Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto — Lunedì 30 Giugno 2014

Esercizio 1 (10 punti) Si consideri la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin(1/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono compatti:
1) $A = \{\varphi(x) \in \mathbb{R} : |x| \leq 27\}$;
2) $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{27} \leq \varphi(x) < 1\}$;
3) $C = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1,\ \varphi(x) = \sin^2(1/x)\}$.

Soluzione. La funzione φ è continua nei punti $x \neq 0$ in quanto composizione di funzioni continue. La funzione è continua anche nel punto $x = 0$, in quanto

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} \sin(x)\sin(1/x) = 0 = \varphi(0).$$

Il valore del limite centrale si deduce per confronto dalla stima $|\sin(x)\sin(1/x)| \leq |\sin(x)| \leq |x|$.

1) L'insieme A è l'immagine del compatto $K = [-27, 27] \subset \mathbb{R}$, $A = \varphi(K)$. Siccome l'immagine continua di compatti è compatta, l'insieme A è compatto.

2) Sappiamo che per $x \neq 0$ vale la disuguaglianza stretta $|\sin(x)| < |x|$. Dunque per $x \neq 0$ si ha

$$\varphi(x) \leq |\varphi(x)| = |\sin(x)\sin(1/x)| < |x|\frac{1}{|x|} = 1.$$

Di consegenza l'insieme B è semplicemente

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{27} \leq \varphi(x)\right\} = \varphi^{-1}([1/27, \infty)).$$

Siccome φ è continua, l'insieme B è chiuso in quanto anti-immagine del chiuso $[1/27, \infty)$. Proviamo che B è anche limitato. Dalla disuguaglianza, valida per $x \neq 0$,

$$|\varphi(x)| \leq |\sin(1/x)| \leq \frac{1}{|x|}$$

segue che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0.$$

Dunque, esiste $M > 0$ tale che $\varphi(x) < 1/27$ per ogni $|x| \geq M$ e di conseguenza l'insieme $B \subset [-M, M]$ è limitato.

Siccome i compatti di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli i chiusi e limitati, segue che B è compatto.

3) Siccome la funzione $\psi(x) = \varphi(x) - \sin^2(1/x)$ è continua per $x \neq 0$, e $C = [1, \infty) \cap \psi^{-1}(\{0\})$, l'insieme C è chiuso. Tuttavia C non è compatto in quanto non è limitato.

Quando $\sin(1/x) \neq 0$ si ha l'equivalenza

$$\varphi(x) = \sin^2(1/x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = \sin(1/x).$$

Sull'intervallo $[a_k, b_k] = [\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$, con $k \geq 1$ intero, la funzione $\vartheta(x) = \sin(x) - \sin(1/x)$ è continua e agli estremi verifica

$$\vartheta(a_k) = 1 - \sin(1/a_k) > 0, \quad \vartheta(b_k) = -1 - \sin(1/b_k) < 0.$$

Per il Teorema degli zeri esiste $c_k \in (a_k, b_k)$ tale che $\vartheta(c_k) = 0$. Dunque $c_k \in C$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Questo prova che C non è limitato.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $\alpha > 0$ un parametro e si consideri la successione

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare i limiti:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ per ogni $\alpha > 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ per $\alpha = 2$.

Soluzione. 1) Dalla identità

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^\alpha} \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^\alpha}$$

si deduce immediatamente che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha < 2, \\ 4 & \text{se } \alpha = 2, \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

2) Dal punto precedente segue che fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$4(1-\varepsilon) \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 4(1+\varepsilon).$$

Per iterazione si ottiene la maggiorazione

$$a_{n+1} \leq 4(1+\varepsilon)a_n \leq \ldots \leq [4(1+\varepsilon)]^{n-\bar{n}+1}a_{\bar{n}}, \quad n \geq \bar{n},$$

da cui si trova

$$\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq 4(1+\varepsilon)\ \sqrt[n+1]{[4(1+\varepsilon)]^{-\bar{n}}a_{\bar{n}}}.$$

In modo identico si trova la stima da sotto

$$\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \geq 4(1-\varepsilon)\ \sqrt[n+1]{[4(1-\varepsilon)]^{-\bar{n}}a_{\bar{n}}}.$$

Dai limiti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{[4(1-\varepsilon)]^{-\bar{n}}a_{\bar{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{[4(1+\varepsilon)]^{-\bar{n}}a_{\bar{n}}} = 1,$$

si deduce l'esistenza di $\widehat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \widehat{n}$ si abbia

$$\sqrt[n+1]{[4(1-\varepsilon)]^{-\bar{n}}a_{\bar{n}}} \geq 1-\varepsilon, \quad \text{e} \quad \sqrt[n+1]{[4(1+\varepsilon)]^{-\bar{n}}a_{\bar{n}}} \leq 1+\varepsilon.$$

Riassumendo, abbiamo trovato che per $n \geq \max\{\bar{n}, \widehat{n}\}$ si ha

$$4(1-\varepsilon)^2 \leq \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \leq 4(1+\varepsilon)^2,$$

e questo prova che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} = 4$.

Esercizio 3 (10 punti) Al variare di $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq -1$ studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{2x}{1+x^n}\Big)^n.$$

Soluzione. Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della radice. Dobbiamo calcolare il limite

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\Big(\frac{2x}{1+x^n}\Big)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\frac{2|x|}{|1+x^n|} = \begin{cases} 2|x| & \text{se } |x|<1, \\ 0 & \text{se } |x|>1, \\ 1 & \text{se } x=1. \end{cases}$$

In effetti, per $|x| < 1$ si ha $x^n \to 0$, mentre per $|x| > 1$ è facile controllare che $|1+x^n| \to +\infty$.
Per il Criterio della radice, quando $|x| > 1$ la serie converge assolutamente (essendo $L(x) = 0 < 1$). Per il Criterio della convergenza assoluta, in questo caso la serie converge anche semplicemente.
Nel caso $x = 1$ la serie si riduce a $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, che è divergente.
Esaminiamo il caso $|x| < 1$. In questo caso si ha $L(x) = 2|x|$. Se $L(x) < 1$ la serie converge assolutamente e semplicemente. Quando $L(x) > 1$, cioè per $1/2 < |x| < 1$, il termine generale della serie non è infinitesimo (Criterio della radice) e quindi non c'è nè convergenza semplice nè assoluta.

Rimane da esaminare il caso $|x| = 1/2$, ovvero $x = \pm\frac{1}{2}$. Con la scelta del segno $+1$, la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n}.$$

La serie è a termini positivi e possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Siccome il termine generale della serie è asintotico a $1/n$ in quanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^n = 1.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, deduciamo che per $x = 1/2$ la serie data diverge.
Con la scelta di segno -1 si trova la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)^n}.$$

Questa serie non converge assolutamente, lo si vede come sopra. Per studiare la convergenza semplice conviene introdurre la seguente funzione

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1+t)^n} - 1, \quad t > -1.$$

Chiaramente

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = \frac{d}{dt}\varphi(t)\Big|_{t=0} = -n,$$

e dunque esiste $\delta > 0$ tale che per $|t| < \delta$ si ha

$$|\varphi(t)| \le 2n|t|.$$

Usando $1/(1+t)^n = 1 + \varphi(t)$ con $t = (-1)^n/2^n$ che è definitivamente minore di δ in valore assoluto, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \varphi\Big(\frac{(-1)^n}{2^n}\Big).$$

La serie a sinistra converge semplicemente per il Criterio di Leibniz. La serie a destra converge assolutamente. Infatti usando la stima stabilita sopra si trova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \frac{(-1)^n}{n} \varphi\Big(\frac{(-1)^n}{2^n}\Big) \Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} < \infty.$$

Dunque la somma delle due serie converge semplicemente.

2.00 ore a disposizione. Giustificare ogni affermazione