Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto Venerdì 31 Gennaio 2014

Esercizio 1 (10 punti) Sia $a_0 \in (-1, 1]$ e si consideri la successione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}, \quad n \geq 0.$$

i) Provare che $a_{2n} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che la successione $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.
ii) Studiare l'andamento della successione $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
iii) Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Suggerimento: studiare la relazione ricorsiva che lega a_{n+1} con a_{n-1}.

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che i possibili limiti (finiti) della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono da ricercarsi fra le soluzioni dell'equazione

$$x = \frac{2}{1+x} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ oppure } x = -2.$$

Iterando due volte la relazione ricorsiva si ottiene

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1} = \frac{2}{\dfrac{2}{a_{n-1}+1} + 1} = \frac{2(a_{n-1}+1)}{3 + a_{n-1}} = \varphi(a_{n-1}),$$

dove abbiamo definito la funzione

$$\varphi(x) = \frac{2(x+1)}{3+x}, \quad x \neq -3.$$

Nel seguito limiteremo lo studio di questa funzione al caso $x > -1$.
i) Studiamo la disequazione $\varphi(x) \leq 1$, limitatamente a $x > -1$ (in particolare avremo $x + 3 > 0$). Si ha

$$\frac{2(x+1)}{3+x} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 \leq 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1.$$

Siccome il valore iniziale verifica $a_0 \leq 1$, dalla disuguaglianza precedente si prova per induzione che $a_{2n} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ora vogliamo vedere se $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. A questo scopo studiamo la disequazione $\varphi(x) \geq x$ (sempre limitatamente a $x > -1$ e comunque con $x+3>0$). Si ha

$$\frac{2(x+1)}{3+x} \geq x \quad \Leftrightarrow \quad 2x+2 \geq 3x+x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+x-2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 1.$$

Siccome il valore iniziale verifica $a_0 \in (-1,1]$ e inoltre $a_{2n} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dalla disuguaglianza precedente si prova per induzione che la successione $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.

ii) Osserviamo che si ha

$$a_1 = \frac{2}{a_0+1} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < a_0 \leq 1,$$

e quindi risulta $a_1 \geq 1$. Per conti fatti al punto i), si ha $\varphi(x) \geq 1$ se e solo se $x \geq 1$. Quindi, per induzione si deduce che $a_{2n+1} \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, dal fatto che $\varphi(x) \leq x$ se e solo se $x \geq 1$ per induzione si deduce che la successione $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

iii) Per il Teorema delle successioni monotone, le due successioni $(a_{2n})_{n\in}$ e $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergono. I possibili limiti sono da ricercarsi fra le soluzioni dell'equazione $\varphi(x) = x$, ovvero

$$\frac{2(x+1)}{3+x} = x \quad \Leftrightarrow \quad 2x+2 = 3x+x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ oppure } x = -2.$$

Ora vediamo chiaramente che il valore $x=-2$ è da escludere. Quindi, entrambe le successioni degli indici pari e degli indici dispari convergono allo stesso limite 1. Questo prova che tutta la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad 1

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono sequenzialmente compatti

$$K = \big\{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leq f(x) \leq 2\big\} \quad \text{e} \quad H = \big\{x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) \leq 1/2\big\}.$$

Suggerimento: Studiare la continuità di f e i limiti a $\pm\infty$.

Soluzione. Nei punti $x \neq 0$ la funzione f è continua in quanto prodotto e composizione di funzioni continue. La funzione f è continua anche nel punto $x = 0$ in quanto

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Il limite per $x \to \infty$ si calcola facilmente con la sostituzione $y = 1/x$

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1,$$

ed analogamente

$$\lim_{x\to -\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0^-} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Rispondiamo ora alle domande. L'insieme K è chiuso in quanto $K = f^{-1}([0,2])$ con f continua e $[0,2] \subset \mathbb{R}$ chiuso. Tuttavia K non è limitato e dunque non è sequenzialmente compatto (Teorema di Heine-Borel). Per vedere che K non è limitato basta osservare che, per i limiti visti sopra, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $1/2 \leq f(x) \leq 3/2$ per ogni $x \geq M$ e dunque $[M, \infty) \subset K$.
L'insieme H è chiuso in quanto $H = f^{-1}((-\infty, 1/2])$ con f continua e $(-\infty, 1/2] \subset \mathbb{R}$ chiuso. Se proviamo che H è anche limitato seguirà che è sequenzialmente compatto (Teorema di Heine-Borel). Sempre per i limiti visti sopra, esiste $M > 0$ tale che $f(x) > 1/2$ per ogni $x \in (-\infty, -M) \cup (M, \infty)$, e quindi $H \subset [-M, M]$.

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\big(\log\log n\big)^{\sqrt{\log n}}},$$

dove $\log = \log_{\mathrm{e}}$ è il logaritmo naturale.

Soluzione. Si tratta di una serie reale a termini positivi. Inoltre, il termine generale è infinitesimo. Un'applicazione diretta del criterio della radice fallisce, in quanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\big(\log\log n\big)^{\sqrt{\log n}}} = \lim_{n\to\infty} \big(\log\log n\big)^{\sqrt{\log n}/n} = 1.$$

Siccome il termine generale è decrescente possiamo utilizzare il criterio di condensazione di Cauchy. La serie data converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\big(\log\log 2^n\big)^{\sqrt{\log 2^n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\big(\log n + \log\log 2)\big)^{\sqrt{n}\sqrt{\log 2}}}.$$

Studiamo la convergenza dell'ultima serie con il Criterio della radice. Dobbiamo calcolare il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\big(\log n + \log\log 2)\big)^{\sqrt{n}\sqrt{\log 2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\big(\log n + \log\log 2)\big)^{\sqrt{\log 2}/\sqrt{n}}}.$$

Dalla relazione

$$\big(\log n + \log\log 2)\big)^{\sqrt{\log 2}/\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{n}}\log(\log n + \log\log 2))},$$

dal limite elementare (fatto noto)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log n + \log\log 2))}{\sqrt{n}} = 0,$$

e dalla continuità della funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$ si trova

$$\lim_{n\to\infty} \big(\log n + \log\log 2)\big)^{\sqrt{\log 2}/\sqrt{n}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

In conclusione, si ha $L = 2 > 1$ e per il Criterio della radice la serie in esame diverge.

***

Alternativamente, si prova che definitivamente per $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza

$$\frac{1}{\big(\log\log n\big)^{\sqrt{\log n}}} \geq \frac{1}{n},$$

e quindi la serie data diverge per confronto con la serie divergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. La disugalianza precedente è equivalente a

$$\big(\log\log n\big)^{\sqrt{\log n}} \leq n \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\log n}\,\log\log\log n \leq \log n \quad \Leftrightarrow \quad \log\log\log n \leq \sqrt{\log n},$$

e l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\log\log x \leq \log x \leq \sqrt{x}$ per ogni x sufficientemente grande.