Esercizio 1.6 parte (1) Sia $f: A \to B$ una funzione, Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha

$$C \subset f^{-1}(f(C)).$$

Discutere il caso in cui f sia iniettiva.

Risoluzione.

$$x \in C \overset{\text{(def. di immagine)}}{\Longrightarrow} f(x) \in f(C) \overset{\text{def. di anti-immagine}}{\Longleftrightarrow} x \in f^{-1}(f(C)).$$

$$(\not\Longleftarrow \text{ in generale})$$

Questo prova: $C \subset f^{-1}(f(C))$. Mostriamo che l'inclusione può essere stretta. Siano $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1\}$. L'unica funzione è $f(1) = f(2) = 1$. Sia $C = \{1\}$.

Allora

$$f^{-1}(f(C)) = f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2\} \neq C,$$

Supponiamo ora che f sia iniettiva. Allora:

$$f(x) \in f(C) \overset{\text{def. immagine}}{\Longrightarrow} \exists\, x_0 \in C \text{ t.c. } f(x_0) = f(x)$$

$$\Downarrow$$

$x_0 = x$ perché f è 1-1.

$$\Longrightarrow x \in C$$

Dunque se f è 1-1 si ha:

$$C = f^{-1}(f(C)).$$

□

Esercizio 1.7 Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione
$A \subset \mathbb{R}$

$$f(x) = x - \sqrt{1-x^2}, \quad x \in A \subset \mathbb{R}.$$

1) Determinare il dominio A. Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.

2) Stabilire se f è iniettiva. Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\})$.

Risoluzione. 1) Per l'esistenza della radice: $1-x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 1$
$\iff |x| \leq 1$
$\iff x \in [-1,1]$.

Dunque $A = [-1,1]$.

Dato $y \in \mathbb{R}$, cerchiamo di trovare $x \in A$ tale che $f(x) = y$:

$$x - \sqrt{1-x^2} = y \iff \cancel{x + \sqrt{1-x^2}}$$

$$\iff x - y = \sqrt{1-x^2}.$$

Abbiamo una prima condizione: $x - y \geq 0$.

Con questa condizione:

$$x - y = \sqrt{1-x^2} \iff (x-y)^2 = 1 - x^2$$

$$\iff x^2 - 2xy + y^2 = 1 - x^2$$

$$\iff 2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$$

$$\iff x^2 - xy + \frac{1}{2}(y^2-1) = 0,$$

Risolviamo in x ad y fissato:

$$x_{\pm} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 2(y^2-1)}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{2-y^2}}{2}$$

L'esistenza della radice impone la nuova condizione $2-y^2 \geq 0$ ovvero $y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Vediamo se le due radici rispettano $x-y \geq 0$.

- $\dfrac{y+\sqrt{2-y^2}}{2} \geq y \iff y + \sqrt{2-y^2} \geq 2y$

$$\iff \sqrt{2-y^2} \geq y$$

Se $y \leq 0$ la disequazione è verificata. Se $y > 0$ si passa ai quadrati:

$$\iff 2-y^2 \geq y^2$$

$$\iff 2 \geq 2y^2 \iff y^2 \leq 1 \iff -1 \leq y \leq 1 .$$

Conclusione: La soluzione x_+ è accettabile per $-\sqrt{2} \leq y \leq 1$

- $\dfrac{y-\sqrt{2-y^2}}{2} \geq y \iff y - \sqrt{2-y^2} \geq 2y$

$$\iff -\sqrt{2-y^2} \geq y .$$

Dunque deve essere $y \leq 0$, In questo caso:

$$\iff -y \geq \sqrt{2-y^2}$$

$$\iff y^2 \geq 2-y^2$$

$$\iff y^2 \geq 1$$

Conclusione: La soluzione x_- è accettabile per $-\sqrt{2} \leq y \leq -1$.

Esercizio: $x_+, x_- \in A = [-1,1]$.

Possiamo ora rispondere alle varie domande.

Per ogni $y \in [-\sqrt{2}, 1]$ abbiamo trovato almeno una $x \in [-1,1]$ tale che $f(x) = y$. Per gli altri y no.

Dunque

$$f(A) = [-\sqrt{2}, 1].$$

La funzione f <u>non</u> è iniettiva perché per ogni $y \in (-\sqrt{2}, -1]$ esistono $x_+, x_- \in [-1,1]$ distinti tali che $f(x_+) = f(x_-) = y$.

Le "fibre" sono fatte nel seguente modo:

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \{x_+\} & \text{se } -1 < y \leq 1 \\ \{x_-, x_+\} & \text{se } -\sqrt{2} < y \leq -1 \\ \{x_- = x_+\} & \text{se } y = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 1.9 parte 2 Provare per induzione che

$$\circledast \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Risoluzione. Per $n=1$ (base induttiva) si ha banale

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1,$$

(con "=")

Passo induttivo. Supponiamo vera la $\circledast$. Allora:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

Per concludere bisogna vedere se

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(n+1)^2 - n - n(n+1)}{n(n+1)^2} \geq 0$$

Studiamo il segno del numeratore:

$$(n+1)^2 - n - n(n+1) = \cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 - \cancel{n} - \cancel{n^2} - \cancel{n} = 1 > 0 .$$

Quindi la disuguaglianza è verificata.

$\square$

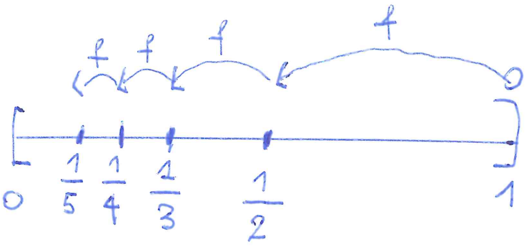
Esercizio 1,11 parte 1) Verificare che

$$\text{Card}([0,1]) = \text{Card}([0,1))$$

Bisogna esibire una bi-iezione concreta (esplicita).

Risoluzione. Consideriamo questo sottoinsieme di $[0,1]$

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \in [0,1] \; : \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1 \right\}$$



Su $[0,1] \setminus A$ consideriamo $f : [0,1] \setminus A \to [0,1] \setminus A$

$$f(x) = x \quad , \quad \text{l'identità}.$$

Chiaramente è una corrispondenza biunivoca.

Poi definiamo $f : A \to A$ in questo modo

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \, .$$

Questa f è iniettiva, ma non suriettiva su A perchè $1 \in A$ non viene preso.

Complessivamente abbiamo costruito

$$f : [0,1] \to [0,1)$$

che è sia iniettiva che suriettiva.

ESERCIZIO 2.3 Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato,

Provare che

$$\sup A - \inf A = \sup\{ x-y \in \mathbb{R} : x,y \in A\}.$$

Soluzione. Chiamiamo $B = \{x-y \in \mathbb{R} : x,y \in A\}$.

1) Proviamo che $\sup A - \inf A \leq \sup B$.

Sia $z \in \mathbb{R}$ un maggiorante di B, ovvero:

$$x - y \leq z \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

$$\Downarrow \quad y+z \text{ è maggiorante di } A$$

$$(\sup A) - y \leq z \quad \forall y \in A$$

$$\Downarrow \quad (\sup A) - z \text{ è minorante di } A$$

$$(\sup A) - (\inf A) \leq z.$$

E siccome $\sup B$ è il minimo dei maggioranti!

$$(\sup A) - (\inf A) \leq \sup B.$$

2) Proviamo che $\sup A - \inf A \geq \sup B$.

Siano z un maggiorante di A e w un minorante di A:

$$z \geq x \quad \forall x \in A,$$
$$w \leq y \quad \forall y \in A.$$

Deduciamo che $x - y \leq z - w$ da cui $z - w \geq \sup B$.

Scegliendo $z = \sup A$ e $w = \inf A$ si ottiene la tesi.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : \ x, y \in \mathbb{R}, \ 0 < x, y < 1 \right\}.$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.

Soluzione. Certamente $\frac{xy}{x+y} > 0$ e dunque 0 è un minorante. Quindi $\inf A \geq 0$. Proviamo che $\inf A = 0$, ovvero che $\varepsilon > 0$ non è un minorante. Cerchiamo $x, y \in (0,1)$ tali che

$$\frac{xy}{x+y} < \varepsilon .$$

Proviamo con la scelta $x = y$:

$$\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2x} < \varepsilon .$$

Basta scegliere $x < 2\varepsilon$. Questo prova che $\inf A = 0$.

Cerchiamo di individuare $\sup A$: se $x, y \in (0,1)$:

$$\frac{xy}{x+y} = x \cdot \underbrace{\frac{y}{x+y}}_{\wedge \atop 1} < x \cdot 1 = x < 1.$$

Quindi 1 è un maggiorante (stretto) di A.

La stima fatta non è precisa perché $\frac{y}{x+y}$ è circa 1 quando x è circa 0.

Sappiamo che

$$0 < x < 1 \iff x^2 < x .$$

Dunque se $x, y \in (0,1)$ si ha $x+y > x^2+y^2$
e allora

$$\frac{xy}{x+y} < \frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2} .$$

Infatti $2xy \leq x^2+y^2 \iff x^2+y^2-2xy \geq 0$
$\iff (x-y)^2 \geq 0$.

Dunque $\frac{1}{2}$ è un maggiorante (stretto): $\sup A \leq \frac{1}{2}$.
Proviamo che $\sup A = \frac{1}{2}$. Dato $\varepsilon > 0$ cerchiamo
$x, y \in (0,1)$ tali che $\frac{xy}{x+y} > \frac{1}{2} - \varepsilon$.
Proviamo con il caso semplificato $x = y$:

$$\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2x} > \frac{1}{2} - \varepsilon .$$

Dunque x deve verificare $x > 1 - 2\varepsilon$, che è una
condizione compatibile con la definizione di A.
Questo prova che $\sup A = \frac{1}{2}$.

Abbiamo visto che $\frac{1}{2} \notin A$ e quindi non esiste $\max A$.
Abbiamo visto che $0 \notin A$ e quindi non esiste $\min A$.

$\square$

<u>Commento</u> La funzione $x \mapsto \frac{xy}{x+y} = \frac{y}{1+\frac{y}{x}}$
cresce nella $x \in (0,1)$ ed è massima per $x \to 1^-$.
Stessa cosa per $y \to 1^-$. Dunque è ragionevole che
l'estremo superiore si ottenga inserendo i valori $x = y = 1$.

<u>ESERCIZIO 2,11</u> Verificare che $\forall x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$[x] + [x + 1/n] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

Soluzione. Se $z \in \mathbb{Z}$ è un numero intero allora:

$$\left[z + x + \frac{i}{n}\right] = \left[x + \frac{i}{n}\right] + z$$

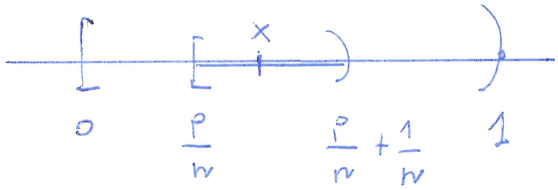
$$i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$[(z+x)n] = [zn + nx] = zn + [nx].$$

Deduciamo che basta risolvere il problema quando $x \in [0,1)$.

Sia $p = [nx]$. Allora $p \leq nx < p+1$ e quindi

$$\frac{p}{n} \overset{\circledast}{\leq} x \overset{\triangle}{<} \frac{p}{n} + \frac{1}{n}$$



Contiamo per quante $i = 0, 1, \dots, n-1$ si ha $x + \frac{i}{n} < 1$.
Per tutte queste i si ha $\left[x + \frac{i}{n}\right] = 0$. La disuguaglianza precedente fornisce:

$$\frac{i}{n} < 1 - x \leq 1 - \frac{p}{n} \qquad (\text{usata la } \circledast)$$

e dunque $i < n - p$.

Precisiamo meglio l'argomento. Affermiamo che

$$i \le n-p-1 \implies x + \frac{i}{n} < 1 .$$

Infatti

$$x + \frac{i}{n} \overset{\triangle}{<} \frac{p}{n} + \frac{1}{n} + \frac{i}{n} \le \frac{p}{n} + \frac{1}{n} + \frac{n-p-1}{n} = 1$$

Poi affermiamo che

$$i \ge n-p \implies x + \frac{i}{n} \ge 1 .$$

Infatti

$$x + \frac{i}{n} \overset{*}{\ge} \frac{p}{n} + \frac{i}{n} \ge \frac{p}{n} + \frac{n-p}{n} = 1 .$$

In conclusione

$$\underbrace{\underset{\underset{0}{\|}}{[x]} + \dots + \underset{\underset{0}{\|}}{\left[x + \frac{n-p-1}{n}\right]}}_{\text{ce ne sono } n-p} + \underbrace{\underset{\underset{1}{\|}}{\left[x + \frac{n-p}{n}\right]} + \dots + \underset{\underset{1}{\|}}{\left[x + \frac{n-1}{n}\right]}}_{\text{ce ne sono } p} = p$$

$\square$

ESERCIZIO 3.1 parte 4 Verificare che $\mathbb{R}$ con la funzione distanza

$$d(x,y) = \sqrt{|x-y|}\,, \qquad x,y \in \mathbb{R},$$

è uno spazio metrico.

Risoluzione. i) Certamente $d(x,y) \geq 0$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$.
Se poi $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = 0$ allora $|x-y| = 0$ e quindi $x=y$. Siccome $|x-y| = |y-x|$ la distanza è simmetrica.
Verifichiamo la disuguaglianza triangolare:

$$\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}\,.$$

Questa disuguaglianza è equivalente a quella che si ottiene passando ai quadrati

$$|x-y| = \left(\sqrt{|x-y|}\right)^2 \leq \left(\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}\right)^2 =$$

$$= |x-z| + 2\sqrt{|x-z|\,|z-y|} + |z-y|\,.$$

Questa disuguaglianza è verificata in quanto

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

$$0 \leq 2\sqrt{|x-z|\,|z-y|}\,.$$

$\square$

ESERCIZIO 3.7 Siano $a_1, \dots, a_n > 0$ numeri reali positivi. Verificare che

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2.$$

Risoluzione. Consideriamo questi due punti di $\mathbb{R}^n$:

$$x = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}),$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Allora si ha:

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/2}$$

$$|y| = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)^{1/2}$$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_i}} = n.$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy - Schwarz:

$$|\langle x,y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

si ottiene

$$n^2 = \langle x,y\rangle^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$$

ESERCIZIO 4.3 Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n},$$

Risoluzione. Procediamo per confronto:

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} \leq \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = \underbrace{3\sqrt[n]{2}}_{\to 3}$$

Dunque $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$,

(Il risultato è 3 perché 3 è maggiore di 2.) $\square$

ESERCIZIO 4.4 Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}.$$

Risoluzione. Proveremo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Fissiamo $M>0$ arbitrario (per fissare le idee: $M \in \mathbb{N}$).

Allora:

$$n \geq M \implies n! \geq M\cdot(n-1)!$$

Se poi

$$n-1 \geq M \implies n! \geq M(n-1)! \geq M^2(n-2)!$$

Possiamo iterare $n-M+1$ volte arrivando a

$$n! \geq M^{n-M+1}(M-1)!$$

Passando alle radici:

$$\sqrt[n]{n!} \geq M \sqrt[n]{M^{1-M}(M-1)!}$$

Sappiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M^{1-M}(M-1)!} = 1$.

Quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{M^{1-M}(M-1)!} \geq \frac{1}{2}$ $\forall n \geq \bar{n}$.

In definitiva:

$$\forall M \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} \text{ si ha } \sqrt[n]{n!} \geq \frac{M}{2}.$$

Questo significa che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

$\square$