Analisi Matematica 1 – Matematica

Limiti e continuità — Venerdì 20 Dicembre - Foglio 9

A. Esercizi di primo livello

Esercizio 1 Calcolare i seguenti limiti:

$$1)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\log_2(e^x + x^2)}{x + \log_2 x}; \quad 2)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 2^x + 4^x}{3^x \log(1+3^x) + (2^x+1)^2}; \quad 3)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}) + e^{-1/x}}{x^\alpha},\ \alpha > 0.$$

Si possono usare i limiti elementari (confronto fra logaritmi, potenze, esponenziali, etc.), le regole sulle operazioni coi limiti, confronti, sostituzioni, continuità delle funzioni elementari. Argomentare in modo dettagliato ogni passaggio.

Esercizio 2 Stabilire se esistono i seguenti limiti ed eventualmente calcolarli:

$$1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{(x^3 + x^2)^{3/2}}; \quad 2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x^3)} + \sqrt[3]{\sin(x^9)}}{x^3 + x^4}.$$

Esercizio 3 Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}\{-x\}$ (prodotto delle due parti frazionarie) è continua e disegnarne il grafico.

B. Esercizi di secondo livello

Esercizio 4 Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua nel punto $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ |x|^{-2\alpha} \arctan(x) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Risposta: $0 < \alpha < 1/2$.

Esercizio 5 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con la seguente proprietà. Per ogni successione limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali si ha

$$f\big(\limsup_{n\to\infty} a_n\big) = \limsup_{n\to\infty} f(a_n).$$

Provare che f è continua e monotona crescente.

C. Esercizi di terzo livello

Esercizio 6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q} & \text{se } x = \dfrac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0, \text{ coprimi.} \end{cases}$$

Calcolare l'insieme dei punti in cui f è continua (nella distanza standard).

Esercizio 7 Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

A) f è continua.

B) Il suo grafico $\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza standard del piano.