \ge n$ e $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} > q$. Inoltre, è possibile scegliere la successione $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo tale che $k_n < k_{n+1}$. La (sotto)successione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty.$$

Quindi la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima, e per la condizione necessaria di convergenza la serie non converge, e dunque diverge (essendo a termini non negativi).

□

TEOREMA 3.3 (Criterio del rapporto). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale verifica
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$
Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

Dim. i) Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $q = L + \varepsilon < 1$. Dalla definizione di limite segue che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n/a_{n-1} \leq q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque si ha
$$a_n \leq qa_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$
per ogni $n \geq \bar{n}$, e pertanto
$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq a_{\bar{n}} q^{-\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$
Per confronto, questo prova la convergenza della serie.

ii) Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $q = L - \varepsilon > 1$, ed esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia
$$a_n \geq qa_{n-1} \geq \ldots \geq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}.$$
Questo prova che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ e dunque non è verificata la condizione necessaria di convergenza e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

4. Criterio di condesazione di Cauchy per serie reali

Teorema 4.1 (Criterio di Cauchy). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione non negativa, monotona decrescente. Allora si ha:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Dim. Per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia $i \in \mathbb{N}$ un indice tale che $2^{n-1} \leq i \leq 2^n - 1$. Siccome la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente, per tali i si ha $a_i \leq a_{2^{n-1}}$, e sommando si ottiene
$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \leq a_{2^{n-1}}(2^n - 2^{n-1}) = 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$
Sommando ora su n si trova
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$
Se converge la serie a destra, allora per confronto converge anche la serie a sinistra.

Proviamo l'implicazione opposta. Se l'indice $i \in \mathbb{N}$ verifica $2^{n-1} + 1 \leq i \leq 2^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora $a_i \geq a_{2^n}$. Sommando su tali i e poi su $n \in \mathbb{N}$, si trova
$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$
Per confronto, se converge la serie a sinistra, converge anche la serie a destra. □

Esempio 4.2 (Serie armonica generalizzata). Sia $\alpha > 0$ un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Abbiamo già discusso il caso $\alpha = 1, 2$. La successione $a_n = 1/n^\alpha$, $n \geq 1$, è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^n.$$

Se $\alpha > 1$ si ha una serie geometrica convergente. Se $0 < \alpha \leq 1$ la serie diverge. Dunque, la serie in esame converge se e solo se $\alpha > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Esempio 4.3 (Serie logaritmiche). Sia $\alpha > 0$ un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}.$$

La successione $a_n = 1/(n \log^\alpha n)$, $n \geq 2$, è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\alpha 2}.$$

Per quanto visto sulla serie armonica generalizzata, la serie in esame converge se e solo se $\alpha > 1$.

5. Convergenza assoluta di serie reali e complesse

In questa sezione illustriamo il Criterio della convergenza assoluta, che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza di serie complesse e di serie reali non necessariamente positive.

Definizione 5.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa. Diciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *assolutamente* se converge la serie reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Teorema 5.2. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa. Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge anche semplicemente ed inoltre

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{5.7}$$

Dim. Iniziamo a considerare il caso in cui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione reale e definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la parte positiva e la parte negativa della successione nel seguente modo
$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$
Le successioni $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ verificano le seguenti proprietà: i) $a_n^+ \geq 0$ e $a_n^- \leq 0$; ii) $a_n = a_n^+ + a_n^-$; iii) $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$; iv) $a_n^+, -a_n^- \leq |a_n|$. Dal teorema del confronto abbiamo
$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad 0 \leq -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$
Dalle identità
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ + a_k^-) = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$
segue allora anche l'esistenza finita del limite
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$
Infine, dalla disuguaglianza
$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$
segue la tesi (5.7). Questo termina la prova nel caso reale.

Sia ora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa e definiamo $\alpha_n = \mathrm{Re}(a_n)$ e $\beta_n = \mathrm{Im}(a_n)$. Dalle disuguaglianze $|\alpha_n| \leq |a_n|$ e $|\beta_n| \leq |a_n|$ deduciamo che le serie reali
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$
convergono assolutamente e quindi semplicemente. Converge allora anche la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$
La prova di (5.7) è identica al caso reale. □

6. Criterio di Abel-Dirichlet e criterio di Leibniz

In questa sezione vogliamo studiare la convergenza di serie reali oscillanti della forma
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n \geq 0,$$
e di serie complesse della forma
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

Lemma 6.1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse. Allora per ogni $N\in\mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n (a_{n+1}-a_n), \tag{6.8}$$

dove abbiamo posto $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ per $n\geq 1$ e convenuto che $B_0=0$.

Dim. La verifica è elementare e parte dall'identità $b_n = B_n - B_{n-1}$. Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=1}^{N} a_n B_{n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n\\ &= a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n (a_{n+1}-a_n).\end{aligned}$$

□

Per analogia con gli integrali potremmo chiamare la successione delle somme parziali $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ la *primitiva* della successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 6.2 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale decrescente e infinitesima. Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa con primitiva limitata: esiste $C>0$ tale che $|B_n|\leq C$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Allora la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Dim. Usando la formula di somma per parti (6.8) si trova

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k (a_{k+1}-a_k).$$

Dalla disuguaglianza $|a_n B_n| \leq C|a_n|$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} a_n B_n = 0.$$

Se proviamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k (a_{k+1}-a_k).$$

converge assolutamente, allora converge anche semplicemente per il teorema sulla convergenza assoluta. La tesi segue.

Usiamo un argomento di confronto. Usando le proprietà delle serie telescopiche, troviamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k(a_{k+1}-a_k)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1}-a_k| = C \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = Ca_1 < \infty.$$

Per togliere il valore assoluto abbiamo usato il fatto che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

□

Da un esame della dimostrazione precendente è chiaro che il Teorema 6.2 ha la seguente variante.

Teorema 6.3. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa infinitesima tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}-a_n| < \infty.$$

Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione con le stesse proprietà del Teorema 6.2. Allora la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Un caso speciale del Teorema 6.2 è il Criterio di Leibniz.

Teorema 6.4 (Criterio di Leibniz). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale decrescente e infinitesima. Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

converge.

Dim. La tesi segue dal Teorema 6.2, infatti la successione $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ha primitiva limitata:

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \Big| \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Esempio 6.5. Per ogni numero reale $0 < \alpha \leq 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

è convergente per il Criterio di Leibniz, in quanto la successione $a_n = 1/n^\alpha$ è decrescente ed infinitesima. La serie, tuttavia non è assolutamente convergente, come si deduce dal Criterio di condensazione di Cauchy.

Esempio 6.6. Per $0 < \alpha \leq 1$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$, studiamo la convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\vartheta}}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\vartheta)}{n^\alpha} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\vartheta)}{n^\alpha}.$$

Per $\vartheta = 0$ la serie diverge. Studiamo il caso $0 < \vartheta < 2\pi$. Posto $b_n = \mathrm{e}^{in\vartheta}$, la successione delle somme parziali è

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\vartheta} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^k = \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1-\mathrm{e}^{i\vartheta}} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{i\vartheta}-\mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1-\mathrm{e}^{i\vartheta}},$$

con formula ben definita per $\mathrm{e}^{i\vartheta} \neq 1$. Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|B_n| = \left|\frac{\mathrm{e}^{i\vartheta}-\mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1-\mathrm{e}^{i\vartheta}}\right| \leq \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{i\vartheta}|} < \infty.$$

Per il Criterio di Abel-Dirichlet, la serie in esame converge per $\vartheta \in (0, 2\pi)$.

7. Esercizi

7.1. Serie geometria e serie telescopiche.

Esercizio 7.1. Calcolare esplicitamente la somma della seguenti serie

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}, \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Esercizio 7.2. Per $0 \leq r < 1$ ed $x \in \mathbb{R}$ calcolare la somma delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\cos nx}{n}.$$

7.2. Criteri del confronto, radice, rapporto e condensazione.

Esercizio 7.3. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\mathrm{e}^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \quad \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \big|\sin(\sin n)\big|^n.$$

Esercizio 7.4. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^{2n}+|2x|^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 7.5. Al variare dei numeri reali $a, b > 0$ discutere la convergenza delle serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} n\log(1+a^n); \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}.$$

Esercizio 7.6. Al variare del numero reale $x > 1$ discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}.$$

Esercizio 7.7. Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza delle serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \log\Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big); \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}(\sqrt{1+n^4}-n^2); \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha+1}.$$

Esercizio 7.8. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x>0} \Big(\frac{x}{1+x^n}\Big)^n.$$

Esercizio 7.9. Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$ diverge.

Esercizio 7.10. Al variare del numero reale $\alpha > 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}}.$$

Esercizio 7.11. Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}(n+1)^{n+2}}{(n+3)!}.$$

Esercizio 7.12. Al variare di $0 < x < 1$ ed $\alpha > 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{(\log n)^{\alpha}}.$$

7.3. Serie a segno alterno. Convergenza assoluta.

Esercizio 7.13. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^{n+1}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n\big(\sin(2x)\big)^n}{n^2+1}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}$.

Esercizio 7.14. Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(1-n\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Esercizio 7.15. Sia $0 < a < 1$ un numero reale.

i) Definita $a_n \in (-1,0)$ tramite la relazione $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, provare che

$$|a_n| \le \frac{1}{n}\Big(\frac{1-a}{a}\Big), \quad n \ge 1.$$

ii) Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1}.$$

Esercizio 7.16. Al variare di $x \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n(x^2-3x+2)^n}{2^n(n^2+4)}.$$

Esercizio 7.17. Al variare del numero reale $x > 1$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\log x)^{1/n}}{n}.$$

7.4. Esercizi generali sulle serie.

Esercizio 7.18. Sia Q un quadrato di lato 2 e sia Q_n, $n \geq 1$, una successione di quadrati tali che Q_n abbia lato $1/n$. È possibile disporre tutti i quadrati Q_n dentro il quadrato Q senza che si sovrappongano fra loro?

Esercizio 7.19. Sia $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale infinitesima tale che $q_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mostrare tramite esempi che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+q_n}}$ può sia convergere che divergere.

Esercizio 7.20. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga. Provare che anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.

Esercizio 7.21. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $b_n \neq 0$ e $a_n+b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a_n}{b_n}\Big)^2$$

convergano. Provare che converge anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n + b_n}$.

Esercizio 7.22. Sia $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una funzione non negativa tale che: a) $\varphi(0) = 0$; b) φ è strettamente crescente; c) φ è continua.

1) Provare che per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale l'implicazione

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|) < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|a_n|^2) < \infty.$$

2) Determinare il sottoinsieme minimo delle ipotesi a), b) e c) su $\varphi \geq 0$ tale che sia vera l'implicazione $(*)$.

Esercizio 7.23. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva e crescente. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}\Big)$$

converge se e solo se esiste finito il limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

Suggerimento. Serie telescopiche. In una direzione, può essere utile usare $\log(1 + x) \leq x$.

7.5. Esercizi vari.

ESERCIZIO 7.24. Provare che per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ non negativo vale l'identità

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n} = 1 - 2\{x\},$$

dove $[x]$ e $\{x\}$ sono la parte intera e la parte frazionaria di x. Lavorare in rappresentazione binaria. Lavorare in rappresentazione binaria

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k \in \{0,1\}.$$

ESERCIZIO 7.25. Sia $(a_n)_{n\in}$ una successione di numeri reali positivi, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n} \leq \mathrm{e} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

ESERCIZIO 7.26. Sia $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo che la serie complessa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converga. Dimostrare che

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = 0.$$

ESERCIZIO 7.27. Provare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \int_0^1 x^{-x} dx.$$

Idea: usare lo sviluppo di Taylor di e^x e integrare per parti.

ESERCIZIO 7.28. Mostrare che per ogni $p > 0$ si ha l'identità

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^p} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+pn}.$$

ESERCIZIO 7.29. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie di potenze complessa $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$, $z \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO 7.30. Calcolare la somma della serie in $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \quad \text{dove} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}.$$

ESERCIZIO 7.31. Studiare la convergenza della serie di funzioni nella variabile $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{x}{1+x^n} \Big)^n.$$

Esercizio 7.32. Sia $\beta \in \mathbb{R}$ e si definisca per ricorrenza la successione

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n^\beta} \sin a_n \quad \text{per } n \geq 0. \end{cases}$$

Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

7.6. Criterio del confronto asintotico.

Esercizio 7.33. Al variare di $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza delle serie

$$1) \ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sqrt[3]{1 + \frac{\alpha}{n}} - \sqrt{1 + \frac{\beta}{n}} \Big); \quad 2) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(1/n^\alpha)}{[1 - \cos(1/n)]^\beta}.$$

Esercizio 7.34. Al variare del parametro $\alpha \geq 0$, studiare la convergenza delle serie numeriche:

$$1) \ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin(1/n^\alpha) \log\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\sqrt{n+1}\arctan(n)}; \quad 2) \ \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{1 + 1/n^2} - \cos(1/n) \right).$$

Esercizio 7.35. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/3} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sqrt[3]{1+n}}{\log(1+n^2)}.$$

Esercizio 7.36. Studiare la convergenza della seguente serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^\alpha} \Big[\frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \Big] \log n.$$

8. La funzione esponenziale e^x

Definiamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per il Criterio del Rapporto la serie converge (assolutamente) per ogni $x \in \mathbb{R}$. Useremo anche la notazione $\varphi(x) = e^x$ per indicare la *funzione esponenziale.*

Teorema 8.1. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito e precisamente:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{8.9}$$

Inoltre, per $x > 0$ la convergenza è monotona crescente.

Dim. Ci limiteremo al caso $x > 0$. Proviamo che la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è crescente e superiormente limitata. Dalla Proposizione 3.2 segue l'esistenza finita del limite in (8.9).

Dalla formula del binomio di Newton si ottiene

$$a_n = \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{x^k}{k!}, \tag{8.10}$$

e in modo analogo

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big)\frac{x^k}{k!}.$$

Dalle disuguaglianze

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big) < \Big(1-\frac{1}{n+1}\Big),\dots,\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) < \Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big),$$

valide per $k = 0, 1, \dots, n$, e dal fatto che $x^k > 0$ segue che $a_n < a_{n+1}$. Siccome

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big) < 1,\dots,\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) < 1,$$

dall'identità (8.10) si trova anche la maggiorazione

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < \infty. \tag{8.11}$$

Questo prova l'esistenza finita del limite. Inoltre, per $n \to \infty$ si ottiene la disuguaglianza

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Proviamo la disuguaglianza opposta. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri tali che $n \geq m$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{x^k}{k!} \\ &\geq \sum_{k=0}^{m} \Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

e facendo ora il limite per $m \to \infty$ si trova

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Questo termina la dimostrazione del teorema nel caso $x > 0$. □

Osservazione 8.2 (Stima del resto). Siano $x \in \mathbb{R}$ ed $m, n \in \mathbb{N}$ numeri tali che $0 < x < m \leq n$. Spezziamo la somma parziale della serie esponenziale nel seguente modo:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{m^{k-m} m!}.$$

Abbiamo usato la disuguaglianza $k! = k(k-1)\cdot\ldots\cdot(m+1)m! > m^{k-m}m!$. D'altra parte, dalla formula per la somma geometrica parziale, si ottiene

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{m^{k-m}m!} = \frac{x^m}{m!}\sum_{h=0}^{n-m}\Big(\frac{x}{m}\Big)^h = \frac{x^m}{m!}\frac{1-(x/m)^{n-m+1}}{1-x/m} < \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}.$$

Abbiamo usato il fatto che $m > x > 0$. In conclusione, troviamo la maggiorazione per il resto:

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{x^k}{k!} < \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}, \quad 0 < x < m \le n.$$

Questa disuguaglianza non dipende da n, nel membro di destra, e quindi si trova la stima per il resto della serie esponenziale

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \le \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}, \quad 0 < x < m. \tag{8.12}$$

Applichiamo questa formula per una stima del numero di Nepero che, per definizione, è il numero

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $\mathrm{e} > \sum\limits_{k=0}^{m-1} 1/k!$, e con la scelta $m = 4$ si ottiene la stima dal basso

$$\mathrm{e} > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2 + \frac{2}{3}.$$

Per ottenere una stima dall'alto si può usare la (8.12) con $x = 1$:

$$\mathrm{e} \le \sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^k}{k!} + \frac{m}{m!(m-1)},$$

che con $m = 4$ fornisce

$$\mathrm{e} \le 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} < 3.$$

Osservazione 8.3. Presentiamo una seconda dimostrazione del Teorema 8.1. Precisamente, vogliamo provare che per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e proviamo che è possibile scegliere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \ge n$ si abbia:

$$\Big|\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Big| < \varepsilon$$

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ da discutere tali che $m \le n$. Dalla formula per il Binomio di Newton si trova, come in (8.10) nella dimostrazione del Teorema 8.1,

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1}\Big[\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big]\frac{z^k}{k!} \\ + \sum_{k=m}^{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{z^k}{k!} - \sum_{k=m}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.\end{aligned}$$

Prendendo i moduli ed usando la subadittività si ottiene

$$\begin{aligned}\Big|\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Big| &\le \sum_{k=0}^{m-1}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!} \\ &\quad + \sum_{k=m}^{n}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\Big|\frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} \\ &\le \sum_{k=0}^{m-1}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!} + 2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}.\end{aligned}$$

Possiamo scegliere $m \in \mathbb{N}$ con $m > |z|$ e indipendentemente da n tale che – usiamo la stima del resto, ma se ne potrebbe fare a meno –

$$2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} \le \frac{2|z|^m}{m!}\frac{m}{m-|z|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A questo punto, possiamo scegliere $\bar{n}$ tale che per $n \ge \bar{n}$ si abbia:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Questo conclude la dimostrazione.

Teorema 8.4. La funzione esponenziale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$, verifica le seguenti proprietà:

1) $\mathrm{e}^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
2) $\mathrm{e}^{-x} = 1/\mathrm{e}^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3) $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y$ se $x < y$.
4) $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
5) Per ogni $y > 0$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{e}^x = y$.

Dim. Diamo solo dei cenni sulle dimostrazioni. 1) Quando $x \ge 0$, la positività deriva dalla definizione

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \ge 1 > 0.$$

Quando $x < 0$, la positività deriva dal punto 2) che ora verifichiamo.

2) Osserviamo preliminarmente che

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big)^n = 1.$$

Questo segue dal Teorema del confronto a partire dalle seguenti disuguaglianze (usiamo la disuguaglianza di Bernoulli)

$$1 > \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}.$$

Dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si trova

$$1 = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)^n = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Ovvero, $\mathrm{e}^{-x} = (\mathrm{e}^x)^{-1}$.

3) Che per $x \geq 0$ la funzione esponenziale sia strettamente crescente deriva dalla definizione. Per $x < 0$ la monotonia deriva dal punto 2).

4) Una prova di tale identità si può ottenere mostrando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Big(1 + \dfrac{x+y}{n}\Big)^n}{\Big(1 + \dfrac{x}{n}\Big)^n \Big(1 + \dfrac{y}{n}\Big)^n} = 1.$$

La verifica di questo fatto è lasciata come esercizio al lettore.

5) La verifica della suriettività richiede il Teorema dei valori intermedi per le funzioni continue ed è omessa.

□

Osservazione 8.5. 1) La proprietà 4) si può esprimere anche in questo modo: la funzione esponenziale $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ è un omomorfismo dal gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ al gruppo moltiplicativo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, dove $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

2) La funzione esponenziale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$, è iniettiva e suriettiva. Dunque, è definita la sua funzione inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, che è la funzione logaritmo $\varphi^{-1} = \log$.

3) Il numero e non è razionale, $\mathrm{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La prova di questo fatto è lasciata come esercizio al lettore.

9. Teorema di Bolzano-Weierstrass

Introduciamo la nozione di sottosuccessione.

Definizione 9.1. Una *selezione crescente* di indici è una funzione (successione) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che è strettamente crescente, $k(n) < k(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scriveremo $k_n = k(n)$.

Definizione 9.2. Una *sottosuccessione* di una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione della forma $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ con $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ selezione crescente di indici.

Sappiamo che tutte le successioni convergenti sono limitate. Le successioni limitate in generale non sono convergenti, ma hanno sempre una sottosuccessione convergente.

Teorema 9.3 (della sottosuccessione convergente). *Ogni successione reale o complessa limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente.*

La dimostrazione del Teorema 9.3 si basa sul Teorema di Bolzano-Weierstrass.

DEFINIZIONE 9.4. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se per ogni $\delta > 0$ si ha

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset,$$

ovvero, equivalentemente, se per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$.

Ricordiamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice *limitato* se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $A \subset [a, b]$.

TEOREMA 9.5 (Bolzano-Weierstrass). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato con $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Allora A ha almeno un punto di accumulazione.

DIM. La dimostrazione si basa sul metodo di *dicotomia*. Siccome A è limitato esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tali che $A \subset [a, b]$. Definiamo $a_0 = a$, $b_0 = b$ e sia $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio. Consideriamo i due intervalli $[a_0, c_0]$ e $[c_0, b_0]$. Uno dei due intervalli deve contenere infiniti elementi di A. Sia ad esempio $[a_0, c_0]$. Allora definiamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$. Si hanno le disuguaglianze

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0, \quad \text{e} \quad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0).$$

Procediamo ora in modo induttivo. Supponiamo di aver già scelto dei numeri $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ con queste proprietà:

i) $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$;
ii) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$;
iii) L'intervallo $[a_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A.

Selezioniamo dei numeri a_{n+1} e b_{n+1} nel seguente modo. Definiamo $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Uno dei due intervalli $[a_n, c_n]$ e $[c_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A. Supponiamo sia ad esempio il secondo. Definiamo allora $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$. Le affermazioni i), ii), iii) sono allora verificate con $n + 1$ al posto di n.

Abbiamo costruito una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è monotona crescente e superiormente limitata, ed una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è monotona decrescente inferiormente limitata. Dunque esistono finiti i limiti

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad M = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dalla proprietà ii) segue che

$$M - L = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0,$$

e dunque $L = M$. Proviamo che il punto $x_0 = L = M$ è un punto di accumulazione per A.

Fissiamo $\delta > 0$ e scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $b_n - a_n < \delta$. Questo è certamente possibile. Siccome $a_n \leq x_0 \leq b_n$, si ha $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I_\delta(x_0)$. Siccome $[a_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A, l'insieme $A \cap I_\delta(x_0)$ contiene infiniti elementi e dunque certamente $A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. □

OSSERVAZIONE 9.6. Provare che il Teorema di Bolzano-Weierstrass implica (e di fatto è equivalente a) l'Assiona di completezza dei numeri reali.

Dimostrazione del Teorema 9.3. Senza perdere di generalità possiamo supporre che la successione sia reale. Nel caso di una successione complessa è sufficiente estrarre una prima sottosuccessione della parte reale e poi un'ulteriore sottosuccessione di quella immaginaria (ci sono due processi di selezione di una sottosuccessione, il secondo subordinato al primo).

Si consideri dunque l'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. Se A contiene un numero finito di elementi, allora almeno uno di questi ricorre per infinite scelte di indici e si può estrarre una sottosuccessione costante.

Possiamo allora supporre $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, A ha un punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R}$. Per ogni $\delta = 1/n$, l'insieme $A \cap I_\delta(x_0)$ contiene infiniti elementi. Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $a_{k_n} \in I_{1/n}(x_0)$. È possibile selezionare in modo ricorsivo k_n in modo tale che $k_n > k_{n-1}$. Quindi $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dalla disuguaglianza

$$|a_{k_n} - x_0| \leq \frac{1}{n}$$

segue che $a_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. □