Analisi Matematica 1 – Matematica

Insiemi, cardinalità, induzione, Binomio di Newton — Foglio 1

Esercizio 1 Sia $f : A \to B$ una funzione.

1) Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha $C \subset f^{-1}(f(C))$. Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia iniettiva.

2) Provare che per ogni insieme $D \subset B$ si ha $f(f^{-1}(D)) \subset D$. Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia suriettiva.

Esercizio 2 Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f, ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita. Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.

2) Stabilire se f è iniettiva. Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

Esercizio 3 Siano A, B, C insiemi finiti e indichiamo con $|A| = \mathrm{Card}(A)$ la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Provare preliminarmente che $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Esercizio 4 Siano $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$, $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < 1\}$ e $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Esibendo biiezioni concrete, provare che:

1) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}([0,1))$;

2) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}((0,1))$;

3) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5 Dimostrare che per $n \ge 1$ si ha:

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \ge 2(\sqrt{n+1} - 1), \qquad 2) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{n}.$$

Esercizio 6 Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Calcolare il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x + a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x + b)^m$. Precisamente, calcolare i polinomi $s(x)$ (il quoziente della divisione) ed $r(x)$ (il resto della divisione) tali che $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, dove il grado di r è al più $m - 1$.

Esercizio 7 Sia $\mathcal{A} = \{I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervallo}\}$ un insieme costituito da intervalli non degeneri $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$. Supponiamo che $\mathcal{A}$ verifichi: $I, J \in \mathcal{A}$ con $I \cap J \neq \emptyset$ implica $I = J$ (ovvero, gli intervalli sono a coppie disgiunti).
Dimostrare che $\mathcal{A}$ è numerabile.

Suggerimento: stimare il numero di intervalli di $\mathcal{A}$ di lunghezza maggiore di $1/n$ contenuti nell'intervallo $(-m, m)$, con $n, m \geq 1$.