ESERCIZIO 5.9 Calcolare i seguenti

$$\liminf_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\}.$$

Soluzione. Siccome $0 \le \{\sqrt{n}\} < 1$ risulta certamente

$$0 \le \liminf_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} \le \limsup_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} \le 1.$$

Se $n = m^2$ con $m \in \mathbb{N}$ allora $\{\sqrt{n}\} = \{\sqrt{m^2}\} = \{m\} = 0$

Questo prova che $\liminf_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} = 0$.

Proviamo che $\limsup_{n\to\infty} \{\sqrt{n}\} = 1$. Bisogna provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall \bar{n} \in \mathbb{N} \ \exists\, n \ge \bar{n} \text{ tale che } \{\sqrt{n}\} > 1 - \varepsilon.$$

Bisogna cercare di rendere massima $\{\sqrt{n}\}$.
Sui quadrati consecutivi m^2 ed $(m+1)^2$ la parte frazionaria è 0. Scegliamo l'intero più grande minore di $(m+1)^2$ ovvero

$$n = (m+1)^2 - 1 = m^2 + 2m$$

Allora $m \le \sqrt{m^2+2m} < m-1$ e quindi

$$\{\sqrt{m^2+2m}\} = \sqrt{m^2+2m} - [\sqrt{m^2+2m}]$$
$$= \sqrt{m^2+2m} - m$$

da cui

$$\left\{\sqrt{n^2+2n}\right\} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} .$$

Il suo limite è

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+2/n}+1} = 1 .$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\ \forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$\left\{\sqrt{n^2+2n}\right\} \geq 1-\varepsilon .$$

ESERCIZIO 5.8 Sia $x \in]0,1[$ un numero reale.

Calcolare i seguenti

$$L^-(x) = \liminf_{n\to\infty} \{(-1)^n \sqrt{n^2+2nx}\}$$

$$L^+(x) = \limsup_{n\to\infty} \{(-1)^n \sqrt{n^2+2nx}\}$$

dove $\{\cdot\}$ è la parte frazionaria.

Stabilire per quali $x \in]0,1[$ la successione in esame ha limite.

Risoluzione. Siccome $0 \leq \{x\} < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, abbiamo che $0 \leq L^-(x) \leq L^+(x) \leq 1$.

Partiamo da questa osservazione:

$$n \overset{\text{Chiaro}}{<} \sqrt{n^2+2nx} \overset{\circledast}{<} n+1 .$$

Verifico $\circledast$:

$$\sqrt{n^2+2nx} < n+1 \iff n^2+2nx < (n+1)^2 = n^2+2n+1$$

$$\iff 2n(x-1) < 1$$

VERO perché $x-1<0$.

Ora distinguo questi due casi: 1) n pari; 2) n dispari.

Quando n è pari:

$$\{(-1)^n\sqrt{n^2+2nx}\} = \{\sqrt{n^2+2nx}\} = \sqrt{n^2+2nx} - n$$

D'altra parte

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2nx}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+2nx-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2nx}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+\frac{2x}{n}}+1}=\frac{2x}{2}=x.$$

Dunque la successione in esame ristretta agli indici pari ha limite.

Per gli indici dispari:

$$\left\{(-1)^n\sqrt{n^2+2nx}\right\}=\left\{-\sqrt{n^2+2nx}\right\}$$

In questo caso:

$$-(n+1)<-\sqrt{n^2+2nx}<-n$$

e quindi

$$\left\{-\sqrt{n^2+2nx}\right\}=-\sqrt{n^2+2nx}-\left(-(n+1)\right)$$

$$=n+1-\sqrt{n^2+2nx}$$

$$=\frac{(n+1)^2-(n^2+2nx)}{n+1+\sqrt{n^2+2nx}}$$

$$=\frac{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}-2nx}{n+1+\sqrt{n^2+2nx}}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ - \sqrt{n^2+2nx} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(1-x) + \frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n} + \sqrt{1+\frac{2x}{n}}}$$

$$= \frac{2(1-x)}{2} = (1-x).$$

Dunque, sugli indici dispari la successione converge a $1-x$.

Conclusioni:

$$L^-(x) = \min\{x, 1-x\},$$

$$L^+(x) = \max\{x, 1-x\}.$$

Il limite esiste se e solo se $L^-(x) = L^+(x)$ ovvero $x = 1-x$ ovvero se e solo se $x = \frac{1}{2}$.

$\square$

ESERCIZIO 6.2 ii) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}.$$

Risoluzione. I criteri della Radice e del Rapporto funzionano. Ma la cosa più semplice è il Confronto:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n < \infty$$

serie geometrica con ragione $\frac{4}{5} < 1$.

ESERCIZIO 6.3 ii) Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ \log(n+1)}.$$

Risoluzione. I criteri della Radice e del Rapporto non sono utili perché $L=1$.

Partiamo da questa osservazione: per ogni $\alpha>0$ si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n^\alpha} = 0$$

e quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, n \geq \bar{n}$ si ha
$$\log(n+1) \leq n^\alpha$$

Dunque

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\log(n+1)} \geq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}\, n^{\alpha}} = +\infty$$

se scegliamo

$$\frac{1}{2} + \alpha \leq 1$$

Ad esempio $\alpha = 1/2$.

Per confronto la serie data diverge.

$\square$

ESERCIZIO 6.4 Al variare di $\alpha > 0$ studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}} .$$

Risoluzione. I criteri della Radice e del Rapporto sembrano portare a limiti complicati che danno $L=1$.

Proviamo con dei confronti:

$$\log n! = \sum_{K=1}^{n} \log K \leq n \log n$$

e quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^{\alpha}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \log n)^{\alpha}} .$$

Quando $\alpha = 1$ sappiamo che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty$$

per il Criterio di Condensazione. Per Confronto deduciamo che

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^\alpha} = +\infty \qquad \forall \alpha \in]0, 1].$$

Dobbiamo studiare il caso $\alpha > 1$. In questo caso si ha

$$\log n! = \sum_{K=1}^{n} \log K = \sum_{K=2}^{n} \log K \geq (n-1) \cdot \log 2$$

e quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^\alpha (n-1)^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{(\log 2)^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \quad \forall \alpha > 1.$$

Per Confronto la serie data converge $\forall \alpha > 1$.

ESERCIZIO 6.9 Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serie positiva e crescente. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

converge se e solo se esiste finito il limite

$$L=\lim_{n\to\infty}a_n .$$

Risoluzione. Supponiamo che sia $L\in\mathbb{R}$ e proviamo che la serie converge. È $L>0$ e dunque: $\exists\,\bar{n}\in\mathbb{N}\ \forall n\geq\bar{n}$ si ha

$$a_n\geq\frac{L}{2} .$$

Quindi

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)=\sum_{n=\bar{n}}^{\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{a_n}\leq\frac{2}{L}\sum_{n=\bar{n}}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$$

$$=\frac{2}{L}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=\bar{n}}^{N}(a_n-a_{n-1})$$

$$=\frac{2}{L}\lim_{N\to\infty}\left(a_N-a_{\bar{n}-1}\right)$$

$$=\frac{2}{L}\left(L-a_{\bar{n}-1}\right)<\infty ,$$

e dunque la serie converge.

Ora supponiamo che la serie converga e proviamo che il limite è finito:

$$\underset{\mathbb{R}}{\overset{}{S}} \in\!\!\!\!\;\; = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \overset{N\geq 1}{\geq} \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \geq$$

$$\geq \frac{1}{a_N} \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{a_N} (a_N - a_0) = 1 - \frac{a_0}{a_N},$$

e quindi $\qquad \dfrac{a_0}{a_N} \geq 1 - S$.

Se fosse $\quad S < 1 \quad$ concludiamo che

$$a_N \leq \frac{a_0}{1-S} \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Tuttavia non sappiamo se $S < 1$.

Siccome la serie converge $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varepsilon \geq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \overset{N \geq \bar{n}}{\geq} \sum_{n=\bar{n}}^{N} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \geq$$

$$\geq \frac{1}{a_N} \sum_{n=\bar{n}}^{N} (a_n - a_{n-1}) = \frac{1}{a_N} (a_N - a_{\bar{n}-1}) =$$

$$= 1 - \frac{a_{\bar{n}-1}}{a_N}$$

ed ora possiamo scegliere $\varepsilon \in]0,1[$
di modo che

$$a_N \leq \frac{a_{\bar{n}-1}}{1-\varepsilon} \qquad \forall\, N \geq \bar{n} .$$

$\square$

ESERCIZIO 7.3 i) Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{n+1} .$$

Risoluzione. Per $x = -1$ la serie non è ben definita.

Se $\frac{x}{x+1} < 0$ si ha una serie con segno alterno.

Studiamo la convergenza assoluta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^4}{3^n} \left| \frac{x}{x+1} \right|^{n+1}}_{a_n \geq 0} ,$$

$(x \neq 0)$

Procediamo ad esempio con il Criterio del Rapporto:

$$L(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \left| \frac{x}{x+1} \right|^{n+2} \cdot \frac{3^n}{n^4} \left| \frac{x+1}{x} \right|^{n+1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 \frac{1}{3} \left| \frac{x}{x+1} \right| = \frac{1}{3} \left| \frac{x}{x+1} \right|$$

1° caso: $L(x) = \frac{1}{3} \left| \frac{x}{x+1} \right| < 1$. La serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

2° caso: $L(x) > 1$. In questo caso

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{3^n} \left|\frac{x}{x+1}\right|^{n+1} = +\infty \neq 0$$

e quindi la serie non converge né assolutamente né semplicemente.

Risolviamo la disequazione

$$x \neq -1$$

$$\frac{1}{3}\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1 \iff |x| < 3|x+1|$$

$$\iff x^2 < 9(x^2+2x+1)$$

$$\iff 8x^2+18x+9 > 0$$

Le radici di $8x^2+18x+9=0$ sono $x_\pm = \dfrac{-9\pm\sqrt{81-72}}{8} = \dfrac{-9\pm 3}{8} = \begin{cases} -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$

Dunque $L(x) < 1 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{4}, \infty\right[$.

Quando $x = -3/2$ o $x = -3/4$ allora $L(x) = 1$.

Inoltre:

$$\frac{x}{x+1} \overset{x=-\frac{3}{2}}{=} \frac{-3/2}{-\frac{3}{2}+1} = 3, \qquad \frac{x}{x+1} \overset{x=-3/4}{=} \frac{-3/4}{-\frac{3}{4}+1} = -3$$

Dunque la serie iniziale diventa per $x = -3/2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^4 \cdot 3 = +\infty. \qquad \square$$

Per $x = -3/4$ è analogo.

ESERCIZIO 7.4 1) Al variare di $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}} - \sqrt[2]{1+\frac{\beta}{n}} \right).$$

Risoluzione. Usiamo il criterio del Confronto Asintotico. Cerchiamo $\gamma > 0$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}} - \sqrt[2]{1+\frac{\beta}{n}}}{\frac{1}{n^\gamma}} = L \in \mathbb{R}, \quad L \neq 0$$

Siano $x = \sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}}$ e $y = \sqrt[2]{1+\frac{\beta}{n}}$. Allora

$$x - y = \frac{x^2 - y^2}{x+y} = \frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^3}}{\sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}} + \sqrt[2]{1+\frac{\beta}{n}}}$$

Sia ora $z = \sqrt[3]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2}$, $w = \left(1+\frac{\beta}{n}\right) = \sqrt[3]{\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^3}$

Allora

$$z - w = \frac{z^3 - w^3}{z^2 + zw + w^2}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2 - \left(1+\frac{\beta}{n}\right)^3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2}\left(1+\frac{\beta}{n}\right) + \sqrt[3]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2}\left(1+\frac{\beta}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{n^2} - 3\frac{\beta}{n} - 3\frac{\beta^2}{n^2} - \frac{\beta^3}{n^3}}{\dots}$$

Ci sono ora due casi:

Caso 1: $2\alpha - 3\beta \neq 0$.

In questo caso

$$z - w = \frac{\cancel{\alpha^2/2}\ \frac{2\alpha - 3\beta}{n} + \text{Resto}}{\cdots}$$

In questo caso bisogna scegliere $\gamma = 1$
e inoltre

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{2\alpha - 3\beta}{3 \cdot 2} = \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{2} \neq 0$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ deduciamo che per $2\alpha \neq 3\beta$
la serie data diverge.

Caso 2: $2\alpha = 3\beta$.

In questo caso:

$$z - w = \frac{(\alpha^2 - 3\beta^2)\frac{1}{n^2} - \frac{\beta^3}{n^3}}{\cdots}$$

In questo caso bisogna scegliere $\gamma = 2$!

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\alpha^2 - 3\beta^2}{3 \cdot 2} \neq 0$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, la serie data converge. □

ESERCIZIO 7.7 Sia $0 < a < 1$.

i) Definita $a_n \in]-1,0[$ come $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$ provare che

$$|a_n| \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1-a}{a}\right)$$

ii) Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1}$$

Risoluzione. Partiamo da ii). Certamente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1} = 0$$

La monotonia è tuttavia difficile da capire.
Non si riesce ad usare direttamente il Criterio di Leibniz.
Usando il punto i) si trova:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log^2 n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{\log^2 n+1}$$

Vero se entrambe le serie convergono.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log^2 n+1}$ converge per il Criterio di Leibniz.

La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\log^2 n+1}$$
converge assolutamente. Infatti:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n a_n}{\log^2 n+1} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log^2 n+1)}$$
converge per il criterio di Abel-Dirichlet.

i) Partendo da $\sqrt[n]{a} = 1+a_n$ si trova $a=(1+a_n)^n$
e per la Disuguaglianza di Bernoulli:
$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n = \left(1-\frac{a_n}{1+a_n}\right)^n \geq 1-n\frac{a_n}{1+a_n}$$

Riordinando si trova:
$$-a_n \leq \frac{1-a}{na+1+a} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1-a}{a}\right).$$

□