Esercizio Si consideri la successione

$$a_n = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n+1]{n+1} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2n]{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare i due limiti

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{1/3}} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{3/2}} = L_2$$

Soluzione. Abbiamo

$$\log a_n = \sum_{k=n}^{2n} \log \sqrt[k]{k} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\log k}{k}$$

e dunque

$$\log a_n \leq \log(2n) \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \leq \frac{\log(2n)}{n} \left(2n - (n-1)\right)$$

$$\leq \frac{n+1}{n} \log(2n)$$

e da sotto:

$$\log a_n \geq \log n \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{\log n}{2n} \left(2n - (n-1)\right)$$

$$\geq \frac{n+1}{2n} \log(n)$$

Da cui le stime

$$a_n \leq e^{\frac{n+1}{n} \log(2n)} = (2n)^{\frac{n+1}{n}}$$

$$a_n \geq e^{\frac{n+1}{2n} \log(n)} = n^{\frac{n+1}{2n}}$$

Per Confronto:

$$\frac{a_n}{n^{1/3}} \geq \frac{n^{\frac{n+1}{2n}}}{n^{1/3}} = n^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3}} = n^{\frac{1}{6}} \cdot n^{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

$$\frac{a_n}{n^{3/2}} \leq \frac{(2n)^{\frac{n+1}{n}}}{n^{3/2}} = 2^{\frac{n+1}{n}} \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{n^{3/2}} = 2^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Quindi: $L_1 = \infty$ ed $L_2 = 0$ per confronto.

Esercizio Al variare di $x \in [0,2\pi)$ studiare la convergenza (semplice) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \cos(nx).$$

Soluzione. Quando $x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log 2}{n} = \log 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

La serie diverge.

Consideriamo il caso $x \in (0, 2\pi)$. Usiamo il Criterio di Abel-Dirichlet. Osserviamo che

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{ikx}\right) \right| =$$

$$= \left| \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \right) \right| = \left| \mathrm{Re}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| = \frac{|1 - e^{i(n+1)x}|}{|1 - e^{ix}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} < \infty$$

indipendente da $n \in \mathbb{N}$.

La successione $a_n = \frac{\log n}{n}$ è infinitesima (fatto noto).

Provo che è anche decrescente. Considero la funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x}, \quad f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

per $x > 0$

e dunque

$$f'(x) \leq 0 \iff 1 - \log x \leq 0 \iff x \geq e$$

Dunque per $n \geq 2$ la succ. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decresce.

Per il Crit. Abel-Dirichlet la serie data converge per $0 < x < 2\pi$.

$\square$

Esercizio Sia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 - 1}{(x+1)(x+\alpha)} \quad , \quad x \geq 0 ,$$

e sia $\quad K_\alpha = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ ed } -2 < f(x) \leq 1 \}$.

Per ciascun valore di $\alpha > 0$ stabilire se K_α è: 1) aperto; 2) chiuso; 3) compatto.

Soluzione. Osserviamo che $f(0) = -1/\alpha$ e che $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \alpha$.

Inoltre:

$$f'(x) = \frac{2\alpha x (x+1)(x+\alpha) - (\alpha x^2 - 1)\overbrace{(x+\alpha+x+1)}^{(2x+\alpha+1)}}{(x+1)^2 (x+\alpha)^2}$$

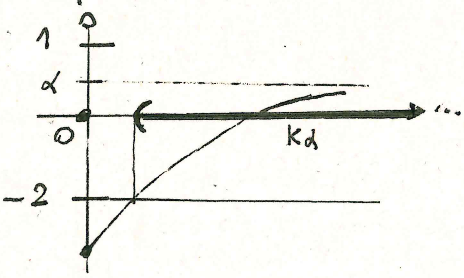
$$= \frac{2\alpha x^3 + 2\alpha^2 x^2 + 2\alpha x^2 + 2\alpha^2 x - 2\alpha x^3 - \alpha^2 x^2 - \alpha x^2 + 2x + \alpha + 1}{(x+1)^2 (x+\alpha)^2}$$

$$= \frac{\alpha^2 x^2 + \alpha x^2 + 2\alpha^2 x + 2x + \alpha + 1}{(x+1)^2 (x+\alpha)^2} > 0 \quad \text{per } x \geq 0$$

Dunque f cresce strettamente su $[0,\infty)$. f è continua.

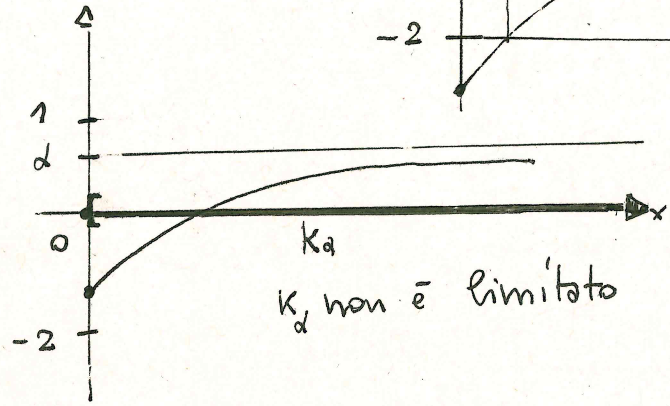
1° Caso: $-\frac{1}{\alpha} \leq -2$ ovvero $\alpha \leq \frac{1}{2}$:

K_α è aperto



2° Caso: $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$

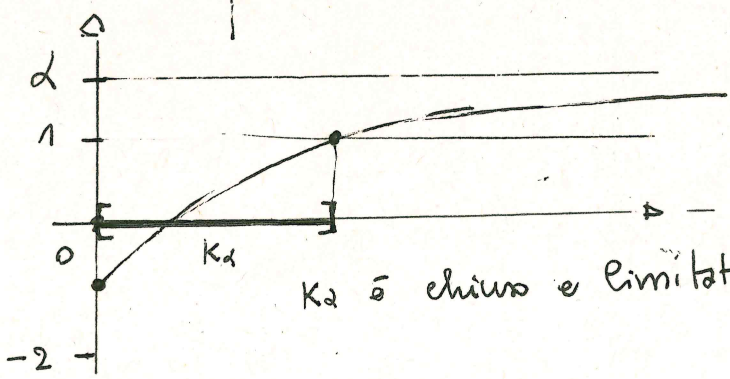
$K_\alpha = [0,\infty)$ è chiuso ma non compatto.



K_α non è limitato

3° Caso: $\alpha > 1$

$K_\alpha = [0, x_\alpha]$ è compatto (e quindi anche chiuso)



K_α è chiuso e limitato $\Leftrightarrow$ compatto.

□