

Analisi Matematica 1 – Matematica

Topologia

Venerdì 10 Gennaio - Foglio 10

A. Esercizi di primo livello

Esercizio 1 1) Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato. Provare che $\sup A \in \bar{A}$. 2) Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ e $Z = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Provare che A è aperto e che Z è chiuso. Provare che $\partial A \subset Z$. È sempre vero che $\partial A = Z$?

Esercizio 2 Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $A, B \subset X$. Provare che:

i) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

ii) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, con inclusione che può essere stretta.

B. Esercizi di secondo livello

Esercizio 3 Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme con questa proprietà: per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'insieme $A \cap (n, n+1)$ è chiuso. Provare che A è chiuso.

Esercizio 4 Sia \mathbb{R} munito della distanza Euclidea e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; iv) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

Esercizio 5 Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \left\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Calcolare la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ rispetto alla distanza standard di \mathbb{R} .

C. Esercizi di terzo livello

Esercizio 6 Provare che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ è l'unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.

Esercizio 7 Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 < 0\}.$$

i) Provare che A è contenuto in un quadrato $[-M, M] \times [M, M]$ per $M > 0$ opportuno.

ii) Provare che A è aperto.

iii) Dimostrare che $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 = 0\}$.

iv) Rappresentare A nel piano Cartesiano (in modo approssimativo).