Analisi Matematica 1 - modulo A
Appunti del Corso

Roberto Monti

Matematica – Anno Accademico 2018-19

Versione del 25 gennaio 2019

Indice

Notazioni 5

Capitolo 1. Cardinalità 7
1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale 7
2. Cardinalità 10
3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili 12
4. Numeri naturali e induzione 14

Capitolo 2. Numeri reali. Introduzione 17
1. Relazioni d'ordine 17
2. Introduzione assiomatica dei numeri reali 17
3. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$ 21
4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico 23
5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico 24

Capitolo 3. Successioni reali e complesse 27
1. Successioni numeriche 27
2. Esempi di successioni elementari 31
3. Successioni monotone 33
4. Limiti inferiore e superiore 35

Capitolo 4. Serie reali e complesse 39
1. Serie numeriche. Definizioni 39
2. Serie geometrica. Serie telescopiche 40
3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali 41
4. Criterio di condesazione di Cauchy per serie reali 43
5. Convergenza assoluta di serie reali e complesse 44
6. Criterio di Abel-Dirichlet e criterio di Leibniz 46
7. Criterio del confronto asintotico 48
8. La funzione esponenziale in campo reale e complesso 49
9. Riordinamenti di serie 55
10. Prodotto di serie reali o complesse 57
11. Criteri di convergenza di Cesàro 58

Capitolo 5. Completezza di $\mathbb{R}$ e compattezza sequenziale 61
1. Teorema di Bolzano-Weierstrass 61
2. Successioni di Cauchy. Completezza metrica di $\mathbb{R}$ 63
3. Rappresentazione dei reali in base b 64

Capitolo 6. Spazi metrici e funzioni continue 69
1. Definizioni ed esempi 69

2. Spazi metrici indotti da spazi normati 70
3. Successioni in uno spazio metrico 71
4. Limiti di funzione 72
5. Funzioni continue fra spazi metrici 78
6. Funzioni continue in $\mathbb{R}$ 79
7. Topologia di uno spazio metrico 81
8. Caratterizzazione topologica della continuità 84

Capitolo 7. Spazi metrici completi, compatti e connessi 87
1. Spazi metrici completi 87
2. Compattezza sequenziale e compattezza sono equivalenti 90
3. Continuità e compattezza 93
4. Caratterizzazione degli spazi metrici compatti 95
5. Insiemi connessi 96

Notazioni

Simboli logici

$\exists$	esiste
$\forall$	per ogni
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	se e solo se

Simboli insiemistici

$x \in A$	x appartiene all'insieme A
$x \notin A$	x non appartiene all'insieme A
$A \subset B$	A è un sottoinsieme di B
$A \cup B$	unione degli insiemi A e B
$A \cap B$	intersezione degli insiemi A e B
$A \setminus B$	insieme A meno l'insieme B
$\{x\}$	insieme costituito dal solo elemento x
$\{x \in A : P(x)\}$	insieme costituito dagli elementi $x \in A$ che verificano la proprietà $P(x)$

Insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$	insieme dei numeri interi
$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$	insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$	insieme dei numeri complessi

CAPITOLO 1

Cardinalità

1. Insiemi e funzioni. Introduzione informale

1.1. Insiemi e operazioni elementari sugli insiemi. Non diamo una definizione di "insieme". Diremo intuitivamente che un insieme è una collezione o famiglia di elementi scelti da un preassegnato "insieme ambiente", che indicheremo con X. Se un elemento x di X appartiene ad un insieme A scriveremo $x \in A$. Se x non appartiene ad A scriveremo $x \notin A$. Con $A \subset B$ si intende l'inclusione di insiemi, ovvero

$$A \subset B \quad \text{se e solo se} \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Il simbolo $\subset$ viene talvolta indicato con $\subseteq$. Se $A \subset B$ e $B \subset A$ gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi, ovvero sono uguali, $A = B$.

L'unione e l'intersezione di due insiemi A e B si definiscono, rispettivamente, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \big\{x \in X : x \in A \text{ oppure } x \in B\big\}, \\ A \cap B &= \big\{x \in X : x \in A \text{ e } x \in B\big\}. \end{aligned}$$

L'insieme che non contiene alcun elemento, l'*insieme vuoto*, si indica con $\emptyset$. Chiaramente, si ha $\emptyset \subset A$ per ogni insieme A. Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se $A \cap B = \emptyset$.

La differenza di insiemi $A \setminus B$ (leggi "A meno B") è definita nel seguente modo:

$$A \setminus B = \big\{x \in A : x \notin B\big\}.$$

Talvolta la differenza $A \setminus B$ è indicata con $A - B$.

Il complementare di un insieme A in X è l'insieme $A' = X \setminus A$. Talvolta il complementare è indicato con A^c. Con tale notazione si ha $A \setminus B = A \cap B'$. Le *formule di De Morgan* legano unione, intersezione e complementare:

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B', \\ (A \cap B)' &= A' \cup B'. \end{aligned}$$

Più in generale, sia Λ una famiglia di indici e siano A_λ insiemi indicizzati da $\lambda \in \Lambda$. Allora l'unione e intersezione della famiglia $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sono:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \big\{x \in X : \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda\big\}, \\ \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \big\{x \in X : x \in A_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in \Lambda\big\}. \end{aligned}$$

Le formule di De Morgan sono

$$\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda, \quad \Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda,$$

che forniscono anche le formule per la differenza

$$X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda,$$
$$X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X \setminus A_\lambda.$$

1.2. Funzioni fra insiemi. Una funzione $f : A \to B$ dall'insieme A all'insieme B è un'applicazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ un elemento $f(x) \in B$. L'insieme A si dice *dominio* e l'insieme B si dice *codominio* della funzione.

Il *prodotto cartesiano* di due insiemi A e B è l'insieme

$$A \times B = \big\{(x, y) : x \in A,\ y \in B\big\}.$$

Con (x, y) si indica la *coppia ordinata* formata da x e y, nell'ordine. Il *grafico* di una funzione $f : A \to B$ è il seguente sottoinsieme di $A \times B$:

$$\mathrm{gr}(f) = \big\{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\big\}.$$

Osservazione 1.1. La definizione formale di funzione è la seguente. Una *funzione da A a B* è una terna ordinata (A, B, G) dove $G \subset A\times B$ è un sottoinsieme che verifica la seguente proprietà: per ogni $x \in A$ esiste un unico $y \in B$ tale che $(x, y) \in G$. L'insieme $G = \mathrm{gr}(f)$ è il *grafico* della funzione. Noi useremo sempre la notazione $f : A \to B$ per indicare una funzione.

Definizione 1.2 (Immagine ed antimmagine). Sia $f : A \to B$ una funzione. Dato un insieme $C \subset A$, l'insieme

$$\begin{aligned} f(C) &= \big\{f(x) \in B : x \in C\big\} \\ &= \big\{y \in B : \text{esiste } x \in C \text{ tale che } f(x) = y\big\} \end{aligned}$$

si dice *immagine* di C rispetto ad f.

Dato in insieme $D \subset B$, l'insieme

$$f^{-1}(D) = \big\{x \in A : f(x) \in D\big\}$$

si dice *antimmagine* o *immagine inversa* di D ripetto ad f. Nel libro di G. De Marco, l'antimmagine viene indicata con la notazione $f^{\leftarrow}(D) = f^{-1}(D)$.

Immagine ed antimmagine commutano con unione e intersezione come descritto nella proposizione seguente.

Proposizione 1.3. Per ogni $A_\lambda \subset A$ e $B_\lambda \subset B$, con $\lambda \in \Lambda$, si ha:

$$\begin{aligned} &f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \quad f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda), \\ &f^{-1}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda), \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda). \end{aligned} \tag{1.1}$$

DIM. Proviamo l'identità in alto a sinistra:

$$\begin{aligned}
y \in f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ ed esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ ed esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } \lambda \in \Lambda \text{ tale che } y \in f(A_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).
\end{aligned}$$

Nell'equivalenza centrale abbiamo usato il fatto che $\exists x \exists \lambda \cdots \Leftrightarrow \exists \lambda \exists x \cdots$.

Proviamo l'identità in basso a destra:

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } f(x) \in B_\lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in f^{-1}(B_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda).
\end{aligned}$$

Proviamo l'inclusione in alto a destra:

$$\begin{aligned}
y \in f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{esiste } x \text{ tale che per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } x \in A_\lambda \text{ e } f(x) = y \\
&\Rightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ esiste } x \in A_\lambda \text{ tale che } f(x) = y \\
&\Leftrightarrow \quad \text{per ogni } \lambda \in \Lambda \text{ si ha } y \in f(A_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda).
\end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 1.4. Nell'ultimo argomento della dimostrazione precedente si hanno tutte equivalenze tranne l'implicazione centrale, che è del tipo

$$\exists x \forall \lambda \;:\; A(x,\lambda) \text{ è vera } \;\Rightarrow\; \forall \lambda \exists x \;:\; A(x,\lambda) \text{ è vera},$$

dove $A(x,\lambda)$ è un'affermazione che riguarda x e λ. Tale implicazione non può essere invertita. Infatti, nell'antecendente c'è una x che rende vera l'affermazione per ogni λ. Nella conseguente, invece, per ogni λ c'è una x (che quindi dipende da λ) che rende vera l'affermazione.

ESEMPIO 1.5. Sia $A = \{0, 1\}$ un insieme formato da due elementi e sia $B = \{0\}$. L'unica funzione $f : A \to B$ è $f(0) = f(1) = 0$. Detti $A_0 = \{0\}$ e $A_1 = \{1\}$, si ha $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ e quindi $f(A_0 \cap A_1) = \emptyset$, mentre $f(A_0) \cap f(A_1) = \{0\} \neq \emptyset$.

DEFINIZIONE 1.6. Una funzione $f : A \to B$ si dice:

i) *iniettiva* (1-1) se $f(x) = f(y)$ implica $x = y$ (equivalentemente se $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$);
ii) *suriettiva* (su) se per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;

iii) *biiettiva* o *corrispondenza biunivoca* (1-1 e su) se è iniettiva e suriettiva.

Talvolta useremo la seguente notazione:

$$\begin{array}{ll} f : A \xrightarrow{1-1} B & \text{funzione iniettiva,} \\ f : A \xrightarrow{\text{su}} B & \text{funzione suriettiva,} \\ f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B & \text{funzione iniettiva e suriettiva.} \end{array}$$

Definizione 1.7 (Funzione inversa e composta). Se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva, allora $f : A \to f(A)$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la *funzione inversa* $f^{-1} : f(A) \to A$ ponendo

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{se e solo se} \quad f(x) = y.$$

Siano $f : A \to B$ e $g : C \to D$ due funzioni tali che $f(A) \subset C$. Allora è ben definita la *funzione composta* $g \circ f : A \to D$

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Chiaramente, se $f : A \xrightarrow[\text{su}]{1-1} B$ allora si ha:

$$\begin{array}{ll} f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A & \text{funzione identità su } A, \\ f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B & \text{funzione identità su } B. \end{array}$$

Definizione 1.8. Sia $f : A \to B$ una funzione. Una funzione $g : B \to A$ si dice *inversa sinistra* di f se $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Una funzione $h : B \to A$ si dice *inversa destra* di f se $f \circ h = \mathrm{Id}_B$.

Osservazione 1.9. Se $f : A \to B$ è suriettiva, allora per ogni $y \in B$ la "fibra" $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ è non vuota. Con l'Assioma della Scelta, per ogni $y \in B$ si può selezionare un elemento $x \in f^{-1}(\{y\})$ e definire una funzione $h : B \to A$ ponendo $h(y) = x$. Dunque, si ha $f \circ h(y) = f(h(y)) = y$ per ogni $y \in B$. La funzione h è un'inversa destra di f.

2. Cardinalità

Definiremo la cardinalità di un insieme in modo relativo, dichiarando cosa significa che un insieme ha cardinalità minore della o uguale alla cardinalità di un secondo insieme.

Definizione 1.10. Siano A e B insiemi. Diremo che:

i) $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$;
ii) $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : A \to B$;
iii) $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$ se $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$ ma non esiste alcuna funzione suriettiva $f : A \to B$.

Se $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ diremo che gli insiemi A e B sono *equipotenti.* Due insiemi hanno sempre cardinalità confrontabile.

Teorema 1.11 (Tricotomia dei cardinali). Vale sempre una delle seguenti tre possibilità: $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$, oppure $\mathrm{Card}(B) < \mathrm{Card}(A)$.

La dimostrazione di questo teorema richiede l'Assioma della Scelta ed è omessa. Proveremo invece che l'affermazione $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B)$ equivale all'esistenza di una funzione iniettiva $f : A \to B$ e di una funzione iniettiva $g : B \to A$.

L'*insieme potenza* di un insieme A è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di A:

$$\mathcal{P}(A) = \big\{E : E \subset A\big\}.$$

Nella Teoria degli insiemi, l'esistenza di tale insieme viene garantita con un apposito assioma. L'insieme $\mathcal{P}(A)$ contiene sempre l'elemento $\emptyset$.

Teorema 1.12 (Cantor-Schröder-Bernstein). Siano A e B due insiemi, e siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ due funzioni iniettive. Allora esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$.

Dim. Premettiamo un argomento preparatorio. Consideriamo una funzione $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ che preserva le inclusioni:

$$E \subset F \quad \Rightarrow \quad T(E) \subset T(F). \tag{1.2}$$

Affermiamo che esiste $F \in \mathcal{P}(A)$ tale che $F = T(F)$ (punto fisso).

Si consideri la famiglia di insiemi $\mathcal{A} = \big\{E \in \mathcal{P}(A) : E \subset T(E)\big\}$. È certamente $\mathcal{A} \neq \emptyset$ in quanto $\emptyset \in \mathcal{A}$. Formiamo l'insieme unione

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E.$$

Verifichiamo che $T(F) = F$. Infatti, usando le proprietà (1.1) e (1.2) si trova

$$F = \bigcup_{E \in \mathcal{A}} E \subset \bigcup_{E \in \mathcal{A}} T(E) = T\Big(\bigcup_{E \in \mathcal{A}} E\Big) = T(F).$$

D'altra parte, applicando T all'inclusione $F \subset T(F)$ si ottiene $T(F) \subset T(T(F))$ e quindi $T(F) \in \mathcal{A}$, da cui segue l'inclusione opposta $T(F) \subset F$. La conclusione è che $T(F) = F$.

Veniamo alla dimostrazione del teorema. Sia $T : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ la funzione

$$T(E) = A \setminus g(B \setminus f(E)).$$

Con una verifica elementare si controlla che T preserva le inclusioni:

$$\begin{aligned} E \subset F \quad &\Rightarrow \quad f(E) \subset f(F) \\ &\Rightarrow \quad B \setminus f(F) \subset B \setminus f(E) \\ &\Rightarrow \quad g(B \setminus f(F)) \subset g(B \setminus f(E)) \\ &\Rightarrow \quad A \setminus g(B \setminus f(E)) \subset A \setminus g(B \setminus f(F)). \end{aligned}$$

Dunque, per le considerazioni precedenti esiste un punto fisso $A_1 \in \mathcal{P}(A)$ di T ovvero un insieme tale che $T(A_1) = A_1$. Definiamo i seguenti ulteriori insiemi

$$A_2 = A \setminus A_1, \quad B_1 = f(A_1), \quad B_2 = B \setminus B_1.$$

Abbiamo chiaramente $A = A_1 \cup A_2$ e $B = B_1 \cup B_2$ con unioni disgiunte. La funzione $f : A_1 \to B_1$ è iniettiva e suriettiva. Controlliamo che $g(B_2) = A_2$. Infatti, si ha

$$A_1 = T(A_1) = A \setminus g(B \setminus f(A_1)) = A \setminus g(B_2) \quad \Rightarrow \quad A_2 = g(B_2).$$

Dunque, $g : B_2 \to A_2$ è iniettiva e suriettiva. Si può allora definire la funzione iniettiva e suriettiva $h : A \to B$ nel seguente modo:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A_1 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_2. \end{cases}$$

□

Proposizione 1.13. Per ogni insieme A risulta $\mathrm{Card}(A) < \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$.

Dim. Certamente $\mathrm{Card}(A) \le \mathrm{Card}(\mathcal{P}(A))$ in quanto la funzione $f : A \to \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$ è iniettiva. Supponiamo per assurdo che esista una funzione suriettiva $f : A \to \mathcal{P}(A)$. La dimostrazione si basa sul "paradosso di Russell". Si consideri l'insieme

$$A_0 = \{x \in A : x \notin f(x)\}.$$

Poichè f è suriettiva, esiste $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = A_0$. Ci sono due casi:
Caso 1: $x_0 \in A_0$. Allora: $x_0 \notin f(x_0) = A_0$, assurdo.
Caso 2: $x_0 \notin A_0$. Allora: $x_0 \in f(x_0) = A_0$, assurdo.

□

3. Insiemi finiti, infiniti e numerabili

I numeri naturali sono l'insieme

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Scegliamo la convenzione di far partire i numeri naturali da 0. Scriveremo $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge 1$ per escludere lo 0.

1. Insieme finito. Un insieme A si dice *finito* se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed una funzione $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ iniettiva e suriettiva. Diremo in questo caso che $\mathrm{Card}(A) = n$. Se A non è finito, diremo che A è infinito (contiene infiniti elementi) e scriveremo $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Infine, per l'insieme vuoto la convenzione naturale è $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$.

Proposizione 1.14. Se A è un insieme finito ed $f : A \to A$ è una funzione, sono equivalenti le seguenti affermazioni:
1) f è iniettiva;
2) f è suriettiva;
3) f è biiettiva.

La prova di questa affermazione è lasciata come esercizio e si può fare per induzione sulla cardinalità di A.

Esempio 1.15. L'insieme dei numeri pari $2\mathbb{N} = \{0, 2, \ldots, 2n, \ldots\}$ è infinito ed è equipotente con $\mathbb{N}$. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ è iniettiva e suriettiva. In particolare, un insieme può essere equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. Questa osservazione è di Galileo.

L'osservazione di Galileo suggerisce la seguente definizione equivalente di insieme infinito.

Definizione 1.16 (Dedekind). Un insieme è infinito se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

2. Insieme numerabile. Un insieme A si dice *numerabile* se esiste una funzione iniettiva e suriettiva $f : \mathbb{N} \to A$. Diremo in questo caso che:

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0 \quad \text{(Alef zero)}.$$

Il cardinale $\aleph_0$ è il più piccolo cardinale infinito. Infatti, se A è un insieme infinito allora esiste una funzione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$. La costruzione di f è induttiva:

i) Si definisce $f(0) \in A$ a piacere;

ii) Definiti $f(0), \dots, f(n) \in A$ distinti, si osserva che l'insieme $A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$ non è vuoto, altrimenti A sarebbe finito. Quindi si può scegliere un elemento $f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$. Ne risulta una funzione $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva.

Gli elementi di un insieme numerabile A possono essere *enumerati*, ovvero scritti come successione di elementi indicizzati da $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \{a_0, a_1, \dots a_n, \dots\}.$$

3. $\mathbb{Z}$ è numerabile. L'insieme $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dei numeri interi è numerabile. Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ così definita

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ è un numero pari,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è un numero dispari} \end{cases}$$

è iniettiva e suriettiva.

4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Proviamo che il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile, ovvero che

$$\mathrm{Card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathrm{Card}(\mathbb{N}).$$

Infatti, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n) = (n, 1)$ è iniettiva. D'altra parte, la funzione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n, m) = 2^n 3^m$ è pure iniettiva, per la rappresentazione unica degli interi in fattori primi. Dunque, per il Teorema 1.12 esiste una funzione iniettiva e suriettiva $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Esercizio 1.17. Controllare che la funzione $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita

$$h(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1, \quad m, n, \in \mathbb{N},$$

è una biiezione.

5. $A \times A$ è numerabile se A è numerabile. Se A è numerabile, anche il prodotto cartesiano $A \times A$ è numerabile. Sia $f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva e suriettiva. Allora $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times A$, $F(n, m) = (f(n), f(m))$ è iniettiva e suriettiva. La composizione $G = F \circ h^{-1} : \mathbb{N} \to A \times A$ è allora iniettiva e suriettiva. Qui h è la funzione definita sopra.

6. $\mathbb{Q}$ è numerabile. L'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \Big\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ relativamente primi con } q > 0 \Big\}$$

è numerabile. Infatti $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ e quindi l'inclusione è iniettiva da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$. Si consideri la funzione $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$g(x) = (p, q) \quad \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ rel. primi e } q > 0.$$

La funzione g è iniettiva. Siccome $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ è numerabile, esiste $h:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva. Dunque $h\circ g:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ è iniettiva.

7. Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile.

Proposizione 1.18. Siano A_n, $n\in\mathbb{N}$ con $n\geq 1$, insiemi finiti o numerabili. Allora l'unione $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ è al più numerabile.

Dim. Senza perdere di generalità possiamo supporre che gli insiemi A_n siano a coppie disgiunti, ovvero $A_n\cap A_m=\emptyset$ se $n\neq m$, e che $A_n\neq\emptyset$. Vogliamo provare che A è numerabile.

Enumeriamo gli elementi di A_n in questo modo:

$$A_n=\{a_{n,1},a_{n,2},\dots,a_{n,j},\dots\},$$

dove l'enumerazione è eventualmente finita. La funzione $f:\mathbb{N}\to A$, $f(n)=a_{n,1}$ è iniettiva. Costruiamo una funzione $g:A\to\mathbb{N}$ iniettiva. L'insieme $P\subset\mathbb{N}$ dei numeri primi (maggiori di 1) è infinito (e numerabile). Enumeriamo P:

$$P=\{p_1=2,p_2=3,\dots\}.$$

Definiamo la funzione $g:A\to\mathbb{N}$ nel seguente modo:

$$g(a_{n,j})=p_n^j,\quad n,j\in\mathbb{N},n,j\geq 1.$$

La funzione g è iniettiva in quanto

$$g(a_{n,j})=g(a_{m,k})\quad\Leftrightarrow\quad p_n^j=p_m^k\quad\Leftrightarrow\quad n=m,\ j=k\quad\Leftrightarrow\quad a_{n,j}=a_{m,k}.$$

$\square$

8. $\mathbb{R}$ non è numerabile. Vedremo nel Teorema 5.12 che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è numerabile. È più che numerabile.

9. Se A è infinito allora $\mathrm{Card}(A\times A)=\mathrm{Card}(A)$. Vedremo la dimostrazione di questo fatto nel caso particolare $A=\mathbb{R}$, Teorema 5.13.

4. Numeri naturali e induzione

Dal modo stesso in cui i numeri naturali vengono costruiti o definiti, discende la validità del *Principio d'induzione.*

Principio d'induzione. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il numero naturale $n\in\mathbb{N}$. Supponiamo che:

i) $A(0)$ (oppure $A(1)$ se $\mathbb{N}$ inizia da 1) è vera (*base induttiva*);
ii) $A(n)\Rightarrow A(n+1)$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ (*passo induttivo*).

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n\in\mathbb{N}$.

4.1. Formula per la somma geometrica. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{1.3}$$

La formula vale anche se $x \in \mathbb{C}$ è un numero complesso $x \neq 1$. La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{1 - x} = 1 + x.$$

Supponiamo vera la formula (1.3) per $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n+1} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

4.2. Disuguaglianza di Bernoulli. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $x > -1$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.4}$$

La prova è per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$ si ha un'identità. Supponiamo vera le (1.4) per un certo $n \in \mathbb{N}$ e proviamola per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

4.3. Formula del Binomio di Newton. Il *fattoriale* $n!$ si definisce per induzione nel seguente modo:

i) $0! = 1$ e $1! = 1$;
ii) $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$.

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$, si definiscono i *coefficienti binomiali*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Il coefficiente binomiale ha il seguente significato combinatorico: dati n elementi, ne scegliamo k in modo non ordinato. Ci sono $\binom{n}{k}$ modi distinti per farlo.

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo per induzione la formula per il Binomio di Newton:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Quando $n = 1$ la verifica è elementare:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y.$$

Supponiamo vera la formula per n e proviamola per $n+1$:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k+1}y^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^k \\ &= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]x^{n+1-k}y^k + \binom{n}{n}y^{n+1}.\end{aligned}$$

Ora utilizziamo la formula di Stiefel, la cui verifica è un facile esercizio. Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ vale l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k.\end{aligned}$$

CAPITOLO 2

Numeri reali. Introduzione

1. Relazioni d'ordine

Una *relazione* su un insieme X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$. Dati due elementi $x, y \in X$, diciamo che x è nella relazione R con y se la coppia ordinata verifica $(x, y) \in R$. Scriveremo in questo caso xRy.

DEFINIZIONE 2.1 (Ordine parziale e totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine parziale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

Se in aggiunta si verifica

iv) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità),

allora la relazione si dice di *ordine totale*.

Ad esempio, l'insieme $X = \mathcal{P}(A)$ con la relazione di inclusione insiemistica $\subset$ è parzialmente ordinato, ma non totalmente ordinato. I numeri reali con l'usuale relazione d'ordine sono totalmente ordinati.

2. Introduzione assiomatica dei numeri reali

In questa sezione introduciamo in modo assiomatico i numeri reali come *campo ordinato completo*. Discuteremo in seguito la costruzione effettiva dei numeri reali.

DEFINIZIONE 2.2. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni, l'addizione $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e la moltiplicazione $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi dell'addizione:

(A1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
(A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
(A3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro);
(A4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi della moltiplicazione:

(M1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
(M2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);
(M3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro della moltiplicazione);
(M4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \le y$ allora $x + z \le y + z$;

(O2) se $x \le y$ e $z \ge 0$, allora $x \cdot z \le y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve.

Definizione 2.3 (Campo, campo ordinato, campo ordinato completo).

i) Un insieme X munito di due operazioni $+$ e $\cdot$ che verificano gli assiomi (o proprietà) (A1)-(D) si dice *campo*.

ii) Se, in aggiunta ad i), è data su X una relazione di ordine totale $\le$ che verifica gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*.

iii) Se, infine, $(X, +, \cdot, \le)$ verifica anche l'assioma di completezza, si ottiene un *campo ordinato completo*.

Ad esempio, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono campi; $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ sono campi ordinati; $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo.

Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sono in modo naturale sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Esempio 2.4. A titolo di esempio, facciamo alcuni calcoli basandoci solo sugli assiomi di campo.

1) Verifichiamo che $x \cdot 0 = 0$ per ogni $x \in X$. Si ha

$$x \cdot 0 \overset{A3}{=} x \cdot (0 + 0) \overset{D}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0,$$

e dagli assiomi A4 ed A3 si deduce che $x \cdot 0 = 0$.

2) Si ha $(-1) \cdot (-1) = 1$. Infatti:

$$0 \overset{A3}{=} 0 \cdot (-1) \overset{A4}{=} (1 + (-1)) \cdot (-1) \overset{D}{=} 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \overset{M3}{=} -1 + (-1) \cdot (-1)$$

e la tesi segue sommando a destra e sinistra 1 ed usando A3 e A4.

3) Si ha $-x = (-1) \cdot x$. Infatti:

$$0 \overset{A3}{=} 0 \cdot x \overset{A4}{=} (1 + (-1)) \cdot x \overset{D}{=} 1 \cdot x + (-1) \cdot x \overset{M3}{=} x + (-1) \cdot x,$$

e aggiungendo a destra e sinistra $-x$ si trova la tesi.

Esercizio 2.5. Sia $(X, +, \cdot, \le)$ un campo ordinato. Usando ad ogni passo gli assiomi e i punti 2), 3) precedenti, verificare che $x^2 \ge 0$ per ogni $x \in X$.

Proposizione 2.6. I numeri complessi $\mathbb{C}$ sono un campo sul quale non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale.

Dim. Che $\mathbb{C}$ sia un campo è noto dal corso di Geometria. Supponiamo per assurdo che ci sia su $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine totale $\ge$. L'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ dovrebbe allora verificare $-1 = i^2 \ge 0$ e quindi si avrebbe $1 \le 0$. D'altra parte si ha anche $1 = 1^2 \ge 0$. Si deduce che $1 = 0$ e questo non è possibile. $\square$

Definizione 2.7 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \leq z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A poniamo

$$\sup A = x.$$

iv) Se A non è superioremente limitato poniamo

$$\sup A = \infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici.

Osservazione 2.8 (Caratterizzazione dell'estremo superiore). Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:
i) $y \leq x$ per ogni $y \in A$ (x è un maggiorante);
ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x-\varepsilon$ (x è il minimo dei maggioranti).

Definizione 2.9 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \leq x$ per ogni $x \in A$.
ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \leq x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A poniamo

$$\inf A = x.$$

iv) Se A non è inferiormente limitato poniamo

$$\inf A = -\infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.
v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\min A = x.$$

Osservazione 2.10 (Formulazioni equivalenti dell'assioma di completezza). Rienunciamo l'Assioma di completezza dei numeri reali:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Tale assioma puè essere riformulato in diversi modi fra loro equivalenti:
1) Ogni sottoinsieme non vuoto e inferioremente limitato di $\mathbb{R}$ ha estremo inferiore.
2) Ogni sezione di $\mathbb{R}$ ha un unico elemento separatore.
3) Ogni successione monotona e limitata in $\mathbb{R}$ è convergente.

4) Ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ha una sottosuccessione convergente (proprietà di Bolzano-Weierstrass).
5) Ogni successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente (ovvero, $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo).
6) Ogni successione di intervalli chiusi non vuoti $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, tale che $I_{k+1} \subset I_k$ verifica

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset.$$

Ritorneremo su questi concetti durante il corso.

2.1. Conseguenze della completezza.

Proposizione 2.11 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

Dim. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme

$$A = \big\{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$

è superioremente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A;
2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corripondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:

$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$

che è una contraddizione. □

Definizione 2.12 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme

$$A_x = \big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\}.$$

Per la proprietà di Archimede, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque massimo. Definiamo la *parte intera di x*

$$[x] = \max\big\{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\big\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x. La *parte frazionaria di x* è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

Proposizione 2.13 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

DIM. Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$, ovvero $nx < ny - 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny \quad \Rightarrow \quad x < \frac{[ny]}{n} \leq y.$$

Cerchiamo ora $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$x < \frac{[ny]}{n} - \frac{1}{m} < y.$$

La disuguaglianza a sinistra è equivalente a

$$m\Big(\frac{[ny]}{n} - x\Big) > 1,$$

ed un tale $m \in \mathbb{N}$ esiste per la proprietà di Archimede. □

3. Costruzione di $\mathbb{R}$ con le sezioni di $\mathbb{Q}$

La definizione assiomatica dei numeri reali lascia aperte due questioni: 1) l'esistenza di almeno un campo ordinato completo; 2) l'unicità di un campo ordinato completo.

È possibile dimostrare (ma noi non lo faremo) che due campi ordinati completi sono fra loro *isomorfi*, ovvero sono in corrispondenza biunivoca tramite una biiezione che preserva le operazioni e l'ordine. In questo senso esiste un unico campo ordinato completo, i numeri reali $\mathbb{R}$.

In questa sezione illustriamo brevemente, senza dimostrazioni dettagliate, la costruzione dei numeri reali tramite le sezioni di numeri razionali. Con questa costruzione l'Assioma di Completezza diventa un teorema.

DEFINIZIONE 2.14. Un insieme $A \subset \mathbb{Q}$ è una sezione (di Dedekind) se:
(i) $A, A' \neq \emptyset$, dove A' è il complementare di A in $\mathbb{Q}$;
(ii) se $a \in A$ allora $b \in A$ per ogni numero razionale $b \leq a$;
(iii) se $a \in A$ esiste $b \in A$ con $a < b$.

OSSERVAZIONE 2.15. La proprietà (iii) precisa che vogliamo considerare solo sezioni aperte di $\mathbb{Q}$. In questo modo, ad ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ corrisponde l'unica sezione

$$A_q = \big\{a \in \mathbb{Q} : a < q\big\}.$$

Esistono sezioni che non corrispondono a numeri razionali. Questo è il caso della sezione

$$A = \big\{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0 \text{ oppure } a^2 < 2\big\}.$$

Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le sezioni. Indichiamo con $0 = \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\}$ la sezione nulla e con $I = \{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$ la sezione unitaria.

1. Relazione d'ordine. Se A e B sono sezioni, diciamo che $A \leq B$ se $A \subset B$. L'insieme $\mathcal{A}$ è totalmente ordinato dalla relazione $\leq$.

2. Addizione. Se A e B sono sezioni, definiamo la sezione somma

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B\}.$$

La sezione opposta si può definire in questo modo:

$$-A = \{b \in \mathbb{Q} : \text{ esiste } x \in A' \text{ tale che } b < -x\}.$$

3. Moltiplicazione. La sezione prodotto si definisce per casi. Se $A, B \geq 0$ definiamo

$$A \cdot B = \{a \cdot b \in \mathbb{Q} : a \in A,\, b \in B, \text{ tali che } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}.$$

Se $A, B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = (-A) \cdot (-B)$, se $A \geq 0$ e $B \leq 0$ si definisce $A \cdot B = -(A \cdot (-B))$, e se $A \leq 0$ e $B \geq 0$ si definisce $A \cdot B = -((-A) \cdot B)$. Infine, per ogni sezione $A > 0$ si definisce la sezione reciproca

$$A^{-1} = \{b \in \mathbb{Q} : b > 0 \text{ e } b^{-1} \in A\} \cup \{b \in \mathbb{Q} : b \leq 0\}.$$

Se invece $A < 0$ si definisce $A^{-1} = -(-A)^{-1}$.

Con pazienti verifiche si controlla che $\mathcal{A}$ è un campo ordinato rispetto alle operazioni e alla relazione d'ordine introdotte.

4. Assioma di completezza. Proviamo la proprietà di completezza.

TEOREMA 2.16. L'insieme $\mathcal{A}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ e con la relazione d'ordine $\leq$ è un campo ordinato *completo*.

DIM. Ci interessa verificare la completezza. Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ un insieme superioremente limitato e non vuoto. Questo significa che esiste una sezione $A \in \mathcal{A}$ tale che $B \subset A$ per ogni sezione $B \in \mathcal{B}$. Vogliamo provare che $\mathcal{B}$ ha estremo superiore. Definiamo l'insieme unione

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \mathbb{Q}.$$

Controlliamo che C è una sezione di $\mathbb{Q}$:

i) $C \neq \emptyset$ in quanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Inoltre, $C \subset A$ implica $A' \subset C'$ e poichè per ipotesi $A' \neq \emptyset$, segue che $C' \neq \emptyset$.
ii) Siano $x, y \in \mathbb{Q}$ tali che $x \in C$ e $y \leq x$. Allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$, e siccome B è una sezione segue che $y \in B$. Dunque si ha anche $y \in C$.
iii) Se $x \in C$ allora esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B$. Siccome B è una sezione, esiste $y \in B$ tale che $x < y$. Ma allora sia ha anche $y \in C$.

Verifichiamo infine che $C = \sup \mathcal{B}$.

i) Sicuramente $B \subset C$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, ovvero C è un maggiorante di $\mathcal{B}$.
ii) Proviamo che C è il minimo dei maggioranti. Sia $D \in \mathcal{A}$ un maggiorante di $\mathcal{B}$. Dalle inclusioni $B \subset D$ per ogni $B \in \mathcal{B}$, segue che

$$C = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset D.$$

□

Nell'Esempio 7.5 daremo una costruzione puramente metrica di $\mathbb{R}$ che prescinde dalla relazione d'ordine. $\mathbb{R}$ può essere costruito come il completamento metrico di $\mathbb{Q}$. Il completamento metrico è unico a meno di isometrie.

4. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, ed inoltre:

i) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
ii) $|x| = |-x|$;
iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subadittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ che riordinata fornisce $|x| - |y| \leq |x - y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ è allora uno *spazio metrico.* La funzione $d(x, y) = |x - y|$ si dice distanza standard o Euclidea su $\mathbb{R}$.

Possiamo anticipare la definizione generale di spazio metrico.

Definizione 2.17 (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Dato uno spazio metrico (X, d), fissato un punto $x_0 \in X$ ed un raggio $r > 0$, l'insieme

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = B_X(x_0, r) = \big\{x \in X : d(x, x_0) < r\big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x_0 e raggio r. Nel seguito, useremo le palle per definire una *topologia* su uno spazio metrico.

Nello spazio metrico $\mathbb{R}$ con la distanza standard, le palle sono intervalli aperti che si indicano anche con la seguente notazione:

$$I_r(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\big\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

4.1. Intervalli. Gli intevalli di $\mathbb{R}$ possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Ecco l'elenco. Siano $-\infty < a < b < \infty$. Si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$
\begin{aligned}
(a, b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
[a, b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\big\} && \text{intervallo aperto a destra,}\\
(a, b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\big\} && \text{intervallo aperto a sinistra,}\\
[a, b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\big\} && \text{intervallo chiuso.}
\end{aligned}
$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$
\begin{aligned}
(-\infty, b) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x < b\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
(-\infty, b] &= \big\{x \in \mathbb{R} : x \le b\big\} && \text{intervallo chiuso,}\\
(a, \infty) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x > a\big\} && \text{intervallo aperto,}\\
[a, \infty) &= \big\{x \in \mathbb{R} : x \ge a\big\} && \text{intervallo chiuso,}
\end{aligned}
$$

cui si aggiunge l'intervallo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

La famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi convessi di $\mathbb{R}$. Inoltre, la famiglia degli intervalli di $\mathbb{R}$ coincide con la famiglia degli insiemi connessi di $\mathbb{R}$.

5. $\mathbb{R}^n$ come spazio metrico

Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ lo spazio Euclideo n-dimensionale, $n \in \mathbb{N}$ con $n \ge 1$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}.$$

Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ ha n coordinate reali $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di somma vettoriale

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Questa operazione è associativa e commutativa. Su $\mathbb{R}^n$ è definita un'operazione di *prodotto per uno scalare*. Dati $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

In questo modo $\mathbb{R}^n$ ha una struttura di *spazio vettoriale*, come si vedrà nel corso di geometria.

Definizione 2.18 (Prodotto scalare). Definiamo l'operazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

Tale operazione si dice *prodotto scalare (standard)* di $\mathbb{R}^n$.

Il prodotto scalare è bilineare (ovvero lineare in entrambe le componenti), simmetrico e non degenere. Precisamente, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti proprietà:

1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
3) $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

Talvolta, il prodotto scalare si indica anche con il simbolo (x, y) oppure con il simbolo $x \cdot y$.

Definizione 2.19 (Norma Euclidea). La norma Euclidea su $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ così definita

$$|x| = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2 \Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente, $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

La norma Euclidea verifica le proprietà di una norma. Precisamente, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si verifica:

1) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (omogeneità);
3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (subadittività).

La verifica delle proprietà 1) e 2) è elementare. Per verificare la subadittività occorre la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Proposizione 2.20 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|.$$

Dim. Il polinomio reale della variabile $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = |x + ty|^2 = |x|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2|y|^2$$

non è mai negativo, $P(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e dunque il suo discriminante verifica $\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4|x|^2|y|^2 \leq 0$. La tesi segue estraendo le radici. Non abbiamo usato la forma specifica del prodotto scalare Euclideo ma solo le proprietà 1)-2)-3). □

Verifichiamo la subadittività della norma Euclidea. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

ed estraendo le radici si ottiene la proprietà 3).

La norma Euclidea induce su $\mathbb{R}^n$ la funzione distanza $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ si dice spazio metrico Euclideo. Le proprietà 1), 2), e 3) si verificano in modo elementare. In particolare, si ha:

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

L'insieme

$$B_r(x) = \big\{ y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r \big\}$$

è la palla Euclidea di raggio $r > 0$ centrata in $x \in \mathbb{R}^n$.

CAPITOLO 3

Successioni reali e complesse

1. Successioni numeriche

Una *successione reale (risp. complessa)* è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ($a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). Indicheremo con $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ ($a_n \in \mathbb{C}$) l'*elemento n-esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots .$$

Definizione 3.1 (Successioni convergenti). Diciamo che una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ (risp. $L \in \mathbb{C}$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L.$$

Il numero L si dice *limite della successione.*

Esempio 3.2. Verifichiamo ad esempio che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Quindi è sufficiente scegliere un numero naturale $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Un tale numero esiste per la Proprietà di Archimede dei numeri reali.

Proposizione 3.3 (Unicità del limite). Se una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ o $L \in \mathbb{C}$ allora questo limite è unico.

Dim. Siano L ed M entrambi limiti della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|a_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che $|L - M| = 0$ e quindi $L = M$. $\square$

Osservazione 3.4. Una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può scomporre nella sua parte reale e immaginaria:

$$a_n = \operatorname{Re} a_n + i \operatorname{Im} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Una successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se convergono le successioni reali $(\operatorname{Re} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\operatorname{Im} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Inoltre, in questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n + i \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n.$$

Queste affermazioni seguono dalle disuguaglianze

$$\max\{|\operatorname{Re}(a_n - L)|, |\operatorname{Im}(a_n - L)|\} \leq |a_n - L| \leq |\operatorname{Re}(a_n - L)| + |\operatorname{Im}(a_n - L)|.$$

Definizione 3.5. Diremo che una successione *reale* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ ("più infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Analogamente, diremo che una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ ("meno infinito") se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leq -M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Esercizio 3.6. Verificare usando la definizione che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} = \infty.$$

Fissato $M > 0$ arbitrariamente grande, dobbiamo trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}. \tag{3.1}$$

Usiamo il *metodo delle maggiorazioni* e riduciamo la disuguaglianza data ad una disuguaglianza elementare. Come primo passo stimiamo il logaritmo con la disuguaglianza fondamentale

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } x > -1.$$

In effetti, ci basta la disuguaglianza $\log(1+n) \leq n$ per $n \in \mathbb{N}$, che può essere verificata per induzione. Usando questa informazione, si ottiene

$$\frac{n^3 - n\log(1+n)}{n^2+1} \geq \frac{n^2(n-1)}{n^2+1} \geq \frac{n-1}{2},$$

per $n \geq 1$. Dunque ci siamo ridotti alla disuguaglianza elementare

$$\frac{n-1}{2} \geq M \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2M + 1.$$

Con una scelta di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \geq 2M + 1$, la (3.1) è verificata.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 3.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 3.5 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè $\pm\infty$.

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *limitata* se l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$. Equivalentemente, la successione è limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Proposizione 3.7. Se una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

Dim. Sia L il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora $|a_n| \le C$ per ogni $n = 1, \dots, \bar{n}$, elementarmente. Inoltre, per $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \le |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \le C.$$

□

Teorema 3.8 (Operazioni coi limiti). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni convergenti. Allora:

1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3) Se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e il limite di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è 0, allora la successione quoziente $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Dim. Indichiamo con $L, M \in \mathbb{R}$ ($L, M \in \mathbb{C}$) i limiti delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \ge \bar{n}$.

1) Allora si ha per ogni $n \ge \bar{n}$:

$$|a_n + b_n - (L + M)| \le |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

2) Per la Proposizione 3.7, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \le C$ e $|b_n| \le C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha per ogni $n \ge \bar{n}$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - LM| &= |a_n b_n - L b_n + L b_n - LM| \\ &\le |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M| \le C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon. \end{aligned}$$

3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $M \neq 0$ per ipotesi, esiste $\widehat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \ge \widehat{n}$ si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \ge |M| - |b_n - M| \ge \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per $n \ge \max\{\bar{n}, \widehat{n}\}$ si ha

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\Big| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \le \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

TEOREMA 3.9 (Teorema del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti $L, M \in \mathbb{R}$ delle successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rispettivamente. Se $L = M$, allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$.

DIM. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|c_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha anche

$$\begin{aligned} b_n - L \leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon, \\ L - b_n \leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

e quindi $|b_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$. □

DEFINIZIONE 3.10. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$ diremo che l'affermazione $A(n)$ è vera *definitivamente*.

Il teorema sulle operazioni coi limiti e il teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

PROPOSIZIONE 3.11. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima (ovvero $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora la successione prodotto $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima.

DIM. Sia $C > 0$ una costante tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. □

ESERCIZIO 3.12. Provare le seguenti affermazioni.

1) Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$
2) Siano $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty.$$
3) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata. Provare che la successione somma $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.
4) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞, e sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale, positiva, staccata da 0 ovvero: esiste $\delta > 0$ tale che $b_n \geq \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞.

2. Esempi di successioni elementari

ESEMPIO 3.13 (Quoziente di polinomi). Siano P e Q polinomi a coefficienti reali (o complessi) nella variabile $x \in \mathbb{R}$ di grado p e q, rispettivamente, con $p, q \in \mathbb{N}$. Precisamente, supponiamo di avere

$$\begin{aligned} P(x) &= a_p x^p + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R} \\ Q(x) &= b_q x^q + \ldots + b_1 x + b_0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Avremo $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$ e senza perdere di generalità supponiamo che $a_p > 0$ e $b_q > 0$. Allora si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q, \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } q > p. \end{cases}$$

La verifica è elementare e utilizza il teorema sulle operazioni con i limiti partendo dalla seguente identità:

$$\frac{a_p n^p + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \ldots + b_1 n + b_0} = n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} \ldots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \ldots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}.$$

ESEMPIO 3.14 (Successione geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Studiamo la convergenza delle successione geometrica $a_n = q^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Verificheremo le seguenti affermazioni:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

L'ultima affermazione significa che il limite non esiste nè in $\mathbb{R}$ nè $\pm\infty$. Talvolta il numero q si dice *ragione* della progressione geometrica.

Esaminiamo il caso $-1 < q < 1$. È sufficiente considerare il caso $0 < q < 1$. Allora si ha $q = 1 - x$ con $x \in (0, 1)$. Per tali x valgono le disuguaglianze

$$0 \leq (1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La disuguaglianza a destra può essere verificata per induzione (esercizio). Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0,$$

dal teorema del confronto segue che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (1-x)^n = 0.$$

Nel caso $q > 1$ si può scrivere $q = 1 + x$ con $x > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli si ottiene

$$q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx,$$

e per confronto si trova $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Sia ora $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Dall'identità $|z^n| = |z|^n$ si deduce che per $|z| < 1$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

Se invece $|z| \geq 1$ e $z \neq 1$ il limite non esiste.

Esempio 3.15 (Radice n-esima). Per ogni numero reale $p > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

È sufficiente considerare il caso $p > 1$. Il caso $0 < p < 1$ si riduce a questo passando ai reciproci. Se $p > 1$ si ha $\sqrt[n]{p} = 1 + a_n$ con $a_n > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

si ottiene

$$0 < a_n \leq \frac{p-1}{n},$$

e quindi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Esempio 3.16 (Radice n-esima di una potenza di n). Per ogni numero reale $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Proviamo l'effermazione nel caso $\beta = 1$. Si ha certamente $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Usando nuovamente la disuguaglianza di Bernoulli si trova

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

e quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}.$$

Dal teorema del confronto segue che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. In conclusione, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^2 = 1.$$

Esempio 3.17 (Confronto fra potenze ed esponenziali). Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a > 1$ e $\beta > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\beta a^n}{a^{n+1} n^\beta} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\beta = \frac{1}{a} < 1,$$

fissato $\frac{1}{a} < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Iterando tale disuguaglianza si ottiene

$$0 \leq b_n \leq qb_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n-\bar{n}} b_{\bar{n}} = q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}}.$$

Per confronto con la successione geometrica si deduce che $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Esempio 3.18 (Confronto fra esponenziale e fattoriale). Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $a > 0$. Si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

fissato $0 < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Come sopra, si conclude che $b_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio 3.19 (Confronto fra potenze e logaritmi). Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0.$$

Con la sostituzione $x_n = \log n$, ovvero $n = \mathrm{e}^{x_n}$, si ottiene per $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{\mathrm{e}^{x_n\alpha}} \leq \frac{([x_n] + 1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}}.$$

Siccome $\mathrm{e} > 1$ e $\alpha > 0$, la base dell'esponenziale verifica $\mathrm{e}^\alpha > 1$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\frac{([x_n] + 1)^\beta}{(\mathrm{e}^\alpha)^{[x_n]}} < \varepsilon$$

non appena $[x_n] > M$. Ma siccome

$$\lim_{n\to\infty} [x_n] = \lim_{n\to\infty} [\log n] = \infty,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $[x_n] > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

3. Successioni monotone

Le successioni reali *monotone* sono interessanti perchè hanno sempre limite, finito o infinito.

Definizione 3.20 (Successioni monotone). Una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice:

i) *crescente* se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) *strettamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) *decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iv) *strettamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione crescente o decrescente si dice *monotona*.

Proposizione 3.21. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente e (superiormente) limitata. Allora la successione è convergente e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\big\{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n.$$

DIM. L'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato e quindi esiste finito

$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Siccome L è un maggiorante di A si ha $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome L è il minimo dei maggioranti di A, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$. Dal fatto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, si deduce che per $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$a_n \geq a_{\bar{n}} > L - \varepsilon.$$

Abbiamo dunque provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Questa è la tesi della proposizione. □

Se una successione crescente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è superiormente limitata, allora un argomento analogo al precedente prova che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Per le successioni decrescenti valgono affermazioni analoghe. Ad esempio, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e inferiormente limitata, allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 3.21 abbiamo usato l'Assioma di completezza dei numeri reali per assicurarci dell'esistenza del numero $L \in \mathbb{R}$. La Proposizione 3.21 implica a sua volta l'Assioma di completezza. La dimostrazione di questo fatto è lasciata come esercizio.

ESERCIZIO 3.22 (Successioni ricorsive). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la seguente successione definita in modo ricorsivo:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 0.$$

Provare che la successione converge a calcolarne il limite.

Mostriamo che la successione è crescente e superiormente limitata. Sia $f(x) = \sqrt{2 + x}$ la funzione, definita per $x \geq -2$, che interviene nella definizione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$. Studiamo la disuguaglianza

$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2.$$

Dunque, fintantochè $0 \leq a_n < 2$ risulta $a_{n+1} > a_n$. Proviamo per induzione che $0 \leq a_n < 2$. Per $n = 0$ questo è chiaro. Inoltre, si ha

$$a_{n+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 2.$$

Questo prova che la successione è crescente (strettamente) e superiormente limitata. Dunque esiste finito

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Passando al limite nella relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ ed usando la continuità di f si trova

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(L).$$

Le soluzioni dell'equazione $L = f(L)$ sono $L = -1$ che è da scartare ed $L = 2$. Dunque, il limite è $L = 2$.

4. Limiti inferiore e superiore

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definiscano:

$$b_n = \inf\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \inf_{m\geq n} a_m,$$
$$c_n = \sup\{a_m \in \mathbb{R} : m \geq n\} = \sup_{m\geq n} a_m.$$

Può essere $b_n = -\infty$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. In tal caso si ha $b_n = -\infty$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$. Può essere $c_n = \infty$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. In tal caso si ha $c_n = \infty$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.

La successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente:

$$b_{n+1} = \inf_{m\geq n+1} a_m \geq \inf_{m\geq n} a_m = b_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Infatti, al crescere di n l'insieme di cui si calcola l'estremo inferiore si restringe. Analogamente, la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente:

$$c_{n+1} = \sup_{m\geq n+1} a_m \leq \sup_{m\geq n} a_m = c_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dunque, le successioni $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno limite (finito o infinito).

Definizione 3.23 (Limiti inferiore e superiore). Si definiscono i limiti inferiore e superiore di una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rispettivamente come:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

La comodità dei limiti inferiore e superiore è che sono sempre definiti.

Esempio 3.24. Ad esempio si ha:

$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} = -1, \qquad \limsup_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} = 1.$$

Proposizione 3.25. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $L \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A) $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n > L - \varepsilon$;

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n < L + \varepsilon$.

Dim. Sia $L = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m$, ovvero L è il massimo dei minoranti dell'insieme $A = \{c_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, con $c_n = \sup_{m\geq n} a_m$.

Affermiamo che L è un minorante di A se e solo se vale i). Infatti, L è un minorante di A se e solo se:

$$\forall \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ si ha } \sup_{m\geq \bar{n}} a_m \geq L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \forall \bar{n} \in \mathbb{N}\, \exists n \geq \bar{n} \text{ tale che } a_n > L - \varepsilon.$$

Affermiamo che L è il massimo dei minoranti di A se e solo se vale l'affermazione ii). Infatti, L è il massimo dei minoranti di A se e solo se $L+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ non è un minorante di A, ovvero se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \sup_{m \geq \bar{n}} a_m < L+\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\, \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } a_n < L+\varepsilon.$$

□

Per il limite inferiore si ha un'analoga caratterizzazione che riportiamo senza prova.

PROPOSIZIONE 3.26. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e sia $L \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni (A) e (B):

(A) $L = \liminf_{n\to\infty} a_n$;

(B) Valgono le affermazioni i) e ii):

i) Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n < L + \varepsilon$;

ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $a_n > L - \varepsilon$.

La prova è omessa.

Chiaramente, vale la disuguaglianza

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Se si ha un'uguaglianza allora esiste il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

COROLLARIO 3.27. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Allora il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

esiste (finito o infinito) se e solo se

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L.$$

DIM. Quando L è finito, la dimostrazione segue dall'affermazione ii) della Proposizione 3.25 insieme all'affermazione ii) della Proposizione 3.26. Quando $L = \infty$ oppure $L = -\infty$ la dimostrazione è lasciata al lettore.

□

PROPOSIZIONE 3.28. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali. Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Le disuguaglianze possono essere strette. Se una delle due successioni ha limite, allora le disuguaglianze precedenti sono uguaglianze.

DIM. La prova segue passando al limite per $n \to \infty$ nelle disuguaglianze

$$\inf_{m\geq n}(a_m + b_m) \geq \inf_{m\geq n} a_m + \inf_{m\geq n} b_m,$$
$$\sup_{m\geq n}(a_m + b_m) \leq \sup_{m\geq n} a_m + \sup_{m\geq n} b_m.$$

Lasciamo al lettore la prova delle ultime affermazioni della proposizione. □

Esempio 3.29. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$a_n = \frac{n^2\cos(n\pi)}{n^2+1}.$$

Proviamo che

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Partiamo dal limite superiore. Chiaramente, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n \leq 1 < 1 + \varepsilon.$$

D'altra parte, per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ è possibile trovare $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n > 1 - \varepsilon$, in quanto

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{4n^2+1} = 1.$$

Per il limite inferiore si argomenta in modo analogo. Da un lato si ha $a_n \geq -1 > -1-\varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq \bar{n}$ tale che $a_n < -1 + \varepsilon$ in quanto

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(2n+1)^2}{(2n+1)^2+1} = -1.$$

CAPITOLO 4

Serie reali e complesse

1. Serie numeriche. Definizioni

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succesione reale o complessa. Vogliamo definire, quando possibile, la somma di tutti gli a_n al variare di $n \in \mathbb{N}$. Tale somma di infiniti termini si indica con il seguente simbolo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{4.1}$$

Con tale notazione si vuole indicare un numero reale o complesso. Chiameremo un'espressione come in (4.1) una serie reale (risp. complessa).

Formiamo la *successione delle somme parziali*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può convergere in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, oppure può non convergere. Nel caso reale la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può divergere a ∞ o $-\infty$.

Definizione 4.1. i) Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $s \in \mathbb{R}$ oppure $s \in \mathbb{C}$, poniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,$$

e diremo che la serie *converge* ed ha come *somma* s.

ii) Nel caso reale, se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a ∞ o $-\infty$, diremo che la serie *diverge* a ∞ o $-\infty$ e scriveremo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

iii) Se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, e nel caso reale non diverge nè a ∞ nè a $-\infty$, diremo che la serie *non è definita*.

iv) Il generico addendo a_n, $n \in \mathbb{N}$, che appare nella serie (4.1) si dice *termine generale* della serie, ed $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione dei termini generali.

Teorema 4.2 (Condizione necessaria di convergenza). Se una serie reale o complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge allora la successione dei termini generali è infinitesima, ovvero
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dim. Per ipotesi esiste $s \in \mathbb{R}$ oppure $s \in \mathbb{C}$ tale che
$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$
Dunque, per il teorema sulla differenza dei limiti si ha
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$
□

2. Serie geometrica. Serie telescopiche

2.1. Serie geometrica. Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso tale che $z \neq 1$. Ricordiamo la formula per le somme geometriche parziali
$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Se $|z| < 1$, allora $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$. Se invece $|z| \geq 1$ il limite non esiste (o non esiste finito). Dunque, si ottiene la formula per la serie geometrica
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{C}, \ |z| < 1.$$

Ad esempio, con $z = 1/2$ si trova la somma della serie geometrica reale di ragione $1/2$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 1.$$

2.2. Serie telescopiche. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa e formiamo la successione delle differenze $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha
$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1} - a_0.$$
Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un limite L, allora la serie con termine generale b_n converge e inoltre
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = L - a_0.$$
Ad esempio, si trova
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1.\end{aligned}$$
Ovviamente, non tutte le successioni b_n si possono esprimere nella forma $b_n = a_{n+1} - a_n$.

2.3. Somma di tutti gli $1/n^2$. Vogliamo provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

converge. È noto che la sua somma è $\pi^2/6$, ma non lo proveremo. Dalle disuguaglianze

$$n^2 \geq n(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

si ottiene

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$$

e per confronto la serie in esame converge.

2.4. Somma di tutti gli $1/n$. Vogliamo provare che la seguente serie (detta armonica) diverge a ∞:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

In effetti, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) + \ldots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) + \ldots \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty,
\end{aligned}$$

e dunque per confronto la serie diverge a ∞. Trasformeremo questa idea in un criterio generale (Criterio di condensazione di Cauchy, Teorema 4.6).

3. Criterio della radice e del rapporto per serie reali

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione reale non negativa, allora la successione delle somme parziali

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è monotona crescente e quindi il limite di $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esiste sempre, finito oppure ∞.

Teorema 4.3 (Criterio del confronto). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente (ovvero per ogni $n \geq \bar{n}$ per qualche $\bar{n} \in \mathbb{N}$). Allora:

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty;$

ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$

Dim. Senza perdere di generalità supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Le somme parziali

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n \\ \sigma_n &= b_0 + b_1 + \ldots + b_n \end{aligned}$$

verificano $s_n \leq \sigma_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed inoltre convergono perchè sono monotone crescenti. Dunque si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} \sigma_n,$$

da cui si ottengono le conclusioni i) e ii).

$\square$

Teorema 4.4 (Criterio della radice). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale reale non negativa, $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale non è infinitesimo.

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

Dim. i) Sia $\varepsilon > 0$ tale che $q = L + \varepsilon < 1$. Per la caratterizzazione del limite superiore, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque $a_n \leq q^n$ per ogni $n \geq \bar{n}$, e quindi

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Per confronto, questo prova la convergenza della serie data.

ii) Sia $\varepsilon > 0$ tale che $q = L - \varepsilon > 1$. Per la caratterizzazione del limite superiore, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un indice $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $k_n \geq n$ e $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} > q$. Inoltre, è possibile scegliere la successione $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo tale che $k_n < k_{n+1}$. La (sotto)successione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \infty.$$

Quindi la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è infinitesima, e per la condizione necessaria di convergenza la serie non converge, e dunque diverge (essendo a termini non negativi).

$\square$

Teorema 4.5 (Criterio del rapporto). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e sia $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Allora si hanno i seguenti due casi:

i) Se $L < 1$ allora la serie converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

ii) Se $L > 1$ allora la serie diverge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$. Di più, il termine generale verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

Dim. i) Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $q = L + \varepsilon < 1$. Dalla definizione di limite segue che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n/a_{n-1} \leq q$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dunque si ha

$$a_n \leq q a_{n-1} \leq \ldots \leq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}$$

per ogni $n \geq \bar{n}$, e pertanto

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \leq a_{\bar{n}} q^{-\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty.$$

Per confronto, questo prova la convergenza della serie.

ii) Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $q = L - \varepsilon > 1$, ed esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$a_n \geq q a_{n-1} \geq \ldots \geq q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}.$$

Questo prova che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ e dunque non è verificata la condizione necessaria di convergenza e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. □

4. Criterio di condesazione di Cauchy per serie reali

Per alcune serie reali, sia il Criterio della radice che il Criterio del rapporto cadono nel caso $L = 1$ e non forniscono informazioni. In questi casi può essere utile il seguente strumento.

Teorema 4.6 (Criterio di Cauchy). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione non negativa, monotona decrescente. Allora si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Dim. Per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia $i \in \mathbb{N}$ un indice tale che $2^{n-1} \leq i \leq 2^n - 1$. Siccome la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente, per tali i si ha $a_i \leq a_{2^{n-1}}$, e sommando si ottiene

$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \leq a_{2^{n-1}}(2^n - 2^{n-1}) = 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Sommando ora su n si trova

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^{n-1}}.$$

Se converge la serie a destra, allora per confronto converge anche la serie a sinistra.

Proviamo l'implicazione opposta. Se l'indice $i \in \mathbb{N}$ verifica $2^{n-1}+1 \le i \le 2^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, allora $a_i \ge a_{2^n}$. Sommando su tali i e poi su $n \in \mathbb{N}$, si trova

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i \ge \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}.$$

Per confronto, se converge la serie a sinistra, converge anche la serie a destra. □

Esempio 4.7 (Serie armonica generalizzata). Sia $\alpha > 0$ un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Abbiamo già discusso il caso $\alpha = 1, 2$. La successione $a_n = 1/n^\alpha$, $n \ge 1$, è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\Big)^n.$$

Se $\alpha > 1$ si ha una serie geometrica convergente. Se $0 < \alpha \le 1$ la serie diverge. Dunque, la serie in esame converge se e solo se $\alpha > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Esempio 4.8 (Serie logaritmiche). Sia $\alpha > 0$ un parametro reale fissato, e studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n}.$$

La successione $a_n = 1/(n \log^\alpha n)$, $n \ge 2$, è monotona decrescente. Esaminiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log^\alpha 2}.$$

Per quanto visto sulla serie armonica generalizzata, la serie in esame converge se e solo se $\alpha > 1$.

5. Convergenza assoluta di serie reali e complesse

In questa sezione illustriamo il Criterio della convergenza assoluta, che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza di serie complesse e di serie reali non necessariamente positive.

Definizione 4.9. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa. Diciamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge *assolutamente* se converge la serie reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

TEOREMA 4.10. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale o complessa. Se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge anche semplicemente ed inoltre

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{4.2}$$

DIM. Iniziamo a considerare il caso in cui $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione reale e definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ la parte positiva e la parte negativa della successione nel seguente modo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \min\{a_n, 0\}.$$

Le successioni $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ verificano le seguenti proprietà: i) $a_n^+ \ge 0$ e $a_n^- \le 0$; ii) $a_n = a_n^+ + a_n^-$; iii) $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$; iv) $a_n^+, -a_n^- \le |a_n|$. Dal teorema del confronto abbiamo

$$0 \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty, \quad 0 \le -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Dalle identità

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ + a_k^-) = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n} a_k^-$$

segue allora anche l'esistenza finita del limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-.$$

Infine, passando al limite nella disuguaglianza

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

segue la tesi (4.2). Questo termina la prova nel caso reale.

Sia ora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa e definiamo $\alpha_n = \mathrm{Re}(a_n)$ e $\beta_n = \mathrm{Im}(a_n)$. Dalle disuguaglianze $|\alpha_n| \le |a_n|$ e $|\beta_n| \le |a_n|$ deduciamo che le serie reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

convergono assolutamente e quindi semplicemente. Converge allora anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n.$$

La prova di (4.2) è identica al caso reale. □

6. Criterio di Abel-Dirichlet e criterio di Leibniz

In questa sezione vogliamo studiare la convergenza di serie reali oscillanti della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, \quad a_n \geq 0,$$

e di serie complesse della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{in\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi).$$

Partiamo dalla seguente formula di somma per parti.

Lemma 4.11. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse. Allora per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n(a_{n+1} - a_n), \tag{4.3}$$

dove abbiamo posto $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ per $n \geq 1$ e convenuto che $B_0 = 0$.

Dim. La verifica è elementare e parte dall'identità $b_n = B_n - B_{n-1}$. Si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{N} a_n(B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=1}^{N} a_n B_{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n B_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} B_n \\
&= a_N B_N - \sum_{n=1}^{N-1} B_n(a_{n+1} - a_n).
\end{aligned}$$

□

Per analogia con gli integrali potremmo chiamare la successione delle somme parziali $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ la *primitiva* della successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 4.12 (Criterio di Abel–Dirichlet). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale decrescente e infinitesima. Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione (reale o) complessa con primitiva B_n limitata (esiste $C > 0$ tale che $|B_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Allora la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Dim. Usando la formula di somma per parti (4.3) si trova

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} B_k(a_{k+1} - a_k).$$

Dalla disuguaglianza $|a_n B_n| \leq C|a_n|$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} a_n B_n = 0.$$

Se proviamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k(a_{k+1} - a_k).$$

converge assolutamente, allora converge anche semplicemente per il teorema sulla convergenza assoluta. La tesi segue.

Riducendosi ad una serie telescopica, troviamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k(a_{k+1} - a_k)| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| = C \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = C a_1 < \infty.$$

Per togliere il valore assoluto abbiamo usato il fatto che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

□

Da un esame della dimostrazione precendente è chiaro che il Teorema 4.12 ha la seguente variante.

Teorema 4.13. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione complessa infinitesima tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Sia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione con le stesse proprietà del Teorema 4.12. Allora la seguente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Un caso speciale del Teorema 4.12 è il Criterio di Leibniz.

Teorema 4.14 (Criterio di Leibniz). Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale decrescente e infinitesima. Allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

converge.

Dim. La tesi segue dal Teorema 4.12, infatti la successione $b_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, ha primitiva limitata:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k\Big| \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Esempio 4.15. Per ogni numero reale $0 < \alpha \leq 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

è convergente per il Criterio di Leibniz, in quanto la successione $a_n = 1/n^\alpha$ è decrescente ed infinitesima. La serie, tuttavia non è assolutamente convergente, come si deduce dal Criterio di condensazione di Cauchy.

Esempio 4.16. Per $0 < \alpha \le 1$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$, studiamo la convergenza della serie complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\vartheta}}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\vartheta)}{n^\alpha} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\vartheta)}{n^\alpha}.$$

Per $\vartheta = 0$ la serie diverge. Studiamo il caso $0 < \vartheta < 2\pi$. Posto $b_n = \mathrm{e}^{in\vartheta}$, la successione delle somme parziali è

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\vartheta} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{i\vartheta}\right)^k = \frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1 - \mathrm{e}^{i\vartheta}} - 1 = \frac{\mathrm{e}^{i\vartheta} - \mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1 - \mathrm{e}^{i\vartheta}},$$

con formula ben definita per $\mathrm{e}^{i\vartheta} \neq 1$. Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|B_n| = \left| \frac{\mathrm{e}^{i\vartheta} - \mathrm{e}^{i(n+1)\vartheta}}{1 - \mathrm{e}^{i\vartheta}} \right| \le \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{i\vartheta}|} < \infty.$$

Per il Criterio di Abel-Dirichlet, la serie in esame converge per $\vartheta \in (0, 2\pi)$.

7. Criterio del confronto asintotico

Teorema 4.17. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse tali che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che esista finito e non zero il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se e solo se converge assolutamente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dim. Dalla disuguaglianza $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$ per numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{|a_n|} = |L| \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dunque, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \ge \bar{n}$

$$\frac{|L|}{2}|a_n| \le |b_n| \le 2|L||a_n|.$$

Per il teorema del confronto, la tesi segue allora dalle disuguaglianze

$$\frac{|L|}{2} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |b_n| \le 2|L| \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |a_n|.$$

□

Osservazione 4.18. Il teorema precedente non vale se alle parole "convergenza assoluta" si sostituiscono le parole "convergenza semplice". Si considerino, infatti, le successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chiaramente si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \neq 0.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge semplicemente, per il Criterio di Leibniz. Tuttavia la serie con termine generale a_n non converge semplicemente, infatti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty.$$

Esempio 4.19. Al variare di $\alpha > 0$ studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\sin(1/n^\alpha)}{n+1}.$$

Si tratta di una serie a termini positivi. Usando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

si deduce che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}\sin(1/n^\alpha)}{n+1}}{\dfrac{1}{n^{\alpha+1/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\,\frac{\sin(1/n^\alpha)}{1/n^\alpha} = 1 \neq 0.$$

Quindi, la serie data converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}},$$

ovvero se e solo se $\alpha > 1/2$.

8. La funzione esponenziale in campo reale e complesso

In questa sezione definiamo la funzione esponenziale prima in campo reale e poi in campo complesso e contestualmente studiamo alcuni limiti notevoli.

Definiamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per il Criterio del Rapporto la serie converge (assolutamente) per ogni $x \in \mathbb{R}$. Useremo anche la notazione $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ per indicare la *funzione esponenziale*.

TEOREMA 4.20. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito e precisamente:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}. \tag{4.4}$$

Inoltre, per $x > 0$ la convergenza è monotona crescente.

DIM. Ci limiteremo al caso $x > 0$. Proviamo che la successione

$$a_n = \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è crescente e superiormente limitata. Dalla Proposizione 3.21 segue l'esistenza finita del limite in (4.4).

Dalla formula del binomio di Newton si ottiene

$$a_n = \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{x^k}{k!}, \tag{4.5}$$

e in modo analogo

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big)\frac{x^k}{k!}.$$

Dalle disuguaglianze

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big) < \Big(1-\frac{1}{n+1}\Big),\dots,\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) < \Big(1-\frac{k-1}{n+1}\Big),$$

valide per $k = 0, 1, \dots, n$, e dal fatto che $x^k > 0$ segue che $a_n < a_{n+1}$. Siccome

$$\Big(1-\frac{1}{n}\Big) < 1,\dots,\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big) < 1,$$

dall'identità (4.5) si trova anche la maggiorazione

$$\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} < \infty. \tag{4.6}$$

Questo prova l'esistenza finita del limite. Inoltre, per $n \to \infty$ si ottiene la disuguaglianza

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Proviamo la disuguaglianza opposta. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri tali che $n \ge m$. Allora si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{x^k}{k!} \\ &\ge \sum_{k=0}^{m}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}$$

e facendo ora il limite per $m \to \infty$ si trova

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Questo termina la dimostrazione del teorema nel caso $x > 0$. $\square$

Osservazione 4.21 (Stima del resto). Siano $x \in \mathbb{R}$ ed $m, n \in \mathbb{N}$ numeri tali che $0 < x < m \leq n$. Spezziamo la somma parziale della serie esponenziale nel seguente modo:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n}\frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{n}\frac{x^k}{m^{k-m}m!}.$$

Abbiamo usato la disuguaglianza $k! = k(k-1)\cdot \ldots \cdot (m+1)m! > m^{k-m}m!$. D'altra parte, dalla formula per la somma geometrica parziale, si ottiene

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{x^k}{m^{k-m}m!} = \frac{x^m}{m!}\sum_{h=0}^{n-m}\left(\frac{x}{m}\right)^h = \frac{x^m}{m!}\frac{1-(x/m)^{n-m+1}}{1-x/m} < \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}.$$

Abbiamo usato il fatto che $m > x > 0$. In conclusione, troviamo la maggiorazione per il resto:

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{x^k}{k!} < \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}, \quad 0 < x < m \leq n.$$

Questa disuguaglianza non dipende da n, nel membro di destra, e quindi si trova la stima per il resto della serie esponenziale

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^m}{m!}\frac{m}{m-x}, \quad 0 < x < m. \tag{4.7}$$

Applichiamo questa formula per una stima del numero di Nepero che, per definizione, è il numero

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha $\mathrm{e} > \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} 1/k!$, e con la scelta $m = 4$ si ottiene la stima dal basso

$$\mathrm{e} > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2 + \frac{2}{3}.$$

Per ottenere una stima dall'alto si può usare la (4.7) con $x = 1$:

$$\mathrm{e} \leq \sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^k}{k!} + \frac{m}{m!(m-1)},$$

che con $m = 4$ fornisce

$$\mathrm{e} \leq 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} < 3.$$

Osservazione 4.22. Presentiamo una seconda dimostrazione del Teorema 4.20. Vogliamo provare che per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e proviamo che è possibile scegliere $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia:

$$\Big|\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Big| < \varepsilon$$

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ da discutere tali che $m \leq n$. Dalla formula per il Binomio di Newton si trova, come in (4.5) nella dimostrazione del Teorema 4.20,

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{m-1}\Big[\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big]\frac{z^k}{k!}\\ &\quad+\sum_{k=m}^{n}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=m}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.\end{aligned}$$

Prendendo i moduli ed usando la subadittività si ottiene

$$\begin{aligned}\Big|\Big(1+\frac{z}{n}\Big)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Big| &\leq \sum_{k=0}^{m-1}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!}\\ &\quad+\sum_{k=m}^{n}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\Big|\frac{|z|^k}{k!}+\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}\\ &\leq \sum_{k=0}^{m-1}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!}+2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}.\end{aligned}$$

Possiamo scegliere $m \in \mathbb{N}$ con $m > |z|$ e indipendentemente da n tale che – usiamo la stima del resto, ma se ne potrebbe fare a meno –

$$2\sum_{k=m}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} \leq \frac{2|z|^m}{m!}\frac{m}{m-|z|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

A questo punto, possiamo scegliere $\bar{n}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\Big|\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)-1\Big|\frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Questo conclude la dimostrazione.

Teorema 4.23. La funzione esponenziale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$, verifica le seguenti proprietà:

1) $\mathrm{e}^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
2) $\mathrm{e}^{-x} = 1/\mathrm{e}^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3) $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y$ se $x < y$.
4) $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
5) Per ogni $y > 0$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{e}^x = y$.

DIM. Diamo solo dei cenni sulle dimostrazioni. 1) Quando $x \geq 0$, la positività deriva dalla definizione

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1 > 0.$$

Quando $x < 0$, la positività deriva dal punto 2) che ora verifichiamo.

2) Osserviamo preliminarmente che

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)^n = 1.$$

Questo segue dal Teorema del confronto a partire dalle seguenti disuguaglianze (usiamo la disuguaglianza di Bernoulli)

$$1 > \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}.$$

Dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$ si trova

$$1 = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big)^n = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n = e^x \cdot e^{-x}.$$

Ovvero, $e^{-x} = (e^x)^{-1}$.

3) Che per $x \geq 0$ la funzione esponenziale sia strettamente crescente deriva dalla definizione. Per $x < 0$ la monotonia deriva dal punto 2).

4) Una prova di tale identità si può ottenere mostrando che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Big(1 + \dfrac{x+y}{n}\Big)^n}{\Big(1 + \dfrac{x}{n}\Big)^n \Big(1 + \dfrac{y}{n}\Big)^n} = 1.$$

La verifica di questo fatto è lasciata come esercizio al lettore.

5) La verifica della suriettività richiede il Teorema dei valori intermedi per le funzioni continue ed è omessa.

□

OSSERVAZIONE 4.24. 1) La proprietà 4) si può esprimere anche in questo modo: la funzione esponenziale $\varphi(x) = e^x$ è un omomorfismo dal gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ al gruppo moltiplicativo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, dove $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

2) La funzione esponenziale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = e^x$, è iniettiva e suriettiva. Dunque, è definita la sua funzione inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, che è la funzione logaritmo $\varphi^{-1} = \log$.

3) Il numero e non è razionale, $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La prova di questo fatto è lasciata come esercizio al lettore.

Passiamo ora allo definizione della funzione esponenziale in campo complesso. Definiamo le tre funzioni $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tramite le seguenti serie di potenze complesse:

$$\begin{aligned}
\exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\
\cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\
\sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Scriveremo anche $\exp(z) = \mathrm{e}^z$. È facile verificare queste serie convergono assolutamente in ogni punto $z \in \mathbb{C}$. Proviamo ad esempio che la prima serie converge assolutamente con il criterio del rapporto. È sufficiente considerare il caso $z \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1,$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Quando $z = x \in \mathbb{R}$ la definizione di $\exp(x)$ data in precedenza.

Teorema 4.25. La funzione $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verifica le seguenti proprietà:
1) $\exp(z+\zeta) = \exp(z)\exp(\zeta)$ per ogni $z, \zeta \in \mathbb{C}$;
2) $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$ per ogni $z \in \mathbb{C}$;
3) $|\exp(ix)| = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
4) $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (formule di Eulero).

Dim. 1) Dati $z, \bar{\zeta} \in \mathbb{C}$, per il Teorema 4.30 sul prodotto di serie si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^\zeta &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{\zeta^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k \zeta^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+\zeta)^n}{n!} = \mathrm{e}^{z+\zeta}.
\end{aligned}$$

Abbiamo usato la formula per il binomio di Newton.

2) Questa affermazione segue direttamente dalla definizione:

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z}).$$

3) Sia ora $x \in \mathbb{R}$. Usando le proprietà 2) e 1) si ottiene la tesi:

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1.$$

4) Sia di nuovo $x \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(x) + i\sin(x).
\end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 4.26. Dalle affermazioni 3) e 4) risulta analiticamente provata l'identità trigonometrica fondamentale $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

9. Riordinamenti di serie

La somma di una serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

dipende dall'ordine in cui si sommano gli infiniti addendi: per le somme infinite non vale la proprietà commutativa. Se tuttavia la serie converge assolutamente allora il valore della somma è indipendente dall'ordine delle somme.

DEFINIZIONE 4.27 (Riordinamento). Una applicazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ iniettiva e suriettiva si dice *riordinamento* di $\mathbb{N}$.

TEOREMA 4.28. Sia $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie reale o complessa assolutamente convergente. Allora per ogni riordinamento $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si ha

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)},$$

e la serie converge assolutamente.

DIM. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\Big| s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k \Big| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=\bar{n}+1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora definiamo il numero naturale $\bar{m} = \max\{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(\bar{n})\}$. Allora se $m \geq \bar{m}$ si ha $m \geq \sigma^{-1}(i)$ per ogni $i = 1, \ldots, \bar{n}$, ovvero $\sigma^{-1}(i) \in \{1, \ldots, m\}$ per ogni $i = 1, \ldots, \bar{n}$, ovvero

$$\{1, \ldots, \bar{n}\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m)\}.$$

Dunque, se $m \geq \bar{m}$ troviamo

$$\Big| s - \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} \Big| = \Big| s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k - \sum_{\substack{k=1 \\ \sigma(k) \notin \{1,\ldots,\bar{n}\}}}^{m} a_{\sigma(k)} \Big| \leq \Big| s - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k \Big| + \sum_{k=\bar{n}+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Questo prova che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = s$.

Lo stesso argomento applicato alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ prova l'assoluta convergenza della serie riordinata:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}| < \infty.$$

□

Consideriamo ora una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e supponiamo che la seguente serie converga semplicemente ma non assolutamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Questa è la condizione necessaria di convergenza.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$, dove $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = -\infty$, dove $a_n^- = \min\{a_n, 0\}$.

Che una delle due affermazioni ii) e iii) debba valere segue dal fatto che in caso contrario ci sarebbe convergenza assoluta. Se valesse solo una delle affermazioni ii) e iii), allora non potrebbe esserci convergenza semplice.

Teorema 4.29. Sia $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, il termine generale di una serie che converge semplicemente ma non assolutamente. Allora per ogni $L \in \mathbb{R}$ esiste un riordinamento $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L.$$

Dim. Definiamo il riordinamento σ in modo induttivo. Definiamo $\sigma(1) = 1$ e supponiamo che $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ siano stati definiti. Definiamo il numero naturale $\sigma(n+1)$ con il seguente criterio. Sia

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)}$$

e distinguiamo i due casi $L_n \geq L$ e $L_n < L$.

Se $L_n \geq L$ definiamo

$$\sigma(n+1) = \min\big\{m \in \mathbb{N} : m \notin \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} \text{ e } a_m < 0\big\}.$$

Osserviamo che l'insieme dei naturali $m \in \mathbb{N}$ con le proprietà richieste è infinito per la condizione iii) vista sopra. Il minimo esiste per il buon ordinamento dei naturali.

Se $L_n < L$ definiamo

$$\sigma(n+1) = \min\big\{m \in \mathbb{N} : m \notin \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} \text{ e } a_m \geq 0\big\}.$$

Il minimo m con le proprietà richieste esiste per la condizione ii).

L'applicazione $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ così definita è iniettiva. Dalle condizioni ii) e iii) segue anche che σ è suriettiva.

Proviamo che $\lim_{n\to\infty} L_n = L$. Fissato $\varepsilon > 0$, per la i) esiste $\bar{m} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{m}$. Inoltre per la ii) si può anche supporre che $L_{\bar{m}} > L - \varepsilon$. Segue che $L_n > L - \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{m}$. Per la iii) esiste $\bar{n} \geq \bar{m}$ tale che $L_{\bar{n}} \leq L$, e dunque $L_n \leq L + \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Questo termina la dimostrazione. $\square$

10. Prodotto di serie reali o complesse

In questa sezione dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA 4.30 (Mertens). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse. Supponiamo che:

1) la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga assolutamente;
2) la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converga.

Allora si ha:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

ed in particolare la serie a destra converge.

DIM. Fissato $N \in \mathbb{N}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{k=0}^{N} a_k\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N} b_n\Big) &= \sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{n=k}^{N+k} b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=N+1}^{N+k} a_k b_{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{N} a_k (s_N - s_{N-k}),\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} b_n,$$

le somme parziali relative alla successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Se proviamo che si ha

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_k (s_N - s_{N-k}) = 0, \tag{4.8}$$

allora la tesi segue.

Osserviamo preliminarmente che:

i) Esiste una costante $C > 0$ tale che $|s_N| \le C < \infty$ per ogni $N \in \mathbb{N}$, in quanto le somme parziali convergono.
ii) La successione $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, in quanto converge.

Siano $M \le N$, allora

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=0}^{N} a_k (s_N - s_{N-k})\Big| &= \Big|\sum_{k=0}^{M} a_k (s_N - s_{N-k}) + \sum_{k=M+1}^{N} a_k (s_N - s_{N-k})\Big|\\ &\le \sum_{k=0}^{M} |a_k|\big|s_N - s_{N-k}\big| + \sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k|\big|s_N - s_{N-k}\big|.\end{aligned}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Usando la stima i) e l'assoluta convergenza 1), è possibile scegliere $M \in \mathbb{N}$ indipendente da N tale che

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k| \big| s_N - s_{N-k} \big| \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k| (|s_N| + |s_{N-k}|) \leq 2C \sum_{k=M+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora M è fissato. Per il fatto ii) e di nuovo per l'assoluta convergenza 1), esiste $\bar{N} \in \mathbb{N}$ tale che per $N \geq \bar{N}$ si abbia

$$\sum_{k=0}^{M} |a_k| \big| s_N - s_{N-k} \big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Questo conclude la prova di (4.8).

□

11. Criteri di convergenza di Cesàro

I criteri di Cesàro sono utili per calcolare limiti che presentano forme indeterminate del tipo $[\infty/\infty]$ oppure $[0/0]$.

Teorema 4.31 (Cesàro I). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali e supponiamo che:

i) la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia strettamente crescente e $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$;

ii) esista (finito) il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L \in \mathbb{R}.$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Dim. Osserviamo che si può supporre $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Affermiamo che per ogni $\delta < L$ si ha

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \delta. \tag{4.9}$$

Dalla arbitrarietà di δ segue:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq L. \tag{4.10}$$

Applicando questa disuguaglianza alla coppia di successioni $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativamente al limite $-L$, si trova

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{-a_n}{b_n} \geq -L,$$

che è equivalente a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq L. \tag{4.11}$$

Da (4.10) e (4.11) segue la tesi.

Rimane da provare (4.9). Esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \geq \delta.$$

Ricordando che $b_{n+1} - b_n > 0$, questa disuguaglianza è equivalente a $a_{n+1} - a_n \geq \delta(b_{n+1} - b_n)$. Dunque, se $k \in \mathbb{N}$ e $n \geq \bar{n}$ si trova

$$a_{n+k} - a_n = \sum_{i=1}^{k}(a_{n+i} - a_{n+i-1}) \geq \delta \sum_{i=1}^{k}(b_{n+i} - b_{n+i-1}) = \delta(b_{n+k} - b_n).$$

In particolare, dividendo per $b_{n+k} > 0$, si trova

$$\frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \geq \frac{a_n}{b_{n+k}} + \delta\Big(1 - \frac{b_n}{b_{n+k}}\Big).$$

Facendo ora il limite per $k \to \infty$ con n fissato, si deduce che

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{n+k}}{b_{n+k}} \geq \delta.$$

Questo termina la dimostrazione. □

Teorema 4.32 (Cesàro II). Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali infinitesime, con $b_n \neq 0$ per $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia strettamente monotona e che esista (finito) il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Dim. Supponiamo ad esempio che sia $b_{n+1} > b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi $b_n < 0$. Come nel teorema precedente si mostra che per ogni $\delta < L$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $n \geq \bar{n}$ si ha

$$a_{n+k} - a_n \geq \delta(b_{n+k} - b_n).$$

Passando al limite per $k \to \infty$ si trova $a_n \leq \delta b_n$, e dunque

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \delta \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \delta.$$

E ora si conclude come nel teorema precedente. □

CAPITOLO 5

Completezza di $\mathbb{R}$ e compattezza sequenziale

1. Teorema di Bolzano-Weierstrass

In questo capitolo proviamo che $\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo. La dimostrazione passa attraverso il Teorema di Bolzano-Weierstrass. Partiamo dalla nozione di sottosuccessione.

Una *selezione crescente* di indici è una funzione (successione) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che è strettamente crescente, $k(n) < k(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scriveremo $k_n = k(n)$.

Definizione 5.1. Una *sottosuccessione* di una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione della forma $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ con $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ selezione crescente di indici.

Invitiamo il lettore a riflettere sul seguente esercizio:

Esercizio 5.2. Data una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

(A) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ad un limite finito);

(B) Esiste un numero $L \in \mathbb{R}$ con questa proprietà: ogni sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una ulteriore sottosuccessione che converge ad L.

L'implicazione interessante è (B)$\Rightarrow$(A).

Sappiamo che tutte le successioni convergenti sono limitate. Le successioni limitate in generale non sono convergenti, ma hanno sempre una sottosuccessione convergente.

Teorema 5.3 (della sottosuccessione convergente). Ogni successione reale o complessa limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente.

La dimostrazione del Teorema 5.3 si basa sul Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Definizione 5.4. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se per ogni $\delta > 0$ si ha

$$A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset,$$

ovvero, equivalentemente, se per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che $0 < |x - x_0| < \delta$.

Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice *limitato* se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $A \subset [a, b]$.

Teorema 5.5 (Bolzano-Weierstrass). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato con $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Allora A ha almeno un punto di accumulazione.

Dim. La dimostrazione si basa sul metodo di *dicotomia*. Siccome A è limitato esistono $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tali che $A \subset [a, b]$. Definiamo $a_0 = a$, $b_0 = b$ e sia $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ il punto medio. Consideriamo i due intervalli $[a_0, c_0]$ e $[c_0, b_0]$. Uno dei due intervalli deve contenere infiniti elementi di A. Sia ad esempio $[a_0, c_0]$. Allora definiamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$. Si hanno le disuguaglianze

$$a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0, \quad \text{e} \quad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(a_0 - b_0).$$

Procediamo ora in modo induttivo. Supponiamo di aver già scelto dei numeri $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ con queste proprietà:

i) $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n < b_n \leq \ldots \leq b_1 \leq b_0$;
ii) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$;
iii) L'intervallo $[a_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A.

Selezioniamo dei numeri a_{n+1} e b_{n+1} nel seguente modo. Definiamo $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Uno dei due intervalli $[a_n, c_n]$ e $[c_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A. Supponiamo sia ad esempio il secondo. Definiamo allora $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$. Le affermazioni i), ii), iii) sono allora verificate con $n + 1$ al posto di n.

Abbiamo costruito una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è monotona crescente e superiormente limitata, ed una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che è monotona decrescente inferiormente limitata. Dunque esistono finiti i limiti

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad M = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dalla proprietà ii) segue che

$$M - L = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 - a_0}{2^n} = 0,$$

e dunque $L = M$. Proviamo che il punto $x_0 = L = M$ è un punto di accumulazione per A.

Fissiamo $\delta > 0$ e scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $b_n - a_n < \delta$. Questo è certamente possibile. Siccome $a_n \leq x_0 \leq b_n$, si ha $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = I_\delta(x_0)$. Siccome $[a_n, b_n]$ contiene infiniti elementi di A, l'insieme $A \cap I_\delta(x_0)$ contiene infiniti elementi e dunque certamente $A \cap I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$. □

Osservazione 5.6. Provare che il Teorema di Bolzano-Weierstrass implica (e di fatto è equivalente a) l'Assioma di completezza dei numeri reali.

Dimostrazione del Teorema 5.3. Senza perdere di generalità possiamo supporre che la successione sia reale. Nel caso di una successione complessa è sufficiente estrarre una prima sottosuccessione della parte reale e poi un'ulteriore sottosuccessione di quella immaginaria (ci sono due processi di selezione di una sottosuccessione, il secondo subordinato al primo).

Si consideri dunque l'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. Se A contiene un numero finito di elementi, allora almeno uno di questi ricorre per infinite scelte di indici e si può estrarre una sottosuccessione costante.

Possiamo allora supporre $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, A ha un punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R}$. Per ogni $\delta = 1/n$, l'insieme $A \cap I_\delta(x_0)$ contiene infiniti elementi. Dunque, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $a_{k_n} \in I_{1/n}(x_0)$. È possibile selezionare in modo ricorsivo k_n in modo tale che $k_n > k_{n-1}$. Quindi $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dalla disuguaglianza

$$|a_{k_n} - x_0| \leq \frac{1}{n}$$

segue che $a_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. □

2. Successioni di Cauchy. Completezza metrica di $\mathbb{R}$

I numeri reali sono l'esempio più importante di spazio metrico completo, uno spazio metrico dove tutte le successioni di Cauchy convergono.

Definizione 5.7 (Successione di Cauchy). Una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Teorema 5.8 (Criterio di Cauchy). Una successione reale o complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se e solo se è di Cauchy.

Dim. Proviamo il teorema per le successioni reali. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che converge ad un numero $L \in \mathbb{R}$ e proviamo che è di Cauchy. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - L| < \varepsilon$. Dunque, per $n, m \geq \bar{n}$ si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| \leq 2\varepsilon.$$

Supponiamo viceversa che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Proviamo preliminarmente che la successione è limitata. Infatti, scelto $\varepsilon = 1$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - a_m| < 1$ per $m, n \geq \bar{n}$, e in particolare per $n \geq \bar{n}$ si ha

$$|a_n| \leq |a_{\bar{n}}| + |a_n - a_{\bar{n}}| \leq 1 + |a_{\bar{n}}|,$$

e dunque, per un generico $n \in \mathbb{N}$ si ha la maggiorazione

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, ..., |a_{\bar{n}-1}|, 1 + |a_{\bar{n}}|\}.$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, dalla successione limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Ovvero esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L.$$

Proviamo che vale anche $a_n \to L$ per $n \to \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ dato dalla condizione di Cauchy, ovvero $|a_n - a_m| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \bar{n}$. Scegliamo $k \in \mathbb{N}$ tale che $n_k \geq \bar{n}$ e $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$. Allora, per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| \leq 2\varepsilon.$$

Questo termina la dimostrazione. La dimostrazione nel caso complesso è identica, basterà usare il Teorema di Bolzano-Weierstrass nel caso complesso. □

Il Teorema 5.8 si può riformulare nel seguente modo: I numeri reali $\mathbb{R}$ con la distanza Euclidea formano uno *spazio metrico completo*. Analogamente, il piano complesso $\mathbb{C}$ con la distanza Euclidea è uno spazio metrico completo

I numeri razionali $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ con la distanza Euclidea $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$, non sono invece uno spazio metrico completo. Infatti, la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N},$$

è di Cauchy in $\mathbb{Q}$ ma non converge ad un elemento di $\mathbb{Q}$. Infatti, il valore limite della successione è il numero $\mathrm{e} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Esercizio 5.9. Provare il Teorema 4.10 sulla convergenza assoluta utilizzando il Criterio di Cauchy.

3. Rappresentazione dei reali in base b

In questa sezione discutiamo il problema di rappresentare numeri reali tramite allineamenti infiniti di cifre. Ci restringiamo a numeri reali $x \in [0,1)$.

Sia $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$ una *base* e introduciamo l'insieme delle cifre ammissibili $\{0,1,2,\dots,b-1\}$. Quando $b = 10$ avremo la *rappresentazione decimale* di un numero reale, quando $b = 2$ avremo la *rappresentazione binaria.*

Definizione 5.10. Una *rappresentazione in base b* di un numero reale $x \in [0,1)$ è un allineamento di cifre

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots, \quad \alpha_n \in \{0,1,\dots,b-1\},$$

dove l'uguaglianza è da intendersi nel senso delle serie (convergenti)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^n}.$$

La rappresentazione si dice *propria* se non esiste alcun $m \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha_n = b-1$ per ogni $n \geq m$.

Osserviamo che se $\alpha_n \in \{0,1,\dots,b-1\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e non è identicamente $\alpha_n = b-1$, allora si ha

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^n} < (b-1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{b-1}{b}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{n-1}} = \frac{b-1}{b}\frac{1}{1-1/b} = 1.$$

Teorema 5.11. Sia $b \in \mathbb{N}$ con $b \geq 2$. Ogni numero reale $x \in [0,1)$ ha un'unica rappresentazione propria in base b,

$$x = 0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots, \quad \alpha_n \in \{0,1,\dots,b-1\}.$$

Dim. Iniziamo con il provare l'esistenza di una rappresentazione propria in base b. Affermiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esistono delle cifre $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0,1,\dots,b-1\}$ ed un "errore" $x_n \in [0,1)$ tali che

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{x_n}{b^n}. \tag{5.1}$$

La verifica di tale affermazione è per induzione su $n \in \mathbb{N}$.

Partiamo dalla base induttiva $n = 1$. Osserviamo che

$$0 \leq bx < b \in \mathbb{N} \quad \text{e quindi} \quad 0 \leq [bx] \leq b-1.$$

Il numero naturale $\alpha_1 = [bx]$ verifica $0 \leq \alpha_1 \leq b-1$, ovvero è una cifra ammissibile. Inoltre si ha

$$x = \frac{\alpha_1}{b} + \frac{x_1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = bx - \alpha_1 = bx - [bx] = \{bx\} \in [0,1).$$

Dunque $x_1 = \{bx\}$ è la nostra definizione dell'errore $x_1 \in [0,1)$.

Supponiamo ora di avere la formula (5.1) per un certo $n \in \mathbb{N}$. Vogliamo trovare la stessa formula per $n+1$. Dobbiamo trovare la cifra $\alpha_{n+1} \in \{0,1,...,b-1\}$ e l'errore $x_{n+1} \in [0,1)$.

Applichiamo l'argomento della base induttiva al numero reale $x_n \in [0,1)$ e troveremo $\alpha_{n+1} \in \{0,1,\dots,b-1\}$ e $x_{n+1} \in [0,1)$ tali che
$$x_n = \frac{\alpha_{n+1}}{b} + \frac{x_{n+1}}{b}.$$
Sostituendo nella (5.1) si ottiene
$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{\alpha_{n+1}}{b^{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{b^{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{x_{n+1}}{b^{n+1}}.$$
Questo termina la verifica della (5.1).

Ora osserviamo che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{b^n} = 0,$$
in quanto si ha il prodotto di una successione infinitesima con una limitata. Passando al limite per $n \to \infty$ in (5.1) si ottiene la rappresentazione di x in base b
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{b^k}.$$
Ora proviamo che la rappresentazione è propria. Supponiamo per assurdo che esista $m \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha_n = b-1$ per ogni $n > m$. Avremo, per un certo $x_m \in [0,1)$
$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{b^k} + \frac{x_m}{b^m} = x = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{b^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{b^k},$$
da cui si deduce che
$$x_m = b^m \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{b^k} = \frac{b-1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^k} = 1,$$
e questo è assurdo.

Rimane da provare che esiste un'unica rappresentazione propria. Supponiamo di avere
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{b^n},$$
con $\alpha_n, \beta_n \in \{0,1,\dots,b-1\}$ cifre che non siano definitivamente $b-1$. Proviamo che $\alpha_1 = \beta_1$. Se per assurdo così non fosse avremmo
$$0 \neq \frac{\alpha_1 - \beta_1}{b} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n - \alpha_n}{b^n}.$$
Esiste certamente $n \geq 2$ (in effetti esistono infiniti tali n) per cui $|\beta_n - \alpha_n| < b-1$. Quindi
$$\Big| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n - \alpha_n}{b^n} \Big| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\beta_n - \alpha_n|}{b^n} < (b-1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{b-1}{b^2} \frac{1}{1-1/b} = \frac{1}{b}.$$
Questo è assurdo, in quando
$$\Big| \frac{\alpha_1 - \beta_1}{b} \Big| \geq \frac{1}{b}.$$
Ora per induzione si prova che $\alpha_n = \beta_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Usando le rappresentazioni decimali o binaria è agevole provare vari risultati sulla cardinalità dei reali.

Teorema 5.12. L'insieme dei numeri reali non è numerabile.

Dim. Sappiamo che Card($\mathbb{R}$) = Card($[0,1)$). Quindi è sufficiente provare che l'insieme $[0,1)$ non è numerabile. Supponiamo per assurdo che $[0,1)$ sia numerabile. Allora potremmo elencare i suoi elementi

$$[0,1) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ciascun reale $x_n \in [0,1)$ ha un'unica rappresentazione decimale propria

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \alpha_1^1 \alpha_1^2 \dots \alpha_1^m \dots \\ x_2 &= 0, \alpha_2^1 \alpha_2^2 \dots \alpha_2^m \dots \\ \vdots\ & \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n &= 0, \alpha_n^1 \alpha_n^2 \dots \alpha_n^m \dots \\ \vdots\ & \ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}$$

dove le cifre verificano $\alpha_n^m \in \{0,1,\dots,9\}$ e inoltre la successione $m \mapsto \alpha_n^m$ non è mai (per nessun n) definitivamente 9.

Possiamo scegliere $\beta_1 \in \{0,1,\dots,8\}$ con $\beta_1 \neq \alpha_1^1$, $\beta_2 \in \{0,1,\dots,8\}$ con $\beta_2 \neq \alpha_2^2$, e in generale $\beta_m \in \{0,1,\dots,8\}$ con $\beta_m \neq \alpha_m^m$, $m \in \mathbb{N}$. Per l'unicità della rappresentazione decimale propria, il numero

$$x = \sum_{m=1} \frac{\beta_m}{10^m} \in [0,1)$$

verifica $x \neq x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo è assurdo.

□

Il criterio di selezione utilizzato nella dimostrazione precedente è il metodo di *selezione diagonale di Cantor*. Il teorema precedente può essere migliorato. In effetti, si ha Card($\mathbb{R}$) = Card($\mathcal{P}(\mathbb{N})$). La prova di questo teorema è omessa.

Teorema 5.13. Risulta Card($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) = Card($\mathbb{R}$).

Dim. È sufficiente provare che Card($[0,1)\times[0,1)$) = Card($[0,1)$). La parte difficile della dimostrazione è provare che esiste una funzione $f : [0,1)\times[0,1) \to [0,1)$ iniettiva.

Siano $x, y \in [0,1)$ dati dalla rappresentazione binaria propria

$$\begin{aligned} x &= 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \\ y &= 0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots, \end{aligned}$$

dove $\alpha_n, \beta_n \in \{0,1\}$ non sono definitivamente 1. Definiamo $f(x,y)$ come il numero reale in $[0,1)$ con rappresentazione decimale propria

$$f(x,y) = 0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n \dots.$$

La funzione f è iniettiva per l'unicità della rappresentazione decimale propria. Se, infatti, $f(x,y) = f(\bar{x}, \bar{y})$ allora si ha

$$0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_n \beta_n \dots = 0, \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_2 \dots \bar{\alpha}_n \bar{\beta}_n \dots \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = \bar{\alpha}_n \text{ e } \beta_n = \bar{\beta}_n,\ n \in \mathbb{N},$$

e quindi $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$, dove le espressioni con $^-$ sono legate nel modo naturale.

$\square$

CAPITOLO 6

Spazi metrici e funzioni continue

In questo capitolo studiamo le nozioni fondamentali sugli spazi metrici e la loro topologia. Poi colleghiamo fra loro la definizione metrica e quella topologica di funzione continua.

1. Definizioni ed esempi

Richiamiamo dalla Sezione 4 del Capitolo 2 la definizione di *spazio metrico*.

Definizione 6.1. Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *metrica* o *distanza*, che per ogni $x, y, z \in X$ verifica le seguenti proprietà:

1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria);
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare).

Conosciamo già i seguenti esempi di spazi metrici:

1) $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, è uno spazio metrico.
2) $\mathbb{R}$ con la funzione $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$, $x, y \in \mathbb{R}$, è uno spazio metrico.
3) $\mathbb{C}$ con la funzione $d(z, w) = |z - w|$, $z, w \in \mathbb{C}$, è uno spazio metrico.
4) $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la funzione distanza

$$d(x, y) = |x - y| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \Big)^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

è uno spazio metrico.

Ecco altri esempi di spazi metrici.

Esempio 6.2 (Spazio metrico discreto). Sia X un insieme e definiamo la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

È facile verificare che d verifica gli assiomi della funzione distanza.

Esempio 6.3 (Distanza centralista). Su $\mathbb{R}^2$ definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ nel seguente modo

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ sono collineari con } 0, \\ |x| + |y| & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Lasciamo come esercizio il compito di provare che $(\mathbb{R}^2, d)$ è uno spazio metrico.

ESEMPIO 6.4. I numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ con la distanza

$$d(m,n) = \Big|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\Big|, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

sono uno spazio metrico.

Sia X uno spazio metrico con distanza $d : X \times X \to [0, \infty)$. Fissato un punto $x \in X$ ed un raggio $r \geq 0$, l'insieme

$$B_r(x) = B(x,r) = B_X(x,r) = \big\{y \in X : d(x,y) < r\big\}$$

si dice *sfera* o *palla* (aperta) di centro x e raggio r.

OSSERVAZIONE 6.5 (Spazio metrico restrizione). Dato un sottoinsieme $Y \subset X$, possiamo restringere la funzione distanza d ad Y: $d : Y \times Y \to [0, \infty)$. Allora anche (Y, d) è uno spazio metrico. La palle nella distanza d di Y sono fatte nel seguente modo:

$$B_Y(y,r) = B_X(y,r) \cap Y,$$

per ogni $y \in Y$ ed $r > 0$.

2. Spazi metrici indotti da spazi normati

Spazi metrici possono essere generati a partire dagli spazi normati.

DEFINIZIONE 6.6 (Spazio normato). Uno spazio normato (reale) è una coppia $(V, \| \cdot \|)$ dove V è uno spazio vettoriale reale e $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ è una funzione, detta *norma*, che per ogni $x, y \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica le seguenti proprietà:

1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (omogeneità);
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subadittività o disuguaglianza triangolare).

Chiaramente, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^n$ sono spazi normati con le norme naturali. Una norma $\| \cdot \|$ su uno spazio vettoriale V induce canonicamente una distanza d su V definita nel seguente modo:

$$d(x,y) = \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

La disuguaglianza triangolare per la distanza d deriva dalla subadittività della norma $\| \cdot \|$. Infatti, per ogni $x, y, z \in V$ si ha:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(z,y).$$

ESEMPIO 6.7 (Lo spazio $\ell^2(\mathbb{R})$). Sia $\ell^2(\mathbb{R})$ l'insieme delle successioni reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di quadrato sommabile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

Indichiamo con $\mathrm{x} \in \ell^2(\mathbb{R})$ un generico elemento di $\ell^2(\mathbb{R})$. La funzione $\| \cdot \|_{\ell^2(\mathbb{R})}$: $\ell^2(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ così definita

$$\|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{1/2}$$

è una norma. La proprietà di subadittività si prova come in $\mathbb{R}^n$. Definiamo su $\ell^2(\mathbb{R})$ il prodotto scalare

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad \mathrm{x} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \mathrm{y} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

La disuguaglianza $2|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$ prova che la serie converge assolutamente. In particolare, avremo $\|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle^{1/2}_{\ell^2(\mathbb{R})}$. Esattamente lo stesso argomento della Proposizione 5 nella Sezione 5 del Capitolo 2 prova che vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle_{\ell^2(\mathbb{R})}| \leq \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \|\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})},$$

e da qui segue che $\|\mathrm{x}+\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \leq \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} + \|\mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})}$.

In conclusione, $\ell^2(\mathbb{R})$ con la funzione distanza

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2 \Big)^{1/2}$$

è uno spazio metrico.

3. Successioni in uno spazio metrico

Una successione in uno spazio metrico (X, d) è una funzione $x : \mathbb{N} \to X$. Si usa la notazione $x_n = x(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la successione si indica con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definizione 6.8. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un punto $x \in X$ nello spazio metrico (X, d) se

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0,$$

ovvero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si abbia $d(x_n, x) \leq \varepsilon$. In questo caso si scrive

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x \quad \text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{in } (X, d),$$

e si dice che la successione è *convergente* ad x ovvero che x è il limite della successione.

Se il limite di una successione esiste allora è unico. Se infatti $x, y \in X$ sono entrambi limiti di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora risulta

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0, \quad n \to \infty,$$

e quindi $d(x, y) = 0$ ovvero $x = y$.

Esempio 6.9 (Successioni in $\mathbb{R}^m$). Sia $X = \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, con la distanza Euclidea e consideriamo una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^m$. Ogni punto $x_n \in \mathbb{R}^m$ ha m coordinate, $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$ con $x_n^1, \ldots, x_n^m \in \mathbb{R}$. Sia infine $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ un punto fissato. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(A) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $\mathbb{R}^m$;

(B) $\lim_{n\to\infty} x_n^i = x^i$ in $\mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \ldots, m$.

4. Limiti di funzione

4.1. Limiti in spazi metrici.

Definizione 6.10 (Punto di accumulazione). Sia (X, d) uno spazio metrico. Un punto $x_0 \in X$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset X$ se per ogni $r > 0$ si ha

$$A \cap B_r(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

Definizione 6.11 (Limite). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di A, e sia $f : A \to Y$ una funzione. Un punto $y_0 \in Y$ si dice *limite* di f per x che tende a x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ si abbia

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Scriveremo in questo caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0,$$

dove la notazione per le distanze di riferimento è omessa.

Se il limite esiste allora è unico. Per avere l'unicità occorre definire il limite limitatamente ai punti di accumulazione.

Teorema 6.12 (Caratterizzazione sequenziale del limite). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione di A, $y_0 \in Y$ ed $f : A \to Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$;

B) Per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A \setminus \{x_0\}$ vale l'implicazione:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 \text{ in } Y.$$

Dim. A)⇒B). Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale:

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Dalla convergenza della successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a x_0 segue l'esistenza di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia $d_X(x_n, x_0) < \delta$. Quindi per tali $n \geq \bar{n}$ si ottiene $d_Y(f(x_n), y_0) < \varepsilon$.

B)⇒A). Supponiamo per assurdo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ ci sia un punto $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ tale che $d_X(x_n, x_0) < 1/n$ ma $d_Y(f(x_n), y_0) \geq \varepsilon$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad x_0 in (X, d_X) ma la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad $f(x_0)$ in (Y, d_Y). Questo contraddice l'affermazione B). □

Supponiamo ora che lo spazio metrico di arrivo sia $Y = \mathbb{R}$ con la distanza standard.

Teorema 6.13 (Operazioni con i limiti). Sia $x_0 \in X$ un punto di accumulazione dell'insieme $A \subset X$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che esistano (finiti) i limiti

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \ \in \mathbb{R},$$
$$M = \lim_{x \to x_0} g(x) \ \in \mathbb{R}.$$

Allora si ha:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = L + M$;
2) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = LM$.

Inoltre, se $M \neq 0$ allora si ha anche:

3) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

Dim. La dimostrazione segue dal Teorema 3.8 sulle operazioni con i limiti di successioni in $\mathbb{R}$ e dal Teorema 6.12.

$\square$

4.2. Funzioni di variabile reale a valori reali. Siano ora $X = \mathbb{R}$ ed $Y = \mathbb{R}$ con la distanza standard. La definizione di limite si riformula nel seguente modo.

Definizione 6.14 (Limite). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta, \ x \in A, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esempio 6.15. La funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A = (0, \infty)$, definita da

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0,$$

non ha limite per $x \to 0$.

Infatti si consideri la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A tale che $1/x_n = n\pi$, con $n \geq 1$. Chiaramente $x_n \to 0$ per $n \to \infty$ ed inoltre $f(x_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

D'altra parte, la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A tale che $1/y_n = \pi/2 + 2n\pi$ pure converge a 0 per $n \to \infty$ ma $f(y_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Non può dunque essere verificata la caratterizzazione sequenziale di limite.

Esercizio 6.16. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{1+2x} = 1.$$

Soluzione. Fissato $\varepsilon > 0$, cerchiamo $\delta > 0$ tale che valga la seguente implicazione:

$$0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x+1}{1+2x} - 1\right| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Studiamo la seguente disequazione:

$$\left|\frac{x+1}{1+2x} - 1\right| = \left|\frac{x+1-1-2x}{1+2x}\right| = \left|\frac{x}{1+2x}\right| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Supponendo, come è lecito in questo caso, che $1+2x \neq 0$, la disequazione è equivalente a

$$x^2 < \varepsilon^2(1 + 4x^2 + 4x) \quad \Leftrightarrow \quad (1 - 4\varepsilon^2)x^2 - 4\varepsilon^2 x - \varepsilon^2 < 0.$$

Le radici del polinomio in x di grado 2 associato alla disequazione sono

$$x_\pm = \frac{2\varepsilon^2 \pm \varepsilon}{1 - 4\varepsilon^2}.$$

Qui e nel seguito possiamo supporre che $0 < \varepsilon < 1/2$. La disequazione precedente è verificata per $x_- < x < x_+$ e dunque la disequazione (6.2) è equivalente a

$$\left|\frac{x}{1+2x}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} < x < \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}.$$

Con la scelta di δ

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right\} = \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}$$

l'implicazione (6.1) è verificata. □

Usando il fatto che $\mathbb{R}$ è totalmente ordinato, è possibile anche introdurre le nozioni di limite destro e limite sinistro. Diciamo che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione destro di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se $A \cap (x_0, x_0 + \delta) \neq \emptyset$ per ogni $\delta > 0$. Analogamente, diciamo che un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione sinistro di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se $A \cap (x_0 - \delta, x_0) \neq \emptyset$ per ogni $\delta > 0$.

Definizione 6.17 (Limiti destro e sinistro). Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme, $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione destro e sinistro di A ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.

1) Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+ \in \mathbb{R}$$
se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L^+| < \varepsilon.$$
Chiamiamo L^+ il *limite destro* di f in x_0.

2) Diciamo che
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^- \in \mathbb{R}$$
se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che
$$x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L^-| < \varepsilon.$$
Chiamiamo L^- il *limite sinistro* di f in x_0.

Chiaramente il limite $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste (finito) se e solo se esistono (finiti) e sono uguali i limiti destro e sinistro $L^+ = L^- = L$.

Quando le funzioni assumono valori in $\mathbb{R}$ è possibile definire la nozione di limite (più o meno) infinito per $x \to x_0$.

Definizione 6.18 (Limite infinito). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in A, \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

Esercizio 6.19. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)^4} = \infty.$$

Soluzione. Fissato $M > 0$, cerchiamo $\delta > 0$ tale che valga la seguente implicazione:

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{(1-x)^4} > M. \tag{6.3}$$

Studiamo la seguente disequazione:

$$\frac{x}{(1-x)^4} > M \quad \Leftrightarrow \quad x > M(x-1)^4. \tag{6.4}$$

Non è possibile risolvere tale disequazione in modo esatto. Riduciamo la sua complessità nel seguente modo. Supponiamo che $0 < \delta \leq 1/2$. In questo caso si ha:

$$|x-1| < \delta \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

Dunque, usando l'informazione $x > 1/2$ si ottiene

$$\frac{x}{(x-1)^4} > \frac{1}{2(x-1)^4}.$$

Risolviamo allora la disequazione semplificata

$$\frac{1}{2(x-1)^4} > M. \tag{6.5}$$

Chiaramente, per la proprietà transitiva, se x verifica la disequazione (6.5) allora verifica anche la disequazione (6.4). D'altra parte, si ha

$$\frac{1}{2(x-1)^4} > M \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 2M(x-1)^4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^4 < \frac{1}{2M} \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| < \frac{1}{\sqrt[4]{2M}}$$

Se ora scegliamo

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2M}}\right\}$$

tutte le deduzioni fatte sono valide e si ottiene l'implicazione

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{(x-1)^4} > M.$$

□

Definiamo ora la nozione di limite finito quando $x \to \infty$ ("x tende a più infinito"). Diremo che ∞ è un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se $A \cap (M, \infty) \neq \emptyset$ per ogni $M \in \mathbb{R}$.

Definizione 6.20. Sia ∞ un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ per $x \to \infty$ e scriviamo

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$x \in A \cap (M, \infty) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Esercizio 6.21. Nelle Definizioni 6.14, 6.18 e 6.20 abbiamo formalizzato la nozione di limite in tre diverse situazioni. Lasciamo al lettore il compito di definire il limite di funzione nei seguenti casi:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$;

2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$;
3) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$;
4) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$.

Esempio 6.22 (Esempi fondamentali). I seguenti limiti sono basilari. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Allora:

$$1)\ \lim_{x\to 0} |x|^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ \infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che quando $\alpha = 0$ NON si ha forma indeterminata $[0^0]$, perchè $|x|^0 = 1$ per ogni $x \neq 0$, e dunque il limite per $x \to 0$ è 1. Nella forma indeterminata $[0^0]$ si ha una base che tende a 0 ed un esponente che tende a 0 senza essere già 0.

$$2)\ \lim_{x\to\infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Sia ora $a > 0$ una base fissata. Allora:

$$3)\ \lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Osserviamo che quando $a = 1$ NON si ha forma indeterminata $[1^\infty]$, perchè $1^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e dunque il limite per $x \to \infty$ è 1. Nella forma indeterminata $[1^\infty]$ si ha una base che tende ad 1 senza essere già 1 ed un esponente che tende a ∞.

Se, infine, si ha $a > 1$ allora:
4) $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ e $\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty$.

Omettiamo le dimostrazioni (elementari) di tali limiti fondamentali.

Osservazione 6.23.
(1) Nel caso $X = \mathbb{R}$, il Teorema 6.13 vale anche con $\pm\infty$ al posto di x_0.
(2) Il punto 1) del Teorema 6.13 vale anche con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$, con la regola $\pm\infty + M = \pm\infty$.
(3) Il punto 2) del Teorema 6.13 vale anche con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$ tale che $M \neq 0$, con la regola:

$$\pm\infty \cdot M = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } M > 0, \\ \mp\infty & \text{se } M < 0. \end{cases}$$

(4) Se f è una funzione limitata e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

(5) Per i limiti di funzione valgono teoremi del confronto analoghi a quelli per i limiti di successioni.

Esercizio 6.24. Usando le operazioni elementari sui limiti e/o argomenti di confronto calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2x} + |\sin x|^{x^2}}{\left(2^{x\log x} + \mathrm{e}^x\right)^2}.$$

Soluzione. Abbiamo una forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$. Dobbiamo individuare e fattorizzare i contributi dominanti a numeratore e denominatore.

Il numeratore è

$$\begin{aligned} N(x) &= x^{2x} + |\sin x|^{x^2} \\ &= x^{2x}\Big(1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}\Big). \end{aligned}$$

Dunque, il contributo dominante al numeratore è x^{2x}, infatti

$$\lim_{x\to\infty} \Big(1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}\Big) = 1. \tag{6.6}$$

Passiamo al denominatore. Fra $2^{x\log x}$ ed e^x il termine dominante è $2^{x\log x} = (2^{\log x})^x$ in quanto $2^{\log x} > \mathrm{e}$ per tutte le x sufficientemente grandi. Nel seguito ci sarà utile anche la seguente identità

$$2^{\log x} = 2^{\log\left(2^{\log_2 x}\right)} = 2^{(\log_2 x)(\log 2)} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log 2} = x^{\log 2}.$$

Dunque, il denominatore è

$$D(x) = \left(2^{x\log x} + \mathrm{e}^x\right)^2 = \left((x^{\log 2})^x + \mathrm{e}^x\right)^2 = \left(x^{x\log 2} + \mathrm{e}^x\right)^2 = x^{2x\log 2}\Big(1 + \Big(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\Big)^x\Big)^2.$$

Per tutte le x sufficientemente grandi si ha

$$\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}} < \frac{1}{2},$$

in quanto la funzione a sinistra è infinitesima, e quindi

$$\Big(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\Big)^x < \frac{1}{2^x},$$

e siccome

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = 0,$$

dal Teorema del Confronto segue che

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\Big)^x = 0. \tag{6.7}$$

Formiamo il quoziente

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^{2x}}{x^{2x\log 2}} \frac{1 + \frac{|\sin x|^{x^2}}{x^{2x}}}{\Big(1 + \Big(\frac{\mathrm{e}}{x^{\log 2}}\Big)^x\Big)^2}.$$

Essendo $1 - \log 2 > 0$, si ha

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2x}}{x^{2x\log 2}} = \lim_{x\to\infty} x^{2x(1-\log 2)} = \infty.$$

Quindi, tenuto conto di (6.6) ed (6.7), usando le regole sulle operazione coi limiti deduciamo che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N(x)}{D(x)} = \infty.$$

$\square$

5. Funzioni continue fra spazi metrici

Il concetto di limite di funzione è strettamente legato alla nozione di funzione continua.

DEFINIZIONE 6.25 (Funzione continua). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $x_0 \in X$. Una funzione $f : X \to Y$ si dice continua nel punto $x_0 \in X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ vale

$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Equivalentemente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

La funzione si dice *continua su* X se è continua in tutti i punti di X.

OSSERVAZIONE 6.26. Da un confronto delle definizioni, segue immediatamente la seguente affermazione. Sono equivalenti:

A) f è continua in x_0;
B) Esiste il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Dunque, negli spazi metrici la continuità è equivalente alla continuità sequenziale, nel senso del seguente teorema.

TEOREMA 6.27 (Caratterizzazione sequenziale della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $x_0 \in X$. Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) f è continua in x_0;
B) f è sequenzialmente continua in x_0. Ovvero, per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X vale l'implicazione:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ in } X \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x) \text{ in } Y.$$

DIM. La dimostrazione è identica a quella per la caratterizzazione sequenziale del limite. □

OSSERVAZIONE 6.28. Il punto B) del Teorema 6.27 può essere riassunto nel seguente modo:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n \to \infty} x_n\Big),$$

il limite "passa dentro l'argomento" di una funzione continua.

Per le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ a valori reali si possono definire in modo naturale le operazioni di somma, moltiplicazione e reciproco. Queste funzioni ereditano la continuità delle funzioni da cui sono composte.

TEOREMA 6.29 (Operazioni sulle funzioni continue). Sia (X, d_X) uno spazio metrico e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue in un punto $x_0 \in X$. Allora:

i) La funzione somma $f + g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
ii) La funzione prodotto $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0;
iii) Se $f \neq 0$ su X, allora la funzione reciproca $1/f : X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

DIM. La dimostrazione segue dal Teorema 6.27 sulla caratterizzazione sequenziale della continuità e dal Teorema 3.8 sulle operazioni elementari con le successioni numeriche. □

ESERCIZIO 6.30. Siano (X, d) uno spazio metrico discreto ed $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. Provare che se $f : \mathbb{R} \to X$ è una funzione continua allora deve necessariamente essere costante.

Soluzione. Fissiamo un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Siccome f è continua, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $f(B(x_0, \delta)) \subset B_X(f(x_0), \varepsilon) = \{f(x_0)\}$ se $0 < \varepsilon < 1$. In altri termini, si ha $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (Potremmo dire: f è localmente costante).

Vogliamo provare che $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sia $R \in (0, \infty]$ il seguente estremo superiore:

$$R = \sup\big\{\delta > 0 \, : \, f(x) = f(x_0) \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big\}.$$

Se $R = \infty$ allora la tesi è provata. Supponiamo per assurdo che $0 < R < \infty$ e si consideri la successione

$$x_n = x_0 + R - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Siccome $x_n < x_0 + R$ si ha $f(x_n) = f(x_0)$, almeno definitivamente. D'altra parte, essendo f continua si ha

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = f(x_0 + R).$$

In modo analogo si prova che $f(x_0 - R) = f(x_0)$. Ripetendo l'argomento iniziale di continuità si deduce che esiste $\bar{\delta} > 0$ tale che $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - R - \bar{\delta}, x_0 + R + \bar{\delta})$. Questo contraddice la definizione di R. Quindi deve essere $R = \infty$.

6. Funzioni continue in $\mathbb{R}$

Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. La funzione identità $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ (la definizione $\varepsilon - \delta$ è verificata con $\delta = \varepsilon$). Dal Teorema 6.29 sulle operazioni con i limiti segue che:

i) Ogni polinomio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continuo su tutto $\mathbb{R}$.
ii) Siano $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomi e sia $A = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Allora la funzione razionale $f : A \to \mathbb{R}$, $f = p/q$, è continua su A.

Ora proviamo che le serie di potenze reali definiscono funzioni continue.

TEOREMA 6.31. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale e si consideri la serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (-R, R),$$

dove $0 < R \leq \infty$ è il raggio di convergenza della serie. Allora la funzione $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ è continua sull'intervallo $(-R, R)$.

DIM. La dimostrazione naturale e più semplice di questo teorema usa la nozione di convergenza uniforme. Qui ne diamo una dimostrazione diretta.

Fissiamo un punto $x \in (-R, R)$ e scegliamo un numero $|x| < \delta < R$. Per $h \in \mathbb{R}$ opportunamente piccolo (basta che sia $x + h \in (-R, R)$) avremo

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k h^{n-k} \\ &= f(x) + h \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k} x^k h^{n-1-k}, \end{aligned}$$

e dunque, per $|h| < \delta - |x|$, si ottiene

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\le |h| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k} |x|^k |h|^{n-1-k} \\ &\le |h| \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| (|x| + |h|)^{n-1} \le |h| \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| \delta^{n-1}. \end{aligned}$$

Se proviamo che l'ultima serie converge (quindi ad un valore indipendente da h), deduciamo che

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x),$$

e questo prova il teorema. Usiamo il Criterio della Radice. Siccome deve essere $\limsup_{n \to \infty} \sqrt{|a_n|} \le 1/R$ (anzi, si ha $=$), avremo

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n |a_n| \delta^{n-1}} \le \frac{\delta}{R} < 1,$$

per la scelta di δ, e quindi la serie converge. □

Esempio 6.32. Dal Teorema 6.31 deduciamo che le funzioni $\sin x$, $\cos x$ ed e^x sono continue su tutto $\mathbb{R}$.

Dallo stesso teorema si deducono anche altre informazioni interessanti. Ad esempio si ha il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1,$$

avendo usato nell'ultimo passaggio la continuità in $x = 0$ della serie di potenze.

In modo analogo si può calcolare anche il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} = 1,$$

che è la derivata della funzione esponenziale nel punto $x = 0$.

Proveremo prossimamente il seguente teorema.

Teorema 6.33. Siano $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed iniettiva. Allora:

i) f è strettamente monotòna (crescente oppure decrescente);

ii) $f(A) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo;
iii) La funzione inversa $f^{-1} : f(A) \to A$ è continua.

DIM. La prova è rinviata. Nella prova di ii) si usa la continuità ma non l'iniettività. □

ESEMPIO 6.34. Dal Teorema 6.33 si deduce la continuità di varie funzioni inverse elementari.

1) La funzione esponenziale $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $\exp(x) = e^x$, è strettamente crescente e continua. Inoltre è anche suriettiva (questo segue dal teorema dei valori intermedi per le funzioni continue). La sua funzione inversa è il logaritmo $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, che dunque è continua.

2) La funzione seno $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ è continua e strettamente crescente. Inoltre è anche suriettiva. Dunque, la sua funzione inversa, la funzione arcoseno $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ è continua.

3) In modo analogo, la funzione tangente $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ è continua, strettamente crescente e suriettiva. La sua funzione inversa $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ è dunque continua.

7. Topologia di uno spazio metrico

In questa sezione definiamo la topologia $\tau(X)$ di uno spazio metrico (X, d). Gli insiemi di $\tau(X) \subset \mathcal{P}(X)$ sono gli aperti di X.

DEFINIZIONE 6.35 (Insiemi aperti. Interno). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme.

i) Un punto $x \in X$ si dice *punto interno di* A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$. L'*interno di* A è l'insieme dei punti interni di A:
$$\mathrm{int}(A) = A^\circ = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\}.$$
Si ha sempre $\mathrm{int}(A) \subset A$.

ii) Un insieme $A \subset X$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$, ovvero se $A = \mathrm{int}(A)$.

PROPOSIZIONE 6.36. Le palle aperte sono insiemi aperti.

DIM. Consideriamo una palla aperta $B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$, con $x_0 \in X$ ed $r > 0$ e sia $x \in B_r(x_0)$. Possiamo scegliere un numero reale $s > 0$ tale che $s < r - d(x, x_0)$. Per ogni punto $y \in B_s(x)$ segue dalla disuguaglianza triangolare:
$$d(y, x_0) \le d(y, x) + d(x, x_0) \le s + d(x, x_0) < r.$$
Abbiamo dunque provato che $B_s(x) \subset B_r(x_0)$. Tutti i punti di $B_r(x_0)$ sono punti interni. □

DEFINIZIONE 6.37 (Insieme chiuso. Chiusura). Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme.

i) Un punto $x \in X$ si dice *punto di chiusura di* A se per ogni $r > 0$ risulta $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$. La chiusura di A è l'insieme dei punti di chiusura di A
$$\overline{A} = \big\{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\big\}.$$
Si ha sempre $A \subset \overline{A}$.

ii) L'insieme A si dice chiuso se contiene tutti i sui punti di chiusura, ovvero se $A = \overline{A}$.

PROPOSIZIONE 6.38. Un insieme A è aperto se e solo se il suo complementare $C = X \setminus A$ è chiuso.

DIM. Infatti, si hanno le equivalenze:

$$\begin{aligned} A \text{ è aperto} \quad &\Leftrightarrow \quad A = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\} \\ &\Leftrightarrow \quad X \setminus A = \big\{x \in X : \text{non esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset A\big\} \\ &\Leftrightarrow \quad X \setminus A = \big\{x \in X : \text{per ogni } r > 0 \text{ si ha } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \ \big\} \\ &\Leftrightarrow \quad C = \overline{C}. \end{aligned}$$

□

L'insieme $\emptyset$ è aperto, in quanto tutti i suoi punti (non ce ne sono) sono interni. Quindi X è chiuso. D'altra parte, X è banalmente aperto e quindi $\emptyset$ è chiuso. Gli insiemi $\emptyset$ ed X sono pertanto contemporaneamente aperti e chiusi.

ESERCIZIO 6.39 (Caratterizzazione sequenziale della chiusura). Siano $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Provare che le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

A) $x \in \overline{A}$;
B) Esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

ESERCIZIO 6.40. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un insieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) L'interno $\text{int}(A)$ è un insieme aperto, ed è il più grande insieme aperto contenuto in A.
ii) La chiusura $\overline{A}$ è un insieme chiuso ed è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

DEFINIZIONE 6.41 (Frontiera). La *frontiera di* $A \subset X$ è l'insieme

$$\partial A = \big\{x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0\big\}.$$

Equivalentemente, $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

Si può controllare che $\overline{A} = A \cup \partial A = \text{int}(A) \cup \partial A$ e l'ultima unione è disgiunta. Talvolta si definisce anche l'*esterno di* $A \subset X$ come l'insieme

$$\text{ext}(A) = \big\{x \in X : \text{esiste } r > 0 \text{ tale che } B_r(x) \subset X \setminus A\big\} = \text{int}(X \setminus A).$$

In questo modo, per ogni $A \subset X$ si ha l'unione disgiunta

$$X = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{ext}(A).$$

In questo senso si dice che la famiglia di insiemi $\{\text{int}(A), \partial A, \text{ext}(A)\}$ forma una partizione di X.

ESEMPIO 6.42 (Topologia della retta reale). Sia $X = \mathbb{R}$ munito della distanza standard.

1) Gli intervalli $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty \le a, b \le \infty$ sono aperti. Ad esempio, nel caso $-\infty < a < b < \infty$ si ha
$$(a, b) = B_r(x_0), \quad x_0 = \frac{a+b}{2},\ r = \frac{b-a}{2}.$$
Inoltre si ha $\partial A = \{a, b\}$ in quanto
$$B_r(a) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B_r(a) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0,$$
e analogamente nel punto b. Di conseguenza, risulta $\overline{A} = A \cup \partial A = [a, b]$.
2) Dal punto precedente segue che l'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ è chiuso (in quanto è la chiusura di un insieme). Alternativamente, è facile verificare che l'insieme
$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$
è aperto.
3) Gli intervalli della forma $A = [a, b)$ con $-\infty < a < b < \infty$ non sono nè aperti nè chiusi. Infatti si ha
$$\mathrm{int}(A) = (a, b) \neq A \text{ e } \overline{A} = [a, b] \neq A.$$
La stessa cosa vale per intervalli della forma $(a, b]$.
4) Intervalli illimitati della forma $(-\infty, a)$ con $a \le \infty$ sono aperti. Intervalli illimitati della forma $(-\infty, a]$ con $a < \infty$ sono invece chiusi.

Esempio 6.43. In $\mathbb{R}^2$ con la distanza Euclidea consideriamo il cerchio aperto $A = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\big\}$. Allora:
i) $A = A^\circ$, infatti A è aperto.
ii) La chiusura di A è il cerchio chiuso $\overline{A} = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\big\}$.
iii) La frontiera di A è la circonferenza-bordo $\partial A = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\big\}$.

Definizione 6.44 (Topologia di uno spazio metrico). Sia (X, d) uno spazio metrico. La famiglia di insiemi $\tau(X) \subset \mathcal{P}(X)$
$$\tau(X) = \big\{A \subset X : A \text{ è aperto in } X\big\}$$
si dice *topologia* di X.

Teorema 6.45. La topologia di uno spazio metrico X verifica le seguenti proprietà:
(A1) $\emptyset, X \in \tau(X)$;
(A2) Se $A_1, \dots, A_n \in \tau(X)$, $n \in \mathbb{N}$, allora $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \tau(X)$;
(A3) Per ogni famiglia di indici $\mathcal{A}$ risulta
$$A_\alpha \in \tau(X) \text{ per ogni } \alpha \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \in \tau(X).$$

Dim. Abbiamo già discusso la proprietà (A1). Proviamo (A2). Se $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$ allora esistono $r_1, \dots, r_n > 0$ tali che $B_{r_i}(x) \subset A_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Posto $r = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$, si ha allora
$$B_r(x) \subset A_1 \cap \ldots \cap A_n.$$

Anche la verifica di (A3) è elementare. Se infatti $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$ allora esiste $\beta \in \mathcal{A}$ tale che $x \in A_\beta$ e quindi esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(x) \subset A_\beta \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha.$$

$\square$

Esempio 6.46. La proprietà (A2) non si estende ad intersezioni *numerabili* di aperti. Sia $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la distanza standard. Gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\} = B_r(0)$$

sono aperti per ogni $r > 0$. L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ non è invece aperto, infatti i punti $x \in A$ tali che $|x| = 1$ verificano

$$B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \text{ per ogni } r > 0.$$

Ad esempio, il punto $(1 + r/2)x$ appartiene all'intersezione. In effetti $A = \overline{A}$ è un insieme chiuso.

D'altra parte A è un'intersezione numerabile di aperti:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 + \frac{1}{k}\Big\}.$$

In modo duale, la famiglia dei chiusi di uno spazio metrico verifica le proprietà descritte nel seguente teorema:

Teorema 6.47. Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora:
(C1) $\emptyset, X$ sono chiusi;
(C2) Se $C_1, \dots, C_n$, $n \in \mathbb{N}$, sono insiemi chiusi di X allora $C_1 \cup \ldots \cup C_n$ è un insieme chiuso di X;
(C3) Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di indici. Se C_α è un insieme chiuso di X per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$ allora $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} C_\alpha$ è chiuso in X.

La prova del teorema si ottiene passando ai complementari nel teorema sugli aperti. In generale, l'unione numerabile di chiusi non è un insieme chiuso.

Le proprietà (A1),(A2) e (A3) possono essere utilizzate per definire in modo assiomatico uno spazio topologico.

Definizione 6.48. Uno spazio topologico è una coppia $(X, \tau(X))$ dove X è un insieme e $\tau(X) \subset \mathcal{P}(X)$ è una famiglia di sottoinsiemi (detti aperti) che verifica le proprietà (A1), (A2) e (A3) del Teorema 6.45.

Tutti gli spazi metrici sono dunque spazi topologici. Esistono spazi topologici $(X, \tau(X))$ la cui topologia $\tau(X)$ non è indotta da alcuna metrica su X.

8. Caratterizzazione topologica della continuità

Concludiamo questo capitolo con un teorema importante: la caratterizzazione topologica della continuità.

Teorema 6.49 (Caratterizzazione topologica della continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) f è continua da X in Y;
2) $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X per ogni aperto $A \subset Y$;
3) $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso in X per ogni chiuso $C \subset Y$.

Dim. Nella dimostrazione useremo le seguenti relazioni insiemistiche, per una funzione $f : X \to Y$:

i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ per ogni insieme $A \subset X$;
ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ per ogni insieme $B \subset Y$;
iii) $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ per ogni $B \subset Y$.

Proviamo l'implicazione 1)⇒2). Verifichiamo che ogni punto $x_0 \in f^{-1}(A)$ è un punto interno di $f^{-1}(A)$. Siccome A è aperto e $f(x_0) \in A$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A$. Per la continuità di f esiste $\delta > 0$ tale che $d_X(x, x_0) < \delta$ implica $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. In altre parole, si ha $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. Ma allora si conclude che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(f(B_X(x_0, \delta)) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(A).$$

Abbiamo usato i).

Proviamo l'implicazione 2)⇒1). Controlliamo che f è continua in un generico punto $x_0 \in X$. Fissato $\varepsilon > 0$, l'insieme $B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ è aperto e quindi l'antimmagine $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ è aperta. Siccome $x_0 \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)),$$

da cui, passando alle immagini, segue che

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon).$$

Abbiamo usato ii). La catena di inclusioni provata mostra che se $d_X(x, x_0) < \delta$ allora $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, che è la continuità di f in x_0.

Verifichiamo ad esempio 2)⇒3). Sia $C \subset Y$ chiuso. Allora $A = Y \setminus C$ è aperto e quindi $f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ è aperto. Ovvero, $f^{-1}(C)$ è chiuso. □

È facile ora provare che la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua.

Teorema 6.50. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) spazi metrici e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funzioni continue. Allora la composizione $g \circ f : X \to Z$ è continua.

Dim. Usiamo la caratterizzazione 2) di continuità del teorema precedente. Se $A \subset Z$ è un aperto allora $g^{-1}(A) \subset Y$ è un aperto, e dunque $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \subset X$ è un aperto. □

CAPITOLO 7

Spazi metrici completi, compatti e connessi

1. Spazi metrici completi

In questa sezione proveremo che ogni spazio metrico ammette un'estensione che lo rende completo.

DEFINIZIONE 7.1. Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio metrico (X,d) si dice di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ per ogni } n, m \geq \bar{n}.$$

Uno spazio metrico (X,d) si dice completo se ogni successione di Cauchy in X è convergente.

Sappiamo che $\mathbb{R}$ è completo con la metrica standard. Da questo fatto segue che $\mathbb{R}^k$ è completo rispetto alla distanza Euclidea, per ogni $k \geq 1$.

ESEMPIO 7.2. Lo spazio k-dimensionale $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, con la distanza standard è completo. Infatti, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^k$, allora indicando con x_n^i la coordinata i-esima di x_n, $i = 1, \ldots, k$, la successione $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori reali è di Cauchy in $\mathbb{R}$ e dunque converge $x_n^i \to x^i \in \mathbb{R}$. Posto $x = (x^1, \ldots, x^k) \in \mathbb{R}^k$, da questo segue che $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^k$:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^k (x_n^i - x^i)^2 \Big)^{1/2} = 0.$$

$\square$

Anche gli spazi metrici discreti (ovvero un insieme con la distanza discreta) sono completi, in quanto le successioni di Cauchy sono definitivamente costanti.

Vogliamo introdurre ora la definizione di *completamento* di uno spazio metrico. Ci occorre la nozione di isometria.

DEFINIZIONE 7.3 (Isometria). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice isometria se $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ per ogni $x, x' \in X$. Due spazi metrici X e Y si dicono isometrici se esiste un'isometria $f : X \to Y$ suriettiva.

Osserviamo che un'isometria $f : X \to Y$ è iniettiva e continua. Inoltre, la funzione inversa $f^{-1} : f(X) \to X$ è ancora un'isometria, con la distanza su $f(X)$ ereditata da Y.

DEFINIZIONE 7.4 (Completamento). Sia (X, d_X) uno spazio metrico. Uno spazio metrico (Y, d_Y) si dice *completamento di* (X, d_X) se:

i) Y è completo.

ii) Esiste un'isometria $f : X \to Y$ tale che $\overline{f(X)} = Y$ (con chiusura in Y), ovvero se $f(X)$ è un insieme denso in Y.

Esempio 7.5. Siano $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ muniti della distanza standard. L'identità $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ è un'isometria. Inoltre $\overline{f(\mathbb{Q})} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, in quanto i razionali sono densi nei reali. Dunque $\mathbb{R}$ è un (il) completamento di $\mathbb{Q}$.

Esempio 7.6. Consideriamo su $\mathbb{R}$ la funzione distanza $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

La funzione d è una distanza. Infatti: i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$, essendo la funzione arcotangente iniettiva. ii) $d(x, y) = d(y, x)$; iii) Vale la disuguaglianza triangolare. Questo segue dalla subadittività del valore assoluto.

Dunque, $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico. Lasciamo al lettore l'esercizio di verificare che la topologia di questo spazio metrico coincide con la topologia standard di $\mathbb{R}$.

Proviamo che $(\mathbb{R}, d)$ non è uno spazio metrico completo. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = n$. Questa successione è di Cauchy. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che si ha

$$d(a_n, a_m) = |\arctan(n) - \arctan(m)| \leq |\arctan(n) - \pi/2| + |\pi/2 - \arctan(m)| \leq \varepsilon,$$

per $n, m \geq \bar{n}$. Tuttavia, la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge ad alcune elemento di $\mathbb{R}$. Se infatti esistesse $a \in \mathbb{R}$ tale che $d(a_n, a) \to 0$ per $n \to \infty$ allora si avrebbe l'assurdo seguente:

$$0 = \lim_{n\to\infty} |\arctan(n) - \arctan(a)| = |\pi/2 - \arctan(a)| \neq 0.$$

Discorso analogo vale per la successione $b_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

Costruiamo un completamento di $(\mathbb{R}, d)$. Sia $Y = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ e definiamo

$$d_Y(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|, \quad x, y \in Y,$$

con la convenzione che $\arctan(\infty) = \pi/2$ e $\arctan(-\infty) = -\pi/2$. Chiaramente (Y, d_Y) è uno spazio metrico. Proviamo che è completo. Se $(a_n)_{n\in}$ è una successione di Cauchy in Y, allora la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \arctan(a_n)$ è una successione di Cauchy in $K = [-\pi/2, \pi/2]$ con la distanza standard, che quindi converge ad un elemento $b \in K$, essendo K chiuso. Siccome $\arctan : Y \to K$ è iniettiva e suriettiva, esiste $a \in Y$ tale che $\arctan(a) = b$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge allora ad $a \in Y$ nella distanza d_Y.

La funzione $f : \mathbb{R} \to Y$, $f(x) = x$ è un isometria e inoltre $\overline{f(\mathbb{R})} = Y$. Questo conclude la dimostrazione che (Y, d_Y) è un (il) completamento di $(\mathbb{R}, d)$. Si osservi che (Y, d_K) è isometrico a K con la distanza standard.

L'esempio precedente mostra che la completezza non è una proprietà topologica, ma metrica.

Teorema 7.7. Ogni spazio metrico ha un completamento. Inoltre, due diversi completamenti sono fra loro isometrici.

Dim. Sia (X, d_X) lo spazio metrico che si vuole completare. Alcuni dettagli della dimostrazione saranno omessi. Lo schema generale è il seguente:

(1) Costruzione dell'insieme Y.
(2) Definizione di d_Y e prova che si tratta di una distanza.

(3) Definizione dell'isometria $f : X \to Y$ e prova che $\overline{f(X)} = Y$ (densità).
(4) Verifica che (Y, d_Y) è uno spazio metrico completo.
(5) Prova dell'unicità del completamento.

(1) Sia $\mathcal{A} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $X\}$. Introduciamo su $\mathcal{A}$ la relazione

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ se e solo se } \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n) = 0.$$

Tale relazione è un'equivalenza su $\mathcal{A}$ (verifica facile). Definiamo il quoziente

$$Y = \mathcal{A}_{/\sim} = \big\{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}\big\}.$$

Nel seguito indichiamo con $\bar{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ le classi di equivalenza.

(2) Definiamo la funzione $d_Y : Y \times Y \to [0, \infty)$

$$d_Y(\bar{x}, \bar{x}') = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n).$$

Affermiamo che:

i) Il limite esiste.
ii) La definizione non dipende dal rappresentante della classe di equivalenza (prova omessa).
iii) d_Y verifica le proprietà della distanza (verifica facile).

Proviamo i). In questo punto cruciale si usa la completezza di $\mathbb{R}$. È sufficiente verificare che la successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = d_X(x_n, x'_n)$ sia di Cauchy. Infatti:

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\le |d_X(x_n, x'_n) - d_X(x_m, x'_n)| + |d_X(x_m, x'_n) - d_X(x_m, x'_m)| \\ &\le d_X(x_n, x_m) + d_X(x'_n, x'_m) \le \varepsilon\end{aligned}$$

per $m, n \ge \bar{n}$. Abbiamo usato la disuguaglianza triangolare varie volte.

(3) Definiamo la funzione $f : X \to Y$ ponendo $f(x) =$ "successione costante identicamente uguale ad x". Proviamo che $\overline{f(X)} = Y$. Siano $\bar{y} \in Y$ ed $\varepsilon > 0$. Siccome la successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy:

$$d_X(y_m, y_n) < \varepsilon \text{ per } m, n \ge \bar{n},$$

e dunque

$$d_Y(f(y_{\bar{n}}), \bar{y}) = \lim_{n\to\infty} d_X(y_{\bar{n}}, y_n) \le \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Questo prova che $B_Y(\bar{y}, 2\varepsilon) \cap f(X) \neq \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$.

(4) Proviamo ora che (Y, d_Y) è completo. Sia $(\bar{y}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in Y:

$$\lim_{n\to\infty} d_X(y^k_n, y^h_n) = d_Y(\bar{y}^k, \bar{y}^h) < \varepsilon \text{ per } h, k \ge \bar{k},$$

e dunque, definitivamente in n si ha

$$d_X(y^k_n, y^h_n) < \varepsilon \text{ per } h, k \ge \bar{k}.$$

Questa è l'informazione che abbiamo.

Dal punto (3) segue che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $y^k \in X$ tale che $d_Y(f(y^k), \bar{y}^k) < 1/k$, ovvero definitivamente in n si ha

$$d_X(y^k, y^k_n) < 1/k.$$

Formiamo la successione $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ e proviamo che è di Cauchy in X:

$$d_X(y^k, y^h) \le d_X(y^k, y^k_n)+d_X(y^k_n, y^h_n)+d_X(y^h_n, y^h) < \frac{1}{k}+\varepsilon+\frac{1}{h} < 3\varepsilon \text{ per } h, k \ge \bar{k} \text{ (opportuno)}.$$

Sopra abbiamo fatto una scelta opportuna di n. Dunque $\bar{y} = [(y^k)_{k\in\mathbb{N}}] \in Y$. Ora proviamo che

$$\bar{y}^k \xrightarrow[k\to\infty]{(Y,d_Y)} \bar{y}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora, definitivamente in n si ha

$$d_X(y^k_n, y^n) \le d_X(y^k_n, y^k) + d_X(y^k, y^n) < \frac{1}{k} + \varepsilon < 2\varepsilon \text{ per } k \ge \bar{k}.$$

Questo prova che $d_Y(\bar{y}^k, \bar{y}) \le 2\varepsilon$ per $k \ge \bar{k}$.

(5) Rimane da provare l'unicità. Siano $f : X \to Y$ e $g : X \to Z$ isometrie tali che $\overline{f(X)} = Y$ e $\overline{g(X)} = Z$, con chiusura nelle topologie di Y e Z, rispettivamente. La funzione $h : g(X) \to f(X)$, $h = f \circ g^{-1}$ è un'isometria da $(g(X), d_Z)$ a $(f(X), d_Y)$ in quanto f e g sono isometrie. Estendiamo h ad una funzione da Z in Y nel seguente modo. Dato $z \in Z$, per la densità esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X tale che $g(x_n) \to z$ in Z per $n \to \infty$. La successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in Y, in quanto si ottiene dalla successione di Cauchy $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mediante h, e dunque converge ad un elemento $y \in Y$. Poniamo allora $h(z) = y$. Con un argomento analogo si prova che h è suriettiva su Y. La funzione h così definita è un isometria su tutto Z:

$$d_Y(h(z), h(z')) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d_Y(f(x_n), f(x'_m)) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} d_Z(g(x_n), g(x'_m)) = d_Z(z, z').$$

Abbiamo usato la continuità della funzione distanza e il fatto che h è un'isometria su $g(X)$. □

2. Compattezza sequenziale e compattezza sono equivalenti

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 7.8 (Insiemi sequenzialmente compatti). Un sottoinsieme $K \subset X$ si dice *sequenzialmente compatto* se ogni successione di punti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K ha una sottosuccessione che converge ad un elemento di K.

Gli insiemi sequenzialmente compatti sono chiusi e limitati. Ricordiamo che un insieme $K \subset X$ si dice *limitato* se esistono $x_0 \in X$ ed $r > 0$ tali che $K \subset B_r(x_0)$ (equivalentemente: per ogni $x_0 \in X$ esiste $r > 0$ tale che $K \subset B_r(x_0)$).

Proposizione 7.9. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme sequenzialmente compatto. Allora K è chiuso e limitato.

Dim. Proviamo che $K = \overline{K}$. Per ogni $x \in \overline{K}$ esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K che converge ad x. Questa successione ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ che converge ad un elemento di K. Ma questo elemento deve essere x, che quindi appartiene a K.

Supponiamo per assurdo che K non sia limitato. Allora esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $K \cap (X \setminus B_r(x_0)) \ne \emptyset$ per ogni $r > 0$. In particolare, con la scelta $r = n \in \mathbb{N}$ esistono punti $x_n \in K$ tali che $d(x_n, x_0) \ge n$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è in K. Quindi esiste una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente ad un elemento $x \in K$. Ma allora

$$d(x, x_0) \ge d(x_0, x_{n_j}) - d(x_{n_j}, x) \ge n_j - d(x_{n_j}, x) \to \infty$$

per $j \to \infty$. Questo è assurdo perchè $d(x, x_0) < \infty$. $\square$

ESEMPIO 7.10. Sia $X = \mathbb{R}$ con la distanza standard e sia $K \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto. Se K è limitato, allora dal Teorema di Bolzano-Weierstrass segue che ogni successione in K ha una sottosuccessione convergente. Se K è anche chiuso, allora il limite di questa successione è un elemento di K.

Dunque, un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato è sequenzialmente compatto. Il viceversa vale per la proposizione precedente.

TEOREMA 7.11 (Heine-Borel). Sia $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, munito della distanza standard e sia $K \subset \mathbb{R}^m$ un insieme. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) K è sequenzialmente compatto;
B) K è chiuso e limitato.

DIM. Proviamo l'affermazione B)$\Rightarrow$A). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti in K. Scriviamo le coordinate $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m)$. La successione reale $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e dunque ha una sottosuccesione $(x_{n_j}^1)_{j\in\mathbb{N}}$ convergente ad un numero $x^1 \in \mathbb{R}$. La successione $(x_{n_j}^2)_{j\in\mathbb{N}}$ è limitata e quindi ha una sottosuccessione convergente ad un numero $x^2 \in \mathbb{R}$. Si ripete tale procedimento di sottoselezione m volte. Dopo m sottoselezioni successive si trova una selezione crescente di indici $j \mapsto k_j$ tale che ciascuna successione di coordinate $(x_{k_j}^i)_{j\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $x^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Ma allora $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$. Siccome K è chiuso, deve essere $x \in K$. $\square$

ESEMPIO 7.12. Sia $\ell^2(\mathbb{R})$ con la distanza data dalla norma naturale introdotta nell'Esempio 6.7. Consideriamo l'insieme

$$K = \big\{ \mathrm{x} \in \ell^2(\mathbb{R}) : \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})} \leq 1 \big\}.$$

L'insieme K è chiaramente limitato. Inoltre è chiuso, in quanto è l'anti-immagine del chiuso $(-\infty, 1] \subset \mathbb{R}$ rispetto alla funzione continua $f : \ell^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|\mathrm{x}\|_{\ell^2(\mathbb{R})}$.

Mostriamo che K non è sequenzialmente compatto. Indichiamo con $\mathrm{e}_n \in \ell^2(\mathbb{R})$ la successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $a_k = 1$ se $k = n$ e $a_k = 0$ se $k \neq n$. La successione $(\mathrm{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è in K ma non può avere alcuna sottosuccessione convergente, in quanto per $m \neq n$ si ha

$$\|\mathrm{e}_n - \mathrm{e}_m\|_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2}.$$

Una sottosuccessione convergente dovrebbe essere di Cauchy, e questo non è possibile.

La definizione di insieme compatto è puramente topologica (basta poter parlare di insiemi aperti).

DEFINIZIONE 7.13 (Ricoprimento e sottoricoprimento). Una famiglia di insiemi $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, con $A_\alpha \subset X$, si dice un *ricoprimento* di un insieme $K \subset X$ se

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha.$$

Il ricoprimento si dice *aperto* se A_α è un insieme aperto per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$.

Sia ora $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. La famiglia di insiemi $\{A_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ si dice un *sottoricoprimento* del ricoprimento $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ se risulta ancora

$$K \subset \bigcup_{\beta\in\mathcal{B}} A_\beta.$$

Il sottoricoprimento si dice *finito* se $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) < \infty$.

DEFINIZIONE 7.14 (Insieme compatto). Un sottoinsieme $K \subset X$ si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di K possiede un sottoricoprimento finito.

ESEMPIO 7.15. Sia $X = \mathbb{R}$ con la distanza standard. L'intervallo aperto $A = (0,1)$ non è compatto. Infatti la famiglia di insiemi $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $A_n = (1/n, 1)$ forma un ricoprimento di A in quanto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/n, 1).$$

Da tale ricoprimento, tuttavia, non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento *finito*. Chiaramente, l'insieme A non è sequenzialmente compatto, in quanto non è chiuso.

Sia ora $B = [0,\infty)$. Questo intervallo è chiuso, ma non è compatto. Infatti, la famiglia di insiemi $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $B_n = (-1, n)$ forma un ricoprimento di B in quanto

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-1, n).$$

Da tale ricoprimento, tuttavia, non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento *finito*. Chiaramente, l'insieme B non è sequenzialmente compatto, in quanto non è limitato.

Negli spazi metrici, le nozioni di compattezza e di compattezza sequenziale coincidono.

TEOREMA 7.16. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

A) K è sequenzialmente compatto.
B) K è compatto.

Una versione più dettagliata di questo teorema sarà data nella Sezione 4, Teorema 7.26.

DEFINIZIONE 7.17 (Spazio separabile). Uno spazio metrico (X, d) si dice *separabile* se esiste un sottoinsieme $X_0 \subset X$ tale che $\overline{X_0} = X$ e X_0 è (al più) numerabile.

PROPOSIZIONE 7.18. Gli spazi metrici compatti sono separabili.

DIM. Diamo lo schema della dimostrazione. Fissato $r > 0$, la famiglia di palle (aperte) $\{B_r(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X che dunque ha un sottoricoprimento finito.

Dunque, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme finito di punti $x_1^k, \dots, x_{n_k}^k \in X$, $n_k \in \mathbb{N}$, tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_k} B_{1/k}(x_i^k).$$

L'insieme di tutti i centri

$$X_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{x_i^k\}$$

è al più numerabile ed è denso in X. □

3. Continuità e compattezza

Proviamo che le immagini continue di insiemi compatti sono insiemi compatti.

Teorema 7.19. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Se X è compatto allora $f(X) \subset Y$ è compatto in Y.

Dim. Sia $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Precisamente, gli insiemi $A_\alpha \subset Y$ sono aperti e

$$f(X) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha.$$

Passando alle anti-immagini si ha

$$X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} f^{-1}(A_\alpha).$$

L'inclusione centrale è in effetti un'uguaglianza di insiemi. Gli insiemi $f^{-1}(A_\alpha) \subset X$ sono aperti, in quanto f è continua. Siccome X è compatto esiste $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ con $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) < \infty$ tale che

$$X = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} f^{-1}(A_\beta).$$

Passando ora alle immagini si ottiene

$$f(X) = f\Big(\bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} f^{-1}(A_\beta)\Big) = \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} f(f^{-1}(A_\beta)) \subset \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} A_\beta.$$

Dunque, ogni ricoprimento aperto di $f(X)$ ha un sottoricoprimento finito. Questo termina la dimostrazione.

Alternativamente, si può provare che $f(X) \subset Y$ è sequenzialmente compatto. Sia $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $f(X)$. Esistono punti $x_n \in X$ tali che $f(x_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$. La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ che converge ad un punto $x_0 \in X$. Siccome f è continua si ha

$$\lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = f(x_0).$$

In altri termini, $y_{n_j} \to f(x_0) \in f(X)$ per $j \to \infty$. $\square$

Osservazione 7.20. Un insieme $K \subset \mathbb{R}$ compatto (e non vuoto) allora ammette massimo e minimo. La prova è contenuta nella dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 7.21 (Weierstrass). Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esistono $x_0, x_1 \in X$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x \in X} f(x) = \min\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X\},$$
$$f(x_1) = \max_{x \in X} f(x) = \max\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X\}.$$

Dim. Per il teorema precedente, l'insieme $f(X) \subset \mathbb{R}$ è compatto. Per il Teorema di Heine-Borel l'insieme $f(X)$ è pertanto chiuso e limitato. Essendo limitato, esistono finiti

$$-\infty < \inf_{x \in X} f(x) \le \sup_{x \in X} f(x) < \infty.$$

Essendo chiuso, l'insieme $f(X) \subset \mathbb{R}$ ha minimo e massimo, ovvero esistono $x_0, x_1 \in X$ tali che
$$f(x_0) = \min_{x\in X} f(x), \quad f(x_1) = \max_{x\in X} f(x).$$
□

Definizione 7.22 (Uniforme continuità). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $A \subset X$. Una funzione $f : A \to Y$ si dice *uniformemente continua su A* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, x_0 \in A$ vale l'implicazione
$$d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Osservazione 7.23 (Continuità e continuità uniforme). Confrontiamo la definizione di "continuità uniforme su A":
$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x, x_0 \in A : \quad d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$
con la definizione di "continuità in ogni punto $x_0 \in A$":
$$\forall x_0 \in A\, \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x \in A : \quad d_X(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$
In quest'ultima definizione, $\delta = \delta(x_0) > 0$ dipende dal punto $x_0 \in A$. Nella continuità uniforme su A, invece, δ non dipende da x_0.

Teorema 7.24 (Heine-Cantor). Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici e sia $f : X \to Y$ continua. Se X è compatto allora f è uniformemente continua su X.

Dim. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo il $\delta > 0$ che garantisca l'uniforme continuità. Siccome f è continua su X, per ogni $\bar{x} \in X$ esiste $\delta(\bar{x}) > 0$ tale che $d_X(x, \bar{x}) < \delta(\bar{x})$ implica $d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon/2$. Chiaramente si ha
$$X = \bigcup_{\bar{x}\in X} B_{\delta(\bar{x})/2}(\bar{x}),$$
e quindi per la compattezza esistono finiti punti $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che, posto $r_i = \delta(x_i)/2$, si ha
$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i).$$
Scegliamo $\delta = \min\{r_1, \dots, r_n\} > 0$. Siano ora $x, x_0 \in X$ tali che $d_X(x, x_0) < \delta$. Per la proprietà di ricoprimento, esiste $i = 1, \dots, n$ tale che $x_0 \in B_{r_i}(x_i)$. D'altra parte, si ha anche
$$d_X(x, x_i) \leq d_X(x, x_0) + d_X(x_0, x_i) < \delta + r_i \leq 2r_i = \delta(x_i).$$
In altri termini, $x, x_0 \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$ e quindi
$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Questo termina la dimostrazione.

Una dimostrazione alternativa si può ottenere lavorando con la compattezza sequenziale. Per assurdo si suppone che esistano $\varepsilon > 0$ e successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia
$$d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{ma} \quad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon > 0.$$

Si estraggono sottosuccessioni $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ che convergono in X a punti $x_0, y_0 \in X$, rispettivamente. Dalla disuguaglianza a sinistra si deduce che deve essere $x_0 = y_0$. Dalla continuità si trova

$$\lim_{j\to\infty} d_Y(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) = d_Y(f(x_0), f(x_0)) = 0,$$

e questo è in contraddizione con la disuguaglianza a destra. □

4. Caratterizzazione degli spazi metrici compatti

La nozione chiave nella caratterizzazione della compattezza è quella di "totale limitatezza".

Definizione 7.25 (Totale limitatezza). Uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* se per ogni $r > 0$ esistono $x_1, \dots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i)$.

Il seguente teorema caratterizza gli spazi metrici compatti.

Teorema 7.26. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) X è compatto.
ii) Ogni insieme $A \subset X$ con $\mathrm{Card}(A) = \infty$ ha un punto di accumulazione.
iii) X è sequenzialmente compatto.
iv) X è completo e totalmente limitato.

Dim. i) ⇒ ii). Sia X compatto e sia $A \subset X$ un sottoinsieme con cardinalità $\mathrm{Card}(A) = \infty$. Supponiamo per assurdo che A non abbia punti di accumulazione. Allora per ogni $x \in X$ esiste $r_x > 0$ tale che

$$B_{r_x}(x) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset.$$

Dal momento che $X = \displaystyle\bigcup_{x\in X} B_{r_x}(x)$ è un ricoprimento aperto, dalla compattezza di X segue che esistono finiti punti $x_1, \dots, x_n \in X$ tali che $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_{r_{x_i}}(x_i)$. Da ciò segue che

$$A = A \cap X = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_{r_{x_i}}(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\},$$

ed A è un insieme finito. Questo è assurdo.

ii) ⇒ iii). Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X. Se la cardinalità dell'insieme $A = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ è finita allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione costante. Se la cardinalità di A non è finita, allora esiste $x \in X$ punto di accumulazione di A. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_k} \in B_{1/k}(x)$. Inoltre, la scelta di n_k può essere fatta in modo tale da avere una selezione crescente di indici $k \mapsto n_k$. La sottosuccesione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge ad x.

iii) ⇒ iv). Proviamo che X è completo. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Per ipotesi esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge ad un punto $x \in X$. Ma allora, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\bar{n}, \bar{k} \in \mathbb{N}$ tali che

$$d(x, x_n) \le d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \le 2\varepsilon$$

non appena $k \ge \bar{k}$ e $n, n_k \ge \bar{n}$. Questo prova che $x_n \to x$ in X per $n \to \infty$.

Proviamo che X è totalmente limitato. Supponiamo per assurdo che esista $r > 0$ tale che non ci sia un ricoprimento finito di X con palle di raggio r.

Prendiamo $x_1 \in X$, $x_2 \in X \setminus B_r(x_1)$ e per induzione $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i)$. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica $d(x_n, x_m) \ge r$ per ogni $n \ne m$, e dunque non può avere sottosuccessioni convergenti.

iv) ⇒ i). Questa è la parte più significativa della dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che X non sia compatto. Allora c'è un ricoprimento aperto di X, sia esso $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, che non ha alcun sottoricoprimento finito.

Per la totale limitatezza, esistono palle $B^1_1, \dots, B^1_{n_1}$ di raggio 1 tali che $X = \bigcup_{i=1}^{n_1} B^1_i$. Senza perdere di generalità possiamo supporre qui e nel seguito che le palle siano chiuse. In particolare, esiste una palla $B^1_{i_1}$, $1 \le i_1 \le n_1$, che non è ricoperta da un numero finito di aperti A_α. L'insieme $B^1_{i_1}$ è totalmente limitato, e quindi esistono palle $B^2_1, \dots, B^2_{n_2}$ relative a $B^1_{i_1}$ di raggio $1/2$ tali che $B^1_{i_1} \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B^2_i$. Esiste un insieme $B^2_{i_2}$ che non può essere ricoperto da un numero finito di insiemi aperti A_α.

Ora procediamo per induzione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste una palla chiusa $B^k_{i_k}$ relativa a $B^{k-1}_{i_{k-1}}$, con raggio $1/k$ che non può essere ricoperta con un numero finito di insiemi aperti A_α.

Poichè X è completo, la successione decrescente di insiemi chiusi $(B^k_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ha intersezione non vuota. Dunque esiste $x \in \bigcap_{k=1}^\infty B^k_{i_k}$. D'altra parte, $x \in A_\alpha$ per qualche $\alpha \in \mathcal{A}$ ed esiste dunque $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A_\alpha$. Se ora $k \in \mathbb{N}$ è tale che $1/k < r/2$ allora $B^k_{i_k} \subset B_r(x) \subset A_\alpha$. Questa è una contraddizione, perchè $B^k_{i_k}$ non può essere ricoperto da un numero finito di insiemi A_α. □

5. Insiemi connessi

In questa sezione introduciamo la nozione di spazio metrico connesso e di insieme connesso in uno spazio metrico. Poi esaminiamo il legame fra connessione e continuità.

Definizione 7.27 (Spazio connesso). Uno spazio metrico (X, d) si dice connesso se: $X = A_1 \cup A_2$ con A_1, A_2 insiemi aperti tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ implica che $A_1 = \emptyset$ oppure $A_2 = \emptyset$.

Se X non è connesso allora esistono due insiemi aperti disgiunti e non-vuoti A_1 e A_2 tali che $X = A_1 \cup A_2$. Quindi $A_1 = X \setminus A_2$ e $A_2 = X \setminus A_1$ sono contemporaneamente aperti e chiusi. Se X è connesso $\emptyset$ e X sono gli unici insiemi ad essere sia aperti che chiusi (questa è una definizione equivalente di spazio metrico connesso).

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subset X$ un suo sottoinsieme. Allora (Y, d) è ancora uno spazio metrico che avrà la sua topologia $\tau(Y)$, che si dice *topologia indotta* da X su Y o *topologia relativa*.

Esercizio 7.28. Sia $Y \subset X$ con la topologia relativa. Provare che un insieme $A \subset Y$ è aperto in Y se e solo se esiste un insieme $B \subset X$ aperto in X tale che $A = Y \cap B$.

Esempio 7.29. Sia $X = \mathbb{R}$ e $Y = [0,1]$. L'insieme $[0,1/2) \subset [0,1]$ è relativamente aperto in $[0,1]$ in quanto $[0,1/2) = [0,1] \cap (-\infty, 1/2)$.

Definizione 7.30. Sia (X,d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $Y \subset X$ si dice *connesso* se è connesso rispetto alla topologia indotta. Precisamente, Y è connesso se: $Y = (Y \cap A_1) \cup (Y \cap A_2)$ con A_1, A_2 aperti di X e unione disgiunta implica che $Y \cap A_1 = \emptyset$ oppure $Y \cap A_2 = \emptyset$.

Ricordiamo che un insieme $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se $x, y \in I$ e $x < z < y$ implicano che anche $z \in I$.

Teorema 7.31. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard e sia $I \subset \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

A) I è connesso.
B) I è un intervallo.

Dim. A)$\Rightarrow$B). Se per assurdo I non è un intervallo allora esistono punti $x < z < y$ tali che $x, y \in I$ ma $z \notin I$. Allora si ha

$$I = \big(I \cap (-\infty, z)\big) \cup \big(I \cap (z, \infty)\big)$$

con unione disgiunta e $I \cap (-\infty, z) \neq \emptyset$, $I \cap (z, \infty) \neq \emptyset$ aperti relativi non vuoti.

B)$\Rightarrow$A). Proveremo, ad esempio, che l'intervallo $I = [0,1]$ è connesso. Sia

$$I = \big(I \cap A_1\big) \cup \big(I \cap A_2\big)$$

con unione disgiunta e $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$ aperti di $\mathbb{R}$. Siccome $0 \in I = [0,1]$ avremo ad esempio $0 \in A_1$. Nostro obiettivo è di provare che $I \cap A_2 = \emptyset$.

Definiamo il numero

$$\bar{x} = \sup\big\{x \in [0,1] : [0,x) \subset I \cap A_1\big\} \in \mathbb{R},$$

che esiste finito per l'Assioma di Completezza.

Deve essere $\bar{x} \leq 1$ ed inoltre $\bar{x} > 0$, perchè, essendo A_1 aperto esiste $\delta > 0$ tale che $[0,\delta) \subset A_1$. Proviamo che $\bar{x} \notin A_2$. Se fosse $\bar{x} \in A_2$ allora, essendo A_2 aperto, esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che $0 \leq \bar{x} - \varepsilon \in I \cap A_2$. Dalla definizione di $\bar{x}$ si ha anche $\bar{x} - \varepsilon \in A_1$ e quindi $I \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Questo non è possibile perchè l'unione è disgiunta. Quindi deve essere $\bar{x} \in I \cap A_1$.

Se, poi, fosse $\bar{x} < 1$ allora esisterebbe $\delta > 0$ tale che $[\bar{x}, \bar{x} + \delta) \subset A_1$. Questo contraddice la definizione di $\bar{x}$. Quindi $\bar{x} = 1$ e dunque $I \subset A_1$. Da questo si deduce che $I \cap A_2 = \emptyset$. Altrimenti si avrebbe $(I \cap A_1) \cap (I \cap A_2) \neq \emptyset$. □

Esempio 7.32. Riportiamo senza prove alcuni fatti elementari:

1) $\mathbb{R}^n$ è connesso per ogni $n \geq 1$.
2) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è connesso per $n \geq 2$ ma non è connesso per $n = 1$.
3) $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ non è connesso, $n \geq 1$.
4) $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ non è connesso, $n \geq 1$.

Il punto 1) seguirà dal fatto che $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

Ora mostriamo che l'immagine continua di connessi è connessa.

TEOREMA 7.33. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ continua. Se X è connesso allora $f(X) \subset Y$ è connesso.

DIM. Siano $A_1, A_2 \subset Y$ insiemi aperti tali che

$$f(X) = (f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)$$

con unione disgiunta. Allora

$$\begin{aligned} X = f^{-1}(f(X)) &= f^{-1}((f(X) \cap A_1) \cup (f(X) \cap A_2)) \\ &= f^{-1}(f(X) \cap A_1) \cup f^{-1}(f(X) \cap A_2)) \\ &= (X \cap f^{-1}(A_1)) \cup (X \cap f^{-1}(A_2)) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2). \end{aligned}$$

L'ultima unione è disgiunta e gli insiemi $f^{-1}(A_1)$, $f^{-1}(A_2)$ sono aperti perchè f è continua. Siccome X è connesso deve essere $f^{-1}(A_1) = \emptyset$ oppure $f^{-1}(A_2) = \emptyset$. Dunque, si ha $f(X) \cap A_1 = \emptyset$ oppure $f(X) \cap A_2 = \emptyset$. □

DEFINIZIONE 7.34 (Spazio connesso per archi). Uno spazio metrico (X, d) si dice *connesso per archi* se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste una curva continua $\gamma : [0, 1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

TEOREMA 7.35. Se uno spazio metrico (X, d) è connesso per archi allora è connesso.

DIM. Supponiamo per assurdo che X non sia connesso. Allora esistono due aperti A_1, A_2 disgiunti e non vuoti tali che $X = A_1 \cup A_2$. Siano $x \in A_1$ e $y \in A_2$, e sia $\gamma : [0, 1] \to X$ una curva continua tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Ma allora

$$[0, 1] = ([0, 1] \cap \gamma^{-1}(A_1)) \cup ([0, 1] \cap \gamma^{-1}(A_2))$$

con unione disgiunta e $\gamma^{-1}(A_1))$ e $\gamma^{-1}(A_2)$ aperti non vuoti relativi a $[0, 1]$. Questo è assurdo perchè $[0, 1]$ è connesso. □

ESERCIZIO 7.36. Si consideri il seguente sottoinsieme del piano:

$$A = \big\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\big\} \cup \big\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\big\}$$

con la topologia indotta dal piano. Provare che A è connesso ma non è connesso per archi.

TEOREMA 7.37 (Valori intermedi). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $y \in (\inf_A f, \sup_A f)$ esiste un punto $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

DIM. Infatti l'insieme $f(A) \subset \mathbb{R}$ è connesso e quindi è un intervallo e quindi $y \in (\inf_A f, \sup_A f)$ implica che $y \in f(A)$. □

TEOREMA 7.38 (degli zeri). Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, una funzione continua tale che $f(a) < 0$ ed $f(b) > 0$. Allora esiste $x \in (a, b)$ tale che $f(x) = 0$.

DIM. Segue dal Teorema dei valori intermedi osservando che $\inf_A f \leq f(a) < 0 < f(b) \leq \sup_A f$. □

Esercizio 7.39. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva. Provare che $f([0,1]) \subset \mathbb{R}$ è un intervallo compatto e che la funzione inversa $f^{-1} : f([0,1]) \to [0,1]$ è continua.

Teorema 7.40. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso (non vuoto). Allora A è connesso per archi.

Dim. Dimostreremo un'affermazione più precisa: A è connesso per curve poligonali. Sia $x_0 \in A$ un punto scelto a nostro piacere. Definiamo il seguente insieme

$$A_1 = \big\{x \in A : x \text{ si connette a } x_0 \text{ con una curva poligonale contenuta in } A\big\}.$$

Proviamo che A_1 è aperto. Infatti, se $x \in A_1 \subset A$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$, in quanto A è aperto. Ogni punto di $y \in B_\varepsilon(x)$ si collega al centro x con un segmento contenuto in A. Dunque y si collega a x_0 con una curva poligonale contenuta in A, ovvero $B_\varepsilon(x) \subset A_1$.

Sia $A_2 = A \setminus A_1$. Proviamo che anche A_2 è aperto. Se $x \in A_2 \subset A$ allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset A$. Affermiamo che $B_\varepsilon(x) \subset A_2$. Se così non fosse troveremmo $y \in B_\varepsilon(x) \cap A_1$. Il punto x_0 si collega a y con una curva poligonale in A ed y si collega ad x con un segmento contenuto in A. Quindi $x \in A_1$, che non è possibile. Questo argomento prova che A_2 è aperto. Allora abbiamo

$$X = A_1 \cup A_2$$

con A_1 e A_2 aperti ed unione disgiunta. Siccome X è connesso, uno degli aperti deve essere vuoto. Siccome $A_1 \neq \emptyset$ allora $A_2 = \emptyset$. Questo termina la dimostrazione. $\square$