Analisi Matematica 1 – Matematica

Numeri reali, sup e inf, parte intera — Foglio 2

Esercizio 1 Siano dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{1+2n^2}{1+n^2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \right\},$$

$$C = \left\{ x^2 - 2x \sin x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \right\}, \quad D = \left\{ \frac{n^2 \cos(1/n)}{1-n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \right\}.$$

1) Determinare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.

2) Determinare $\inf B$ e verificare che $\sup B = 1/2$. Dire se esistono $\min B$ e $\max B$.

3) Verificare che $\sup C = \infty$.

4) Verificare che $\inf D = -\infty$.

Esercizio 2 Usando gli Assiomi (S1)-(O2) per un campo ordinato, provare le seguenti affermazioni:

1) Per ogni x si ha $x^2 \geq 0$ (già risolto negli appunti);

2) Per ogni x, y, z vale l'implicazione: $x \leq y$ e $z \leq 0 \Rightarrow yz \leq xz$.

Indicare in ciascun passaggio l'assioma che si utilizza.

Esercizio 3 Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri naturali positivi. Provare che è sempre vera una delle due disuguaglianze

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n} \quad \text{oppure} \quad \frac{m+2n}{m+n} < \sqrt{2} < \frac{m}{n}.$$

Calcolare il minimo

$$\min \left\{ \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right|, \left| \frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2} \right| \right\}.$$

Esercizio 4 Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha:

$$[x] + [x + 1/n] + \ldots + [x + (n-1)/n] = [nx],$$

dove $[x]$ è la parte intera di x.

Esercizio 5 Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una funzione iniettiva tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si abbia

$$|x - y| \leq 10 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq 10.$$

Determinare la funzione f.

Esercizio 6 Siano $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ numeri reali e sia $x = x_1 + \ldots + x_n$ la loro somma. Provare che

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq \frac{x^2}{4}.$$