# Analisi Matematica 1 - Parte A
# Quaderno degli esercizi settimanali

Roberto Monti

Matematica – Anno Accademico 2018-19

Versione del 25 gennaio 2019

# Indice

# Introduzione

In questo “Quaderno degli esercizi settimanali” sono raccolte dodici schede di esercizi, una per ogni settimana del corso di Analisi Matematica 1 parte A. L’ordine degli argomenti corrisponde all’ordine che sarà seguito nella presentazione degli argomenti, anche se probabilmente sarà difficile rispettare la corrispondenza settimana per settimana. Gli esercizi cercano di illustrare in modo pratico e creativo tutti gli aspetti (definizioni, teoremi, criteri, tecniche) studiati nel corso.

In ogni scheda gli esercizi sono divisi in tre gruppi: gli esercizi di base, per la cui soluzione è richiesta la sola comprensione e diretta applicazione di definizioni o teoremi; gli esercizi di livello intermedio, dove è richiesto allo studente un maggiore grado di autonomia; gli esercizi più avanzati, che sono di complessità maggiore. Ovviamente il grado di difficoltà di un esercizio ha una componente soggettiva.

Di nessun esercizio è riportata la risoluzione, ma di alcuni si trova la soluzione online nei link sui temi d’esame degli anni scorsi. Lo svolgimento di alcuni degli esercizi proposti sarà presentato in classe, anche su richiesta o suggerimento degli studenti.

Gli esercizi di questo Quaderno fanno parte integrante del programma del corso di Analisi Matematica 1 parte A.

SETTIMANA 1

# Insiemi, cardinalità, induzione, Binomio di Newton

## Esercizi di base

ESERCIZIO 1.1. Siano $A, B, C$ tre sottoinsiemi di uno stesso insieme ambiente. Verificare le formule distributive:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

ESERCIZIO 1.2. Dati due insiemi $A$ e $B$, verificare che $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(B \times A)$.

ESERCIZIO 1.3. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni iniettive. Provare che $g \circ f : A \to C$ è iniettiva. È vero il viceversa, e cioè che se $g \circ f$ è iniettiva allora sia $f$ che $g$ devono essere iniettive?

ESERCIZIO 1.4. Siano $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Verificare l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

## Esercizi intermedi

ESERCIZIO 1.5. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $0 < x < 1$. Usando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale la seguente variante della disuguaglianza di Bernoulli

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

ESERCIZIO 1.6. Sia $f : A \to B$ una funzione.

1) Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha $C \subset f^{-1}(f(C))$. Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui $f$ sia iniettiva.
2) Provare che per ogni insieme $D \subset B$ si ha $f(f^{-1}(D)) \subset D$. Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui $f$ sia suriettiva.

ESERCIZIO 1.7. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di $f$, ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui $f$ è definita. Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
2) Stabilire se $f$ è iniettiva. Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

ESERCIZIO 1.8. Siano $A, B, C$ insiemi finiti e indichiamo con $|A| = \mathrm{Card}(A)$ la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Provare preliminarmente che $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

ESERCIZIO 1.9. Dimostrare che per $n \geq 1$ si ha:

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1}-1), \qquad 2) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

ESERCIZIO 1.10. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Calcolare il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x+a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x+b)^m$. Precisamente, calcolare i polinomi $s(x)$ (il quoziente della divisione) ed $r(x)$ (il resto della divisione) tali che $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, dove il grado di $r$ è al più $m-1$.

**Esercizi avanzati**

ESERCIZIO 1.11. Siano $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ e $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Esibendo biiezioni concrete, provare che:
1) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}([0,1))$;
2) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}((0,1))$;
3) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 1.12. Sia $\mathcal{A} = \big\{I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervallo}\big\}$ un insieme costituito da intervalli non degeneri $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$. Supponiamo che $\mathcal{A}$ verifichi questa proprietà: $I, J \in \mathcal{A}$ con $I \cap J \neq \emptyset$ implica $I = J$ (ovvero, gli intervalli sono a coppie disgiunti). Dimostrare che $\mathcal{A}$ è numerabile.

ESERCIZIO 1.13. Ad un torneo partecipano $n \in \mathbb{N}$ squadre, $n \geq 3$. Ogni squadra gioca una volta con ogni altra squadra. Ci sono tre squadre $A, B, C$ tali che $A$ sconfigge $B$, $B$ sconfigge $C$ e $C$ sconfigge $A$. Dimostrare che alla fine del torneo ci sono almeno due squadre a pari punti.

SETTIMANA 2

# Numeri reali, sup e inf, parte intera

### Esercizi di base

ESERCIZIO 2.1. Sia $X$ un insieme. Verificare che $(\mathcal{P}(X), \subset)$ è un insieme parzialmente ordinato.

ESERCIZIO 2.2. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme e $-A = \{-x \in \mathbb{R} : x \in A\}$ l'insieme opposto. Verificare che

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

ESERCIZIO 2.3. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato. Verificare che

$$\sup A - \inf A = \sup\{x - y \in \mathbb{R} \,:\, x, y \in A\}.$$

### Esercizi intermedi

ESERCIZIO 2.4. Sia $(X, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato. Usando ad ogni passo gli assiomi di campo ordinato verificare che $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in X$.

ESERCIZIO 2.5. Siano dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{\frac{1+2n^2}{1+n^2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{\frac{xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0\right\},$$

$$C = \left\{x^2 - 2x \sin x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\right\}, \quad D = \left\{\frac{n^2 \cos(1/n)}{1-n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 2\right\}.$$

1) Determinare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.
2) Determinare $\inf B$ e verificare che $\sup B = 1/2$. Dire se esistono $\min B$ e $\max B$.
3) Verificare che $\sup C = \infty$.
4) Verificare che $\inf D = -\infty$.

ESERCIZIO 2.6. Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Provare che se $\sqrt{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ allora anche $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

ESERCIZIO 2.7. Si consideri l'insieme

$$A = \left\{\frac{n+1-n2^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

dove $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Calcolare $\sup A$, $\inf A$, e dire se esistono $\max A$ e $\min A$.

ESERCIZIO 2.8. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \left\{n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1\right\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.

2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

Esercizio 2.9. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ non negativi. Verificare che

$$[x] + [y] \le [x+y] \le [x] + [y] + 1,$$
$$[x][y] \le [xy] \le [x] + [y] + [x][y],$$

dove $[x]$ è la parte intera di $x$.

**Esercizi avanzati**

Esercizio 2.10 (Disuguaglianza Media Geometrica-Aritmetica). Siano $x_1, \dots, x_n \ge 0$ numeri reali. Provare che

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

e dimostrare che si ha uguaglianza se e solo se i numeri sono tutti uguali fra loro.

Esercizio 2.11. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, si ha:

$$[x] + [x + 1/n] + \ldots + [x + (n-1)/n] = [nx],$$

dove $[x]$ è la parte intera di $x$.

Esercizio 2.12. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una funzione iniettiva tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si abbia

$$|x - y| \le 10 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \le 10.$$

Determinare la funzione $f$.

SETTIMANA 3

# Spazi metrici, disuguaglianze, successioni numeriche

### Esercizi di base

Esercizio 3.1. In ciascuno dei seguenti casi, dire se la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una distanza su $\mathbb{R}$: 1) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$; 2) $d(x, y) = |x - y|^2$; 3) $d(x, y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|$; 4) $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$.

Esercizio 3.2. Usando la definizione di limite, verificare che

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{3n^2+2} = \frac{2}{3}; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} \Big(n - \sqrt{n^2-1}\Big) = 0.$$

### Esercizi intermedi

Esercizio 3.3. Verificare che la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

è una distanza su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.4. Usando la definizione, verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{n/2} + \mathrm{e}^{-n/2}}}{\mathrm{e}^{n/4}} = 1.$$

Esercizio 3.5. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $|\langle x, y\rangle| = |x||y|$. Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $y = \lambda x$. Questo è il caso dell'uguaglianza nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Esercizio 3.6. Consideriamo la successione

$$a_n = \binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Verificare che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente;
ii) Verificare (per induzione) che $a_n \geq 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) Dedurre dal punto ii) che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Esercizio 3.7. Siano $a_1, \dots, a_n > 0$ numeri reali positivi. Verificare che

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\Big) \geq n^2.$$

Esercizio 3.8. Siano $0 < x_1, \dots, x_n < 1$ numeri reali. Provare la disuguaglianza:

$$(1 - x_1) \cdots (1 - x_n) < 1 - x_1 \cdots x_n.$$

**Esercizi avanzati**

Esercizio 3.9. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che verifica $a_1 > 1$ e $a_1+\ldots+a_{n-1} < a_n$ per ogni $n \geq 2$. Provare che esiste un numero reale $q > 1$ tale che $a_n > q^n$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 3.10. Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il polinomio della variabile reale $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$$

non ha zeri reali, ovvero non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che $p(x) = 0$.

Esercizio 3.11. Studiare segno, monotonia e convergenza della successione

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n.$$

SETTIMANA 4

# Successioni reali e complesse

### Esercizi di base

ESERCIZIO 4.1. Verificare che:
$$\lim_{n\to\infty} n\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}-1\Big) = -1; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4+1} = 1; \quad \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}\Big) = -1.$$

ESERCIZIO 4.2. Calcolare i seguenti limiti:
1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 3^n+1}{n^3 2^n+(-1)^n}$; 2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log^4(n)+n\arctan(n)}{n^2+\log n}$; 3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\log n+1/n}$.

ESERCIZIO 4.3. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}; \qquad \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big).$$

### Esercizi intermedi

ESERCIZIO 4.4. Calcolare i seguenti limiti:
1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n}$; 2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n+1]{n+1}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{2n}$; 3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

ESERCIZIO 4.5. Al variare dei numeri reali $\alpha,\beta,b>0$ studiare la convergenza delle successioni
$$1)\quad a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n\in\mathbb{N}; \qquad 2)\quad b_n = \frac{1}{b^n}\binom{2n}{n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

ESERCIZIO 4.6. Al variare di $z\in\mathbb{C}$ studiare la convergenza della successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con
$$a_n = \frac{1+iz^n}{i+|z|^{2n}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

ESERCIZIO 4.7. Al variare di $z\in\mathbb{C}$ studiare la convergenza della successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$$a_n = \Big(3z^n+\frac{2ni}{3ni+1}\Big)^n, \quad n\in\mathbb{N},$$
e, quando esiste, calcolarne il limite.

ESERCIZIO 4.8. Sia $m\in\mathbb{N}$ con $m\geq 1$. Calcolare tutti i valori del parametro $\beta\in\mathbb{R}$ in funzione di $m$ tali che il limite
$$L = \lim_{n\to\infty} n^\beta\Big(\sqrt[m]{n+1}-\sqrt[m]{n}\Big)$$
esista finito e risulti $L\neq 0$.

Esercizio 4.9. Al variare dei numeri naturali $k, m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ calcolare il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^m}{(2kn)!}.$$

Esercizio 4.10. Sia $\alpha > 0$ un parametro e si consideri la successione

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare i limiti:
1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ per ogni $\alpha > 0$;
2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ per $\alpha = 2$.

**Esercizi avanzati**

Esercizio 4.11. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n \in \mathbb{R}$ l'unica radice positiva del polinomio $p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$ nella variabile $x \in \mathbb{R}$. Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.

Esercizio 4.12. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista (ad es. finito) il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Provare che anche $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

SETTIMANA 5

# Successioni ricorsive, liminf e limsup

### Esercizi di base

ESERCIZIO 5.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Provare che

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

ESERCIZIO 5.2. Dimostrare che la successione numerica

$$a_n = \frac{n^2\cos(n\pi)}{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \to \infty$.

ESERCIZIO 5.3. Calcolare i limiti inferiore e superiore della successione $a_n = \sqrt[n]{(-1)^n n}$.

### Esercizi intermedi

ESERCIZIO 5.4 (Algoritmo di Erone per il calcolo della radice quadrata). Siano $a_0 > 0$ ed $x > 0$ due numeri reali fissati e definiamo la successione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Provare che la successione converge e calcolarne il limite.

ESERCIZIO 5.5. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(x) = x - x^3$. Assegnato $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo ricorsivo tramite la relazione

$$a_{n+1} = \varphi(a_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Provare che se $a_0 \in [-1, 1]$ la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.
2) Provare che la successione converge se e solo se $|a_0| < \sqrt{2}$.

ESERCIZIO 5.6. Siano $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$. Definiamo in modo ricorsivo la successione

$$a_{n+1} = \frac{\beta a_n^2}{1 + a_n^2}, \quad n \geq 0.$$

Discutere al variare di $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$ la convergenza della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, se esiste, calcolarne il limite. Studiare prima il caso $0 < \beta < 2$, poi il caso $\beta = 2$ e infine $\beta > 2$.

ESERCIZIO 5.7. Calcolare i seguenti limiti inferiore e superiore

$$L^- = \liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\sqrt[3]{n + \frac{5}{4}}\right\} \quad \text{e} \quad L^+ = \limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\sqrt[3]{n + \frac{5}{4}}\right\},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Esercizio 5.8. Al variare del numero reale $x \in \mathbb{R}$ con $0 < x < 1$ calcolare i seguenti limite inferiore e limite superiore

$$L^-(x) = \liminf_{n\to\infty} \left\{(-1)^n \sqrt{n^2 + 2nx}\right\},$$
$$L^+(x) = \limsup_{n\to\infty} \left\{(-1)^n \sqrt{n^2 + 2nx}\right\},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria. Stabilire per quali $0 < x < 1$ esiste il limite della successione in esame.

**Esercizi avanzati**

Esercizio 5.9. Verificare che

$$\liminf_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} = 0, \quad \limsup_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} = 1,$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Esercizio 5.10. Sia $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $|\mathrm{e}^{in\vartheta\pi} - 1| < \varepsilon$. Dedurre da questo fatto che l'insieme $\{\mathrm{e}^{in\vartheta\pi} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$ è denso nella circonferanza unitaria del piano complesso.

SETTIMANA 6

# Serie numeriche

## Esercizi di base

Esercizio 6.1. Osservato che

$$\frac{n-1}{2^n} = 2\left(\frac{n}{2^n} - \frac{(n+1)}{2^{n+1}}\right),$$

calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n}$.

Esercizio 6.2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+e^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

Esercizio 6.3. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \big|\sin(\sin n)\big|^n.$$

## Esercizi intermedi

Esercizio 6.4. Al variare dei numeri reali $\alpha > 0$ ed $x > 1$ studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^\alpha}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}.$$

Esercizio 6.5. Al variare dei parametri studiare la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}(n+1)^{n+2}}{(n+3)!},\ x \in \mathbb{R}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x^{(\log n)^\alpha},\ x \in (0,1),\ \alpha > 0.$$

Esercizio 6.6. Sia $Q$ un quadrato di lato 2 e sia $Q_n$, $n \geq 1$, una successione di quadrati tali che $Q_n$ abbia lato $1/n$. È possibile disporre tutti i quadrati $Q_n$ dentro il quadrato $Q$ senza che si sovrappongano fra loro?

Esercizio 6.7. Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$ diverge.

## Esercizi avanzati

Esercizio 6.8. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga. Provare che anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.

Esercizio 6.9. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva e crescente. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

converge se e solo se esiste finito il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Esercizio 6.10. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $b_n \neq 0$ e $a_n+b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$$

convergano. Provare che converge anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}$.

SETTIMANA 7

# Convergenza semplice ed assoluta. Funzione esponenziale

## Esercizi di base

ESERCIZIO 7.1. Dedurre le formule di addizione per seno e coseno per $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

a partire dall'identità funzionale per l'esponenziale $\exp(z+\zeta) = \exp(z)\exp(\zeta)$ con $z, \zeta \in \mathbb{C}$ e dalle identità di Eulero

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}.$$

ESERCIZIO 7.2. Risolvendo le forme indeterminate, calcolare i seguenti limiti:

$$1) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^3}{2n+1}}; \quad 2) \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!}; \quad 3) \lim_{n\to\infty} \frac{n^n + n!\log(n+1)}{2^n + (n+1)^n}.$$

## Esercizi intermedi

ESERCIZIO 7.3. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^{n+1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n\big(\sin(2x)\big)^n}{n^2+1}; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}.$$

ESERCIZIO 7.4. Al variare di $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza delle serie

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sqrt[3]{1 + \frac{\alpha}{n}} - \sqrt{1 + \frac{\beta}{n}}\Big); \quad 2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(1/n^{\alpha})}{[1 - \cos(1/n)]^{\beta}}.$$

ESERCIZIO 7.5. Provare che la costante di Eulero e non è un numero razionale.

ESERCIZIO 7.6. Provare che $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!\mathrm{e}) = 2\pi$.

## Esercizi avanzati

ESERCIZIO 7.7. Sia $0 < a < 1$ un numero reale.

i) Definita $a_n \in (-1, 0)$ tramite la relazione $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, provare che

$$|a_n| \le \frac{1}{n}\Big(\frac{1-a}{a}\Big), \quad n \ge 1.$$

ii) Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1}.$$

Esercizio 7.8. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ non negativo calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n}.$$

Risposta: $1 - 2\{x\}$. Sopra $[x]$ e $\{x\}$ sono la parte intera e la parte frazionaria di $x$. Lavorare in rappresentazione binaria

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k \in \{0, 1\}.$$

SETTIMANA 8

# Sottosuccessioni, punti di accumulazione, spazi metrici

## Esercizi di base

ESERCIZIO 8.1. Data una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, provare che sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ad un limite finito);
B) Esiste un numero $L \in \mathbb{R}$ con questa proprietà: ogni sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una ulteriore sottosuccessione che converge ad $L$.

ESERCIZIO 8.2. 1) Costruire una successione di numeri reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la seguente proprietà. Per ogni $L \in \mathbb{R}$ esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$.
2) Stabilire se esiste una successione di numeri reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che per ogni $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, ci sia una sottosuccessione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$, ma non per $L = 0$.

ESERCIZIO 8.3. Sia $\ell^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni reali limitate:

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione in } \mathbb{R} \text{ limitata}\big\}.$$

Indichiamo con $\mathrm{x} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un generico elemento di $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

1) Verificare che $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale con le usuali operazioni di somma e moltiplicazione scalare per le successioni.
2) Verificare che la funzione $\|\cdot\|_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ così definita
$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \sup\big\{|a_n| \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\big\}$$
definisce una norma.
3) Verificare che la funzione $d_\infty : \ell^\infty(\mathbb{R}) \times \ell^\infty(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ così definita
$$d_\infty(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \|\mathrm{x}-\mathrm{y}\|_\infty$$
è una distanza su $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

## Esercizi intermedi

ESERCIZIO 8.4. Si consideri l'insieme

$$A = \Big\{\frac{i}{3^n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, i \in \mathbb{N} \text{ tale che } 3^n \le i \le 4^n\Big\}.$$

Calcolare l'insieme dei punti di accumulazione di $A$.

ESERCIZIO 8.5. Calcolare tutti i punti di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$

$$A = \big\{\sqrt{n} - \sqrt{m} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N}\big\}.$$

ESERCIZIO 8.6. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ indichiamo con $D(A)$ ("derivato di $A$") l'insieme dei punti di accumulazione di $A$. Costruire un insieme $A \subset [0,1]$ tale che $D(A)$ sia numerabile.

ESERCIZIO 8.7. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che $a_{n+1} \leq a_n + 1/n$ e siano $L^-$ ed $L^+$ is suoi limiti inferiore e superiore. Provare che per ogni $L \in [L^-, L^+]$ esiste una sottosuccessione convergente ad $L$.

ESERCIZIO 8.8. Si consideri la successione $a_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$. Calcolare l'insieme dei limiti di tutte le sottosuccessioni convergenti.

**Esercizi avanzati**

ESERCIZIO 8.9. Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.

SETTIMANA 9

# Limiti e funzioni continue

## Esercizi di base

Esercizio 9.1. Usando la definizione di limite verificare che

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^4}=-\infty,\qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}=2.$$

Esercizio 9.2. Stabilire se esistono i seguenti limiti ed eventualmente calcolarli:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{(x^3+x^2)^{3/2}};\ \ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(x^3)}+\sqrt[3]{\sin(x^9)}}{x^3+x^4}.$$

## Esercizi intermedi

Esercizio 9.3. Calcolare i seguenti limiti 'risolvendo' le 'forme indeterminate':

$$1)\ \lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\Big);\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1};\quad 3)\ \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(\pi-x)^2};$$
$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2},\ \text{con } \alpha,\beta\in\mathbb{R};\quad 5)\ \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{x-x_0},\ \text{dove } x_0>0;$$

Risposte: 1) $-1$; 2) $3/2$; 3) $1/8$; 4) $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$; 5) $\frac{1}{3}x_0^{-2/3}$. Ai punti 3) e 4), si assuma come noto il limite notevole $\sin x/x\to 1$ per $x\to 0$. Al punto 3): sostituzione.

Esercizio 9.4. i) Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=-\frac{1}{2}.$$

ii) Calcolare il limite precedente usando le operazioni elementari sui limiti.

Esercizio 9.5. Usando la definizione, provare che

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z^2}{|z|^2+1}=\frac{z_0^2}{|z_0|^2+1}$$

per ogni $z_0\in\mathbb{C}$, dove $z$ varia in $\mathbb{C}$, e sui complessi si considera la distanza standard.

Esercizio 9.6. Calcolare i seguenti limiti:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\log_2(\mathrm{e}^x+x^2)}{x+\log_2 x};\quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 2^x+4^x}{3^x\log(1+3^x)+(2^x+1)^2};$$
$$3)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{x})+\mathrm{e}^{-1/x}}{x^\alpha},\ \alpha>0;\quad 4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(3x)^x+\arctan(3^x)}{x^2+2^{x\log x}}.$$

Si possono usare i limiti elementari (confronto fra logaritmi, potenze, esponenziali, etc.), le regole sulle operazioni coi limiti, confronti, sostituzioni, continuità delle funzioni elementari. Argomentare in modo dettagliato ogni passaggio.

Esercizio 9.7. Calcolare i seguenti limiti 'risolvendo' le forme indeterminate del tipo $[1^\infty]$:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{x^2-1}{x^2+1}\Big)^{\frac{x^3+1}{x+2}};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}};\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\cos x}\Big)^{\frac{\sin x}{x^3}}.$$

Risposte: 1) $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. 3) $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Esercizio 9.8. Stabilire se la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}\{-x\}$ (prodotto delle due parti frazionarie) è continua e disegnarne il grafico.

Esercizio 9.9. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione con la seguente proprietà. Per ogni successione limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali si ha

$$f\big(\limsup_{n\to\infty} a_n\big)=\limsup_{n\to\infty} f(a_n).$$

Provare che $f$ è continua e monotona crescente.

**Esercizi avanzati**

Esercizio 9.10. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ oppure } x=0,\\ \dfrac{1}{q} & \text{se } x=\dfrac{p}{q} \text{ con } p,q\in\mathbb{Z},\ q>0, \text{ coprimi e } x\neq 0.\end{cases}$$

Calcolare l'insieme dei punti in cui $f$ è continua (nella distanza standard).

Esercizio 9.11. Su $\mathbb{R}$ sia fissata la distanza standard. Provare le seguenti affermazioni.

1) La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1+x^2}$, è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.
2) La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x|}$, è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.
3) La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

# Topologia di uno spazio metrico

## Esercizi di base

ESERCIZIO 10.1. Siano $(X, d)$ uno spazio metrico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) $A^\circ$ è il più grande insieme aperto contenuto in $A$;
ii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene $A$.

ESERCIZIO 10.2. Siano $(X, d)$ uno spazio metrico, $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Provare che $x \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

ESERCIZIO 10.3. 1) Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato. Provare che $\sup A \in \overline{A}$. 2) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ e $Z = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Provare che $A$ è aperto e che $Z$ è chiuso. Provare che $\partial A \subset Z$. È sempre vero che $\partial A = Z$?

ESERCIZIO 10.4. Sia $(X, d)$ uno spazio metrico discreto e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. Provare che una *qualsiasi* funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è continua.

## Esercizi intermedi

ESERCIZIO 10.5. Siano $(X, d)$ uno spazio metrico ed $A \subset X$. Provare che $\bar{A} = \mathrm{int}(A) \cup \partial A$.

ESERCIZIO 10.6. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) $A$ aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; iv) $A$ chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

ESERCIZIO 10.7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e si considerino i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^2$:
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\} \quad \text{e} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}.$$
Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:
1) Se $f$ è continua allora $A$ è aperto.
2) Se $A$ è aperto allora $f$ è continua.
3) Se $f$ è continua allora $C$ è chiuso.
4) Se $C$ è chiuso allora $f$ è continua.

ESERCIZIO 10.8. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme
$$A = \Big\{ \frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z} \Big\}.$$
Calcolare la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}$.

Esercizio 10.9. Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
A) $f$ è continua.
B) Il suo grafico $\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza standard del piano.

Esercizio 10.10. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 < 0\big\}.$$

i) Provare che $A \subset [-M, M] \times [-M, M]$ per $M > 0$ opportuno.
ii) Provare che $A$ è aperto.
iii) Dimostrare che $\partial A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 = 0\big\}$.
iv) Rappresentare $A$ nel piano Cartesiano (in modo approssimativo).

Esercizio 10.11. Sia $(X, d)$ uno spazio metrico. Per $x_0 \in X$ ed $r > 0$ definiamo

$$\begin{aligned} B_r(x_0) &= \big\{x \in X : d(x, x_0) < r\big\}, \\ K_r(x_0) &= \big\{x \in X : d(x, x_0) \le r\big\}, \\ S_r(x_0) &= \big\{x \in X : d(x, x_0) = r\big\}. \end{aligned}$$

Provare che $\partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0)$ e che $\overline{B_r(x_0)} \subset K_r(x_0)$. Mostrare tramite esempi che le inclusioni possono essere strette.

Esercizio 10.12. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato, $x \in A$ ed $r \subset \mathbb{R}^n$ una semiretta uscente da $x$. Provare che $r \cap \partial A \neq \emptyset$.

**Esercizi avanzati**

Esercizio 10.13. Provare che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ è l'unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.

Esercizio 10.14. Siano $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi chiusi disgiunti. Provare che esistono due insiemi aperti e disgiunti $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ tali che $C_1 \subset A_1$ e $C_1 \subset A_2$.

SETTIMANA 11

# Compattezza in spazi metrici

### Esercizi di base

ESERCIZIO 11.1. Siano $m, k, n \in \mathbb{N}$ con $m + k = n$. Su $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^k$ ed $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ fissiamo la distanza standard. Provare che se $H \subset \mathbb{R}^m$ ed $K \subset \mathbb{R}^k$ sono compatti, allora $H \times K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto.

ESERCIZIO 11.2. Sia $(X, d)$ uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che se $X$ è compatto allora anche $K$ è compatto.

### Esercizi intermedi

ESERCIZIO 11.3. Provare che il seguente insieme è compatto nella topologia standard di $\mathbb{C}$:

$$K = \Big\{ \frac{1 + ni}{n + i} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N} \Big\} \cup \{i\}.$$

Provare l'affermazione sia con la definizione di compattezza per ricoprimenti sia con la definizione di compattezza sequenziale.

ESERCIZIO 11.4. Siano $(X, d_X)$ e $(Y, d_Y)$ due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione biiettiva e continua. Provare che se $X$ è compatto allora la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

ESERCIZIO 11.5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che esistano (anche infiniti) e siano uguali i limiti

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Provare che $f$ ha minimo oppure massimo assoluto.

ESERCIZIO 11.6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Stabilire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono sequenzialmente compatti

$$K = \big\{ x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leq f(x) \leq 2 \big\} \quad \text{e} \quad H = \big\{ x \in \mathbb{R} \,:\, f(x) \leq 1/2 \big\}.$$

ESERCIZIO 11.7. Sia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha x^2 - 1}{(x + 1)(x + \alpha)}, \quad x \geq 0,$$

e consideriamo l'insieme

$$K_\alpha = \big\{ x \geq 0 : -2 < f_\alpha(x) \leq 1 \big\} \subset \mathbb{R}.$$

Per ciascun $\alpha > 0$ stabilire se:

i) $K_\alpha$ è aperto;
ii) $K_\alpha$ è chiuso;
iii) $K_\alpha$ è compatto.

Esercizio 11.8. Siano $(X, d_X)$ e $(Y, d_Y)$ due spazi metrici, $f : X \to Y$ una funzione continua ed $A \subset X$. Provare che $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Dare condizioni sufficienti su $A$ tali che si abbia $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

**Esercizi avanzati**

Esercizio 11.9. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi $H, K \subset \mathbb{R}^2$ sono compatti:

$$K = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 \leq 1\big\},$$
$$H = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^3 + xy + y^3 \leq 1\big\}.$$

Esercizio 11.10. Provare che l'insieme $K = \{\mathrm{x} \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : \|\mathrm{x}\|_\infty \leq 1\}$ è chiuso e limitato ma non è compatto. (Cfr. Esercizio 8.3).

Esercizio 11.11. Provare che l'insieme $K = \{\mathrm{x} \in \ell^\infty(\mathbb{R}) : |x_n| \leq 1/n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}$ è compatto.

SETTIMANA 12

# Spazi metrici completi e completamento

## Esercizi di base

ESERCIZIO 12.1. Sia $(X, d)$ uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che se $X$ è completo allora anche $K$ è completo con la distanza ereditata da $X$.

ESERCIZIO 12.2. Definiamo le funzioni $|\cdot|_1, |\cdot|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \quad |x|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Provare che $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty)$ sono spazi normati e che come spazi metrici sono completi.

ESERCIZIO 12.3. Sia $X$ un insieme non vuoto e sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

1) Provare che $(X, d)$ è uno spazio metrico.
2) Descrivere le palle in $X$.
3) Descrivere gli insiemi aperti.
4) Caratterizzare gli insiemi compatti in $X$
5) Provare che $(X, d)$ è completo.

## Esercizi intermedi

ESERCIZIO 12.4. Sia $(X, d)$ uno spazio metrico completo e sia $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi non vuoti tali che:

i) $K_{n+1} \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$.

Provare che esiste $x \in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

Ricordiamo che il diametro di un insieme $A \subset X$ è $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x,y \in A} d(x, y)$.

ESERCIZIO 12.5. Definiamo la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.
iii) Determinare il completamento di $(\mathbb{R}, d)$.

Esercizio 12.6. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
ii) Provare che se $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso, allora lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ è completo.
iii) Provare che se $(\mathbb{R}, d)$ è completo, allora $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso.

Esercizio 12.7. Siano $X = (-1, \infty)$ e $d : X \times X \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = \Big| \log \Big( \frac{1+x}{1+y} \Big) \Big|, \quad x, y \in X.$$

1) Provare che $(X, d)$ è uno spazio metrico.
2) Esibire un'isometria suriettiva $\varphi : \mathbb{R} \to (X, d)$, $d(\varphi(t), \varphi(s)) = |t - s|$, con $s, t \in \mathbb{R}$.
3) Provare che $(X, d)$ è uno spazio metrico completo.

**Esercizi avanzati**

Esercizio 12.8. Dopo aver determinato l'immagine della funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \Big( \frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2} \Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

considerare lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ con la distanza

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $d$ è una metrica su $\mathbb{R}$.
ii) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ non è completo.
iii) Calcolare il completamento di questo spazio metrico.