

Analisi Matematica 1 – Matematica

Esercizio 1 Sia $a_0 \in \mathbb{C}$ un numero complesso fissato e definiamo ricorsivamente la successione

$$a_{n+1} = \frac{1}{8}(3a_n - i), \quad n \geq 0.$$

Provare che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in \mathbb{C} e calcolarne il limite.

Esercizio 2 Sia Q un quadrato di lato 2 e sia Q_n , $n \geq 1$, una successione di quadrati tali che Q_n abbia lato $1/n$. È possibile disporre tutti i quadrati Q_n dentro il quadrato Q senza che si sovrappongano fra loro?

Esercizio 3 Al variare dei numeri reali $\alpha > 0$ ed $x > 1$ studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}.$$

Esercizio 4 Studiare la convergenza delle successioni $(a_n)_{n \geq 2}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ così definite:

$$a_n = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\dots\sqrt{n}}}}, \quad n \geq 2; \quad b_n = \sqrt{1!\sqrt{2!\sqrt{\dots\sqrt{n!}}}}, \quad n \geq 1.$$

Esercizio 5 Siano $z, w \in \mathbb{C}$ due numeri complessi. Calcolare il limite superiore

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |z^n - w^n|^{1/n}.$$

Cosa si riesce a dire sull'esistenza del limite?

Esercizio 6 Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale positiva e crescente. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

converge se e solo se esiste finito il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Idee: serie telescopiche, $\log(1+x) \leq x$.