Analisi Matematica 1 – Matematica

Appello scritto — Lunedì 8 Settembre 2014

Esercizio 1 (10 punti) Dato un numero reale $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo per ricorsione la successione numerica

$$a_{n+1} = \operatorname{arctg}(a_n + 1), \quad n \geq 0.$$

Dimostrare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soluzione. Se la successione converge al limite $x_0 \in \mathbb{R}$ allora deve essere

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(a_n + 1) = \operatorname{arctg}(x_0 + 1),$$

per la continuità della funzione arcotangente. Vogliamo verificare se l'equazione $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x + 1) = 0$ ha almeno una soluzione $x_0 \in \mathbb{R}$. La funzione f è continua su $\mathbb{R}$ con

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Dal Teorema degli zeri segue che l'equazione ha almeno una soluzione $x_0 \in \mathbb{R}$. La derivata di f verifica

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2}{1 + (x+1)^2} \geq 0,$$

con maggiore stretto per $x \neq -1$. Quindi f è strettamente crescente e la soluzione x_0 è pertanto unica.

Studiamo la monotonia della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La discussione precedente mostra che $f(x) \geq 0$ per $x \geq x_0$ ed $f(x) \leq 0$ per $x \leq x_0$. Si ha

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \Leftrightarrow \quad f(a_n) = a_n - \operatorname{arctg}(a_n + 1) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq x_0.$$

Dunque, a_n si mantiene crescente fintanto che $a_n \leq x_0$. Analogamente si trova che $a_{n+1} \leq a_n$ se e solo se $a_n \geq x_0$.

Si osservi ora che la funzione $\varphi(x) = \operatorname{arcrg}(x + 1)$ è strettamente crescente. Dunque:

$$a_n \leq x_0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \varphi(a_n) \leq \varphi(x_0) = x_0.$$

Queste sono le conclusioni: se $a_0 \leq x_0$ allora la successione è crescente e superiormente limitata. Se invece $a_0 \geq x_0$, la successione è decrescente ed inferiormente limitata. In entrambi i casi converge e il limite non può che essere x_0.

Esercizio 2 (10 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e si considerino i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\} \quad \text{e} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}.$$

Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

1) Se f è continua allora A è aperto.

2) Se A è aperto allora f è continua.

3) Se f è continua allora C è chiuso.

4) Se C è chiuso allora f è continua.

Soluzione. 1) Vero. La funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = f(x) - y$, è continua da $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}$ perchè f è continua. Dunque l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x) < 0\} = F^{-1}\big((-\infty, 0)\big)$$

è aperto essondo antimmagine di un intervallo aperto.

2) Falso. Infatti la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0, \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

non è continua, ma l'insieme $A = \{y > f(x)\}$ è aperto in quanto

$$A = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$$

e $A_1 = \{y > 1\}$, $A_2 = \{y > 0\}$ e $A_3 = \{x > 0\}$ sono sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^2$.

3) Vero. Infatti, con le notazioni precedenti si ha

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x) \leq 0\} = F^{-1}\big((-\infty, 0]\big)$$

a dunque C è chiuso essendo l'antimmagine del chiuso $(-\infty, 0]$ rispetto alla funzione continua F.

4) Falso. Infatti la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

non è continua, ma l'insieme $C = \{y \geq f(x)\}$ è chiuso in quanto

$$C = C_1 \cup (C_2 \cap C_3)$$

e $C_1 = \{y \geq 1\}$, $C_2 = \{y \geq 0\}$ e $C_3 = \{x \geq 0\}$ sono sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3 (10 punti) Calcolare i seguenti limiti inferiore e superiore

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{n+\frac{5}{4}} \right\} \quad \text{e} \quad L^+ = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{n+\frac{5}{4}} \right\},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Soluzione. Si ha certamente $0 \le L^- \le L^+ \le 1$. Proviamo che $L^- = 0$. Con la scelta $n = 8m^3$ ed $m \in \mathbb{N}$ si trova

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{n+\frac{5}{4}} \right\} &= \left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{8m^3+\frac{5}{4}} - m \right\} \\ &= \left\{ \frac{5/32}{\frac{1}{4}\sqrt[3]{(8m^3+\frac{5}{4})^2} + \frac{m}{2}\sqrt[3]{8m^3+\frac{5}{4}} + m^2} \right\} \\ &= \frac{5/32}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{(8m^3+\frac{5}{4})^2} + \frac{m}{2}\sqrt[3]{8m^3+\frac{5}{4}} + m^2}\end{aligned}$$

per tutti gli m sufficientemente grandi. Infatti l'argomento della parte frazionaria è definitivamente compreso in $(0,1)$ dal momento che

$$\lim_{m\to\infty} \frac{5/32}{\frac{1}{2}\sqrt[3]{(8m^3+\frac{5}{4})^2} + \frac{m}{2}\sqrt[3]{8m^3+\frac{5}{4}} + m^2} = 0.$$

Tutto questo questo prova che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \ge \bar{n}$ tale che

$$0 \le \left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{n+\frac{5}{4}} \right\} < \varepsilon.$$

Nel caso dato, questo basta per concludere che $L^- = 0$.

Vediamo se riusciamo ora a dimostrare che $L^+ = 1$. Il primo tentativo da fare è $n = 8m^3 - 1$ con $m \in \mathbb{N}$. Dopo alcuni conti ci si accorge che si ricade nella situazione del limite inferiore. Proviamo allora con $n = 8m^3 - 2$, $m \in \mathbb{N}$. Si trova

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{n+\frac{5}{4}} \right\} &= \left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{8m^3-\frac{3}{4}} - m \right\} \\ &= \left\{ \frac{-3/4}{\frac{1}{4}\sqrt[3]{(8m^3-\frac{3}{4})^2} + \frac{m}{2}\sqrt[3]{8m^3-\frac{3}{4}} + m^2} \right\}.\end{aligned}$$

Ora l'argomento della parte frazionaria è definitivamente nell'intervallo $(-1,0)$. Conviene procedere così:

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{1}{2}\sqrt[3]{n+\frac{5}{4}} \right\} &= \left\{ \frac{-3/32}{\frac{1}{4}\sqrt[3]{(8m^3-\frac{3}{4})^2} + \frac{m}{2}\sqrt[3]{8m^3-\frac{3}{4}} + m^2} + 1 \right\} \\ &= 1 - \frac{3/32}{\frac{1}{4}\sqrt[3]{(8m^3-\frac{3}{4})^2} + \frac{m}{2}\sqrt[3]{8m^3-\frac{3}{4}} + m^2},\end{aligned}$$

per tutti gli m sufficientemente grandi. Si conclude che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che

$$1 \geq \left\{ \frac{1}{2} \sqrt[3]{n + \frac{5}{4}} \right\} > 1 - \varepsilon.$$

Nel caso dato, questo basta per concludere che $L^+ = 1$.