ESERCIZIO 8.5 Calcolare tutti i punti di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$

$$A = \{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N} \}.$$

Risoluzione. Gli elementi di A sono fatti così:

$$\sqrt{n} - \sqrt{m} = \frac{n-m}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Scegliamo n, m dipendenti da $k \in \mathbb{N}$ con parametri:

$$n - m = \alpha k \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{Z}$$

e quindi $n = m + \alpha k$. Allora:

$$\sqrt{n} - \sqrt{m} = \frac{\alpha k}{\sqrt{m+\alpha k} + \sqrt{m}}$$

Ora scegliamo m dominante rispetto a k. Ad es.:

$$m = \beta^2 k^2 \qquad \text{con } \beta \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$\sqrt{n} - \sqrt{m} = \frac{\alpha k}{\sqrt{\beta^2 k^2 + \alpha k} + \beta k} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + \frac{\alpha}{k}} + \beta} \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{\alpha}{2\beta}$$

Dunque tutti i punti del tipo $\frac{\alpha}{2\beta}$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $\beta \in \mathbb{N}$ sono di accumulazione per A.

Dunque tutti i punti di $\mathbb{Q}$ sono di accumulazione per A. A questo punto dovrà essere pure vero che tutti i punti di $\mathbb{R}$ sono di accumulazione per A. Infatti: sia $x \in \mathbb{R}$ e siano $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ e $\beta_k \in \mathbb{N}$ tali che

$$\frac{\alpha_k}{2\beta_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$$

Scegliamo $m_k = \beta_k^2 k^2 \in \mathbb{N}$ e poi $n_k = m_k + \alpha_k k$
$\cap$
$\mathbb{N}$
per k grande.

Allora

$$\sqrt{n_k} - \sqrt{m_k} = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\beta_k^2 + \frac{\alpha_k}{k}} + \beta_k} = \frac{\alpha_k}{\beta_k} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha_k}{\beta_k^2}\frac{1}{k}} + 1} \xrightarrow[k\to\infty]{} x.$$

Infatti $\frac{\alpha_k}{\beta_k^2}\frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{\beta_k}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{\alpha_k}{\beta_k}}_{\to 2x} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\to 0} \longrightarrow 0.$ $\square$

ESERCIZIO 5.10 Sia $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$ e consideriamo l'insieme

$$A = \{ e^{inx} \in \mathbb{C} \; ; \; n \in \mathbb{N} \} \subset S^1$$

dove $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| = 1 \}$.

Provare che i punti di accumulazione di A sono tutto S^1.

Risoluzione. ~~Fissato~~ Osserviamo che

$$m \neq n \implies e^{inx} \neq e^{imx} .$$

Se infatti fosse $e^{inx} = e^{imx}$ allora

$$1 = e^{inx - imx} = e^{i(n-m)x}$$

e quindi $(n-m)x = 2k\pi$, per un qualche $k \in \mathbb{Z}$

e quindi $x = \frac{k}{n-m} \cdot 2\pi \in 2\pi\mathbb{Q}$, assurdo.

Deduciamo che $\forall \delta > 0$ esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tali che

$$|e^{inx} - e^{imx}| < \delta .$$

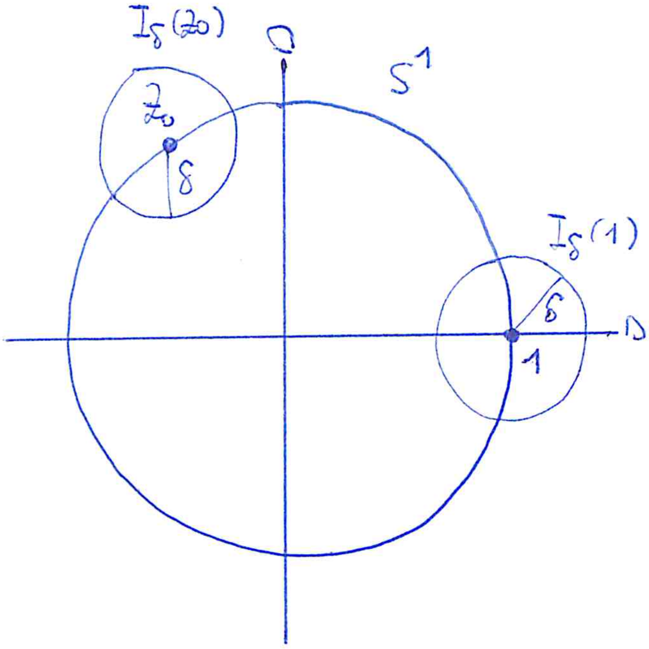
[Provare in modo formale questa affermazione].

Ma allora

$$|e^{i(n-m)x} - 1| < \delta .$$

Questo prova che $1 \in S^1$ è un punto di accumulazione di A. Sia ora $z_0 \in S^1$ e consideriamo

$$I_\delta(z_0) = \{ z \in S^1 : |z - z_0| < \delta \}$$



Sia $\bar{n} = n - m$. Allora $e^{i \bar{n} x} \in I_\delta(1)$. Abbiamo

$$\left| e^{i(k+1)\bar{n}x} - e^{ik\bar{n}x} \right| = \left| e^{i\bar{n}x} - 1 \right| < \delta .$$

Questo implica che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $e^{ik\bar{n}x} \in I_\delta(z_0)$.
Quindi $A \cap I_\delta(z_0) \neq \phi$.

$\square$

ESERCIZIO 8.8 Calcolare i seguenti

$$\liminf_{n\to\infty} \sin(n) \quad e \quad \limsup_{n\to\infty} \sin(n).$$

Risoluzione. Sappiamo che

$$\sin(n) = \mathrm{Im}\,(e^{in})$$

Qui abbiamo (vedi es. precedente) $x = 1 \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Q}$.
Siccome $i \in S^1$ è punto di accumulazione di

$$A = \{ e^{in} \in \mathbb{C} \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$$

deduciamo che

$$\limsup_{n\to\infty} \sin(n) = 1.$$

Siccome $-i \in S^1$ è p.to di accumulazione di A segue che

$$\liminf_{n\to\infty} \sin(n) = -1.$$

Abbiamo dimostrato di più: $\forall L \in [-1,1]$ esiste una selezione crescente di indici $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{k\to\infty} \sin(n_k) = L.$$

<u>ESERCIZIO 10.5</u> Siano $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua ed $A \subset \mathbb{R}$.

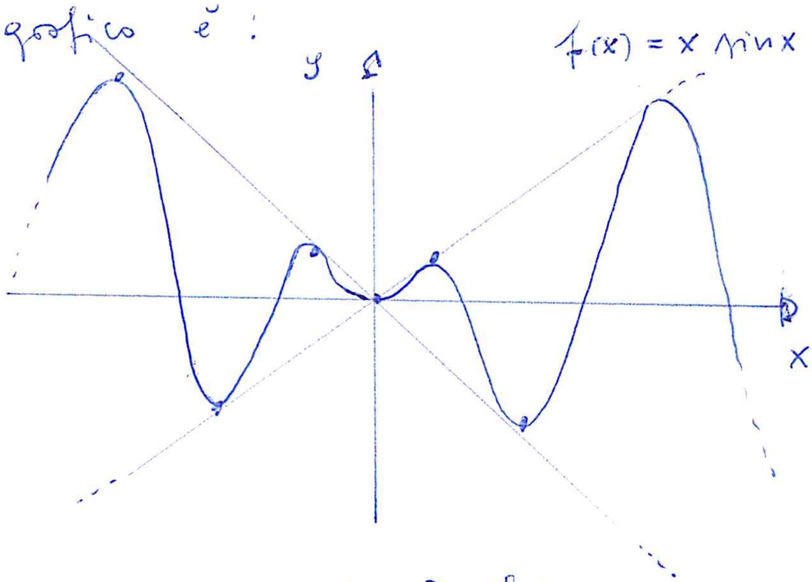
i) $f(A) \subset \mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}$ aperto. Vero o falso?

ii) $A \subset \mathbb{R}$ aperto $\Rightarrow$ $f(A) \subset \mathbb{R}$ aperto. Vero o falso?

Risoluzione. i) È falso. Si consideri questa funzione

$$f(x) = x \sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Il suo grafico è:



L'insieme $A = [0, \infty)$ è chiuso e non è aperto. Tuttavia si ha $f(A) = \mathbb{R}$ che è aperto. Questo è un controesempio alla affermazione i).

ii) È falso. Si consideri la funzione $f(x) = \sin x$ ed $A = \mathbb{R}$, che è aperto. Tuttavia $f(A) = f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ che è chiuso e non aperto. Questo è un controesempio a ii).

$\square$

<u>Commento</u>. Rispondere alle domande i) e ii) sotto le ipotesi che f sia continua e <u>monotona</u>.

ESERCIZIO 10.6 Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione ~~continua~~ e si consideri l'insieme ("epigrafico")

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1) f continua $\Rightarrow$ $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto. Vero o falso?

2) $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\Rightarrow$ f continua. Vero o falso?

Risoluzione. 1) É vero. Sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

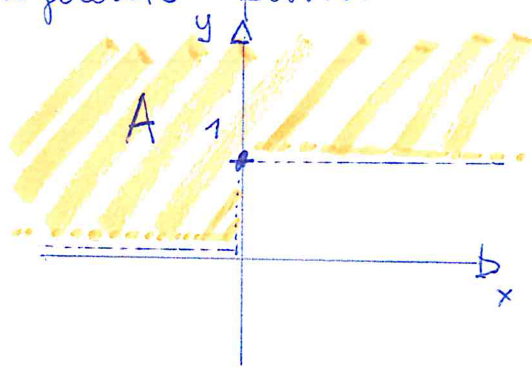
$$F(x,y) = y - f(x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

É continua da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ in quanto somma di funzioni continue. Inoltre,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) > 0\} = F^{-1}(]0,\infty[)$$

è aperto essendo preimmagine continua di un aperto.

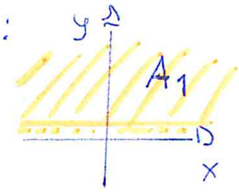
2) É falso. Si consideri la seguente funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



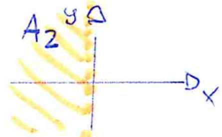
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

f non è continua nel punto $x = 0$ (c'è una discontinuità di "salto").

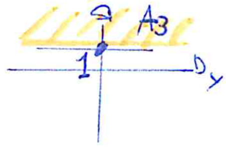
Adesso proviamo che $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x) \}$ è aperto. Consideriamo questi tre insiemi:



$$A_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \} \quad \text{è aperto}$$



$$A_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \} \quad \text{è aperto}$$



$$A_3 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1 \} \quad \text{è aperto}$$

Allora si ha:

intersezione di due aperti

$$A = \underbrace{\underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\text{aperto}} \cup \underbrace{A_3}_{\text{aperto}}}_{\text{aperto in quanto unione di aperti}}$$

□

ESERCIZIO. Provare che ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ aperto è unione numerabile di intervalli aperti.

Risoluzione. L'insieme $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è numerabile. Per ogni $q \in \mathbb{Q}$ consideriamo

$$\mathcal{A}_q = \left\{ I \subset \mathbb{R} : \begin{array}{l} I \text{ intervallo aperto} \\ \text{tale che } q \in I \\ \text{e } I \subset A \end{array} \right\}$$

e definiamo

$$I_q = \bigcup_{I \in \mathcal{A}_q} I \, .$$

Allora:

1) Se $q \in A$ allora $\mathcal{A}_q \neq \emptyset$ e quindi $I_q \neq \emptyset$

2) I_q è aperto in quanto unione di aperti

3) I_q è un intervallo. Facile da provare (Esercizio).

Siano ora $p, q \in \mathbb{Q} \cap A$, e supponiamo che $I_p \cap I_q \neq \emptyset$. Allora $I_p \cup I_q$ è un intervallo che contiene sia p che q, è aperto e contenuto in A. Dalla definizione di I_p ed I_q:

$$I_p \cup I_q \subset I_p \implies I_q \subset I_p$$

$$I_p \cup I_q \subset I_q \implies I_p \subset I_q$$

Quindi $I_p = I_q$.

In conclusione, dati $p, q \in \mathbb{Q} \cap A$ ci sono solo due casi:

Caso 1: $I_p \cap I_q = \emptyset$ (intervalli disgiunti)

Caso 2: $I_p = I_q$ (intervalli coincidenti).

Diciamo che $p \sim q$ se $I_p = I_q$. È una relazione di equivalenza. Il quoziente

$$A \cap \mathbb{Q}/\sim \; = \{ [q] \; ; \; q \in A \cap \mathbb{Q} \}$$

è finito o numerabile, perché $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Dunque

$$\bigcup_{[q] \in A \cap \mathbb{Q}/\sim} I_q \overset{\circledast}{\subset} A$$

è un'unione disgiunta, finita o numerabile.

Proviamo che in $\circledast$ c'è "$=$".

Se $x \in A$ aperto esiste $q \in A \cap \mathbb{Q}$ tale che $[x, q] \subset A$ perché $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è denso. Quindi $[x, q] \subset I_q$ ed in particolare $x \in I_q$.

$\square$

ESERCIZIO 11.3 Provare che il seguente insieme

$$K = \left\{ \frac{1+ni}{n+i} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{i\}$$

è compatto in $\mathbb{C}$.

Risoluzione. Usiamo la definizione topologica di continuità. Sia $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un ricoprimento aperto di K:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \supset K, \quad \text{con } A_\alpha \subset \mathbb{C} \text{ aperti.}$$

Osserviamo che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1+ni}{n+i} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} + i}{1 + \frac{i}{n}} = i.$$

Esiste $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ tale che $i \in A_{\bar{\alpha}}$. Dunque esiste $r > 0$ tale che $B(i,r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z-i| < r \} \subset A_{\bar{\alpha}}$. Dalla definizione di limite segue che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1+ni}{n+i} \in B(i,r) \subset A_{\bar{\alpha}}$$

per ogni $n \geq \bar{n}$.

Per ogni $n = 1, \dots, \bar{n}-1$ esiste $\alpha_n \in \mathcal{A}$ tale che $\frac{1+ni}{n+i} \in A_{\alpha_n}$.

In conclusione si ha

$$K \subset A_{\bar\alpha} \cup \bigcup_{n=1}^{\bar n - 1} A_{\alpha_n}\,,$$ ricoprimento finito.

Dunque ogni ricoprimento aperto di K ha un sottoricoprimento finito.

* * *

Usiamo ora la compattezza sequenziale. Sia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tutta contenuta in K.

Primo caso: L'insieme $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene finiti elementi (distinti). Allora esiste una sottosuccessione costante (e quindi convergente ad un elemento di K).

Secondo caso: L'insieme $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene infiniti elementi (distinti). Quindi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possiede una sottosuccessione che è pure una sottosuccessione di $\left\{\frac{1+ni}{n+i}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, che dunque converge ad $i\in K$.

***

Usiamo il Teorema di Heine-Borel: K è limitato (è una successione convergente unita al suo limite) ed è chiuso (è un insieme di punti isolati uniti al loro punto di accumulazione).

ESERCIZIO 11.7 Sia $f_\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha x^2 - 1}{(x+1)(x+\alpha)}, \qquad x \geq 0,$$

con $\alpha > 0$ parametro. Consideriamo l'insieme

$$K_\alpha = \{ x \geq 0 : -2 < f_\alpha(x) \leq 1 \} \subset \mathbb{R}.$$

Per ciascun $\alpha > 0$ stabilire se:

1) K_α è aperto

2) K_α è chiuso

3) K_α è compatto.

Risoluzione. f_α è razionale (quoziente di polinomi) e $(x+1)(x+\alpha) \neq 0$ nel dominio. Quindi f_α è continua.

Si ha $f_\alpha(0) = -\frac{1}{\alpha} < 0$ e inoltre

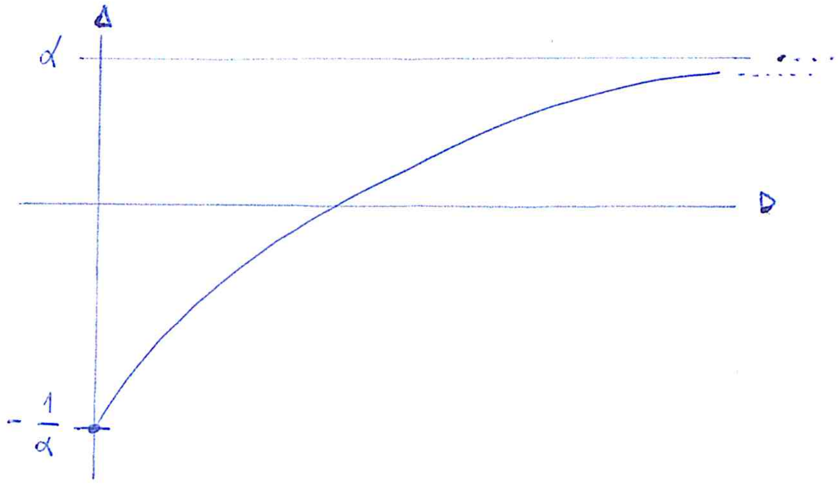
$$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha - \frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)} = \alpha.$$

Infine osserviamo che

$$x \longmapsto f_\alpha(x) = \frac{\overbrace{\alpha - \frac{1}{x^2}}^{\text{cresce}}}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}_{\text{decresce}}}$$

è crescente.

Il grafico di f_α è dunque circa il seguente:



Dunque $0 \in K_\alpha \iff -\frac{1}{\alpha} > -2 \iff \alpha > \frac{1}{2}$.

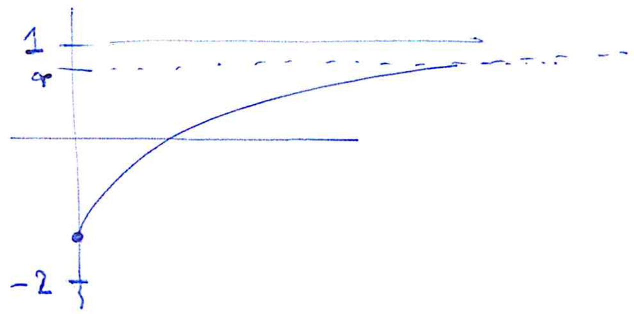
Inoltre: $\lim_{x \to \infty} f_\alpha(x) \leq 1 \iff \alpha \leq 1$.

Distinguiamo vari casi:

Caso 1: $\alpha \leq 1$ (e $\alpha > 0$)

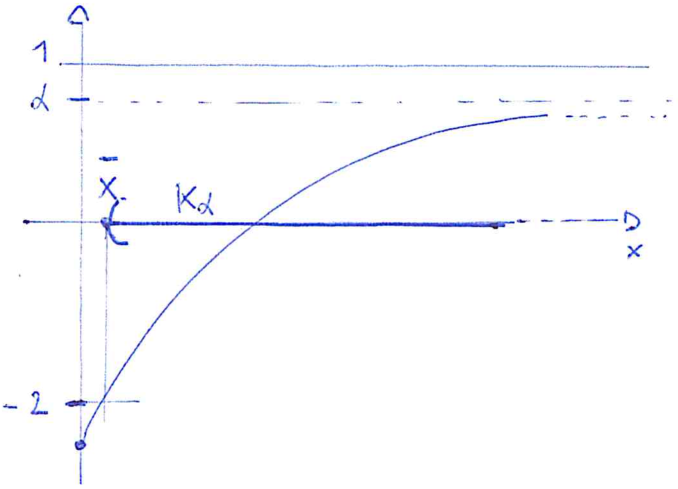
Caso 2: $\alpha > 1$.

<u>Caso 1A</u>: $\alpha \leq 1$ e $\alpha > \frac{1}{2}$ (ovvero $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$)



$K_\alpha = [0, \infty)$ è chiuso (non aperto) ma non compatto non essendo limitato.

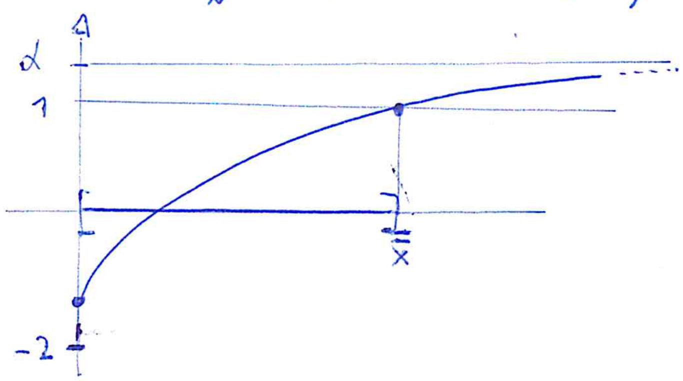
CASO 1B : $\alpha \leq 1$ e $\alpha \leq \frac{1}{2}$ (ovvero $\alpha \leq \frac{1}{2}$)



Detto $\bar{x} > 0$ il punto tale che $f_\alpha(\bar{x}) = -2$, si ha

$K_\alpha = (\bar{x}, \infty)$ aperto (non chiuso, né compatto)

CASO 2A : $\alpha > 1$ e $\alpha > \frac{1}{2}$ (ovvero $\alpha > 1$)



Detto $\bar{\bar{x}} > 0$ il punto tale che $f_\alpha(\bar{\bar{x}}) = 1$ (esiste unico)

si ha

$K_\alpha = [0, \bar{\bar{x}}]$ compatto (chiuso e limitato)

CASO 2B : $\alpha > 1$ e $\alpha \leq \frac{1}{2}$, Vuoto

ESERCIZIO 11.8 Stabilire se il seguente insieme

$$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4+y^4-x^2+y^2 \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^2$$

è compatto.

Risoluzione. La funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^4+y^4-x^2+y^2$$

è continua (polinomio). Dunque

$$K = f^{-1}(\underbrace{]-\infty, 1]}_{\text{chiuso}}) \subset \mathbb{R}^2 \text{ è chiuso.}$$

Se è anche limitato, dal Teorema di Heine-Borel segue che è compatto.

Poniamo $\xi = x^2 \geq 0$ ed $\eta = y^2 \geq 0$. Verifichiamo:

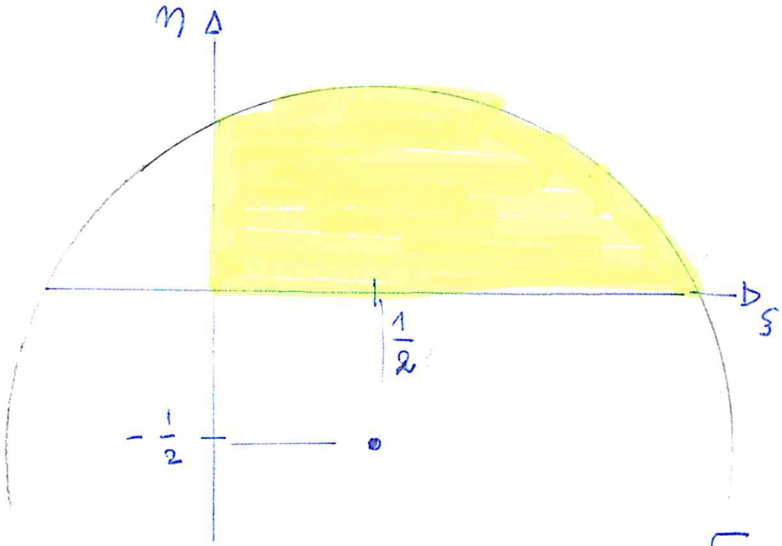
$$\xi^2+\eta^2-\xi+\eta \leq 1,$$

$$\xi^2-\xi+\frac{1}{4}+\eta^2+\eta+\frac{1}{4} \leq 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

ovvero

$$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta+\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}.$$

Dunque il punto (ξ, η) è nel cerchio chiuso di raggio $\sqrt{\frac{3}{2}}$ e centro $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$



Quindi $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ e $0 \leq \eta \leq \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}$.

Deduciamo che K è limitato e quindi compatto.

Esercizio: Rappresentare K nel piano ($\to$ "quadrifoglio").

ESERCIZIO 9.11 Provare che:

1) la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

2) La funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

Risoluzione. 1) Dobbiamo provare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che: ($\forall x, y \in \mathbb{R}$ vale:)

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| < \varepsilon .$$

Facciamo le seguenti stime:

$$\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| = \frac{\big| |x| - |y| \big|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \leq \frac{|x-y|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} .$$

Ora osserviamo che

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \geq \sqrt{|x-y|}$$

infatti passando ai quadrati:

$$|x| + 2\sqrt{|xy|} + |y| \geq |x-y|$$

che è vero in quanto $|x-y| \leq |x| + |y|$.

In definitiva abbiamo che

$$\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ con la scelta ~~$\delta = \sqrt{\varepsilon}$~~ $\delta = \varepsilon^2$ vale che

$$|x-y| < \delta \implies \left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right| < \varepsilon.$$

$\square$

2) Dobbiamo provare che $\exists\, \varepsilon > 0$ tale che $\forall\, \delta > 0$ esistono punti $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $|x-y| < \delta$ MA $|x^2-y^2| \geq \varepsilon$.

Proviamo con $\varepsilon = 1$. Abbiamo

$$|x^2-y^2| = |(x-y)(x+y)| = |x-y| \cdot |x+y|.$$

Cerchiamo punti $x, y > 0$ con $x > y$, di modo che

$$|x^2-y^2| = (x-y)(x+y).$$

Sia $\delta > 0$ arbitrario e imponiamo $x - y < \delta$ ovvero $x < y + \delta$. Possiamo scegliere $x = y + \delta/2$

Quindi

$$|x^2-y^2| = \frac{\delta}{2} \cdot \left(2y + \frac{\delta}{2}\right)$$

Abbiamo ancora la libertà di scegliere $y > 0$.

Possiamo imporre la condizione

$$\frac{\delta}{2}\left(2y + \frac{\delta}{2}\right) \geq \varepsilon = 1$$

ovvero $$y \geq \frac{1}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{\delta} - \frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{4}.$$

$\square$

ESERCIZIO 12.4 Sia (X,d) uno spazio metrico completo. Sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi tali che

1) $K_{n+1} \subset K_n \neq \phi$

2) $\operatorname{diam} K_n := \sup_{x,y\in K_n} d(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Provare che esiste $x\in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

Risoluzione. Sia $x_n \in K_n$ per ogni $n\in\mathbb{N}$.
Proviamo che la successione è di Cauchy.
Se $m \geq n$ allora $x_m, x_n \in K_n$ perché $K_m \subset K_n$.
dunque

$$d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam} K_n < \varepsilon \quad \text{per } n \geq \bar{n}.$$

Quindi esiste $x\in X$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

$$\left.\begin{array}{l} x_m \in K_n \ \forall m \geq n \\ x_m \to x \\ K_n \text{ chiuso} \end{array}\right\} \Rightarrow x \in K_n \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

La conclusione è che $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \phi$.
Se poi $x,y\in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ allora $d(x,y) \leq \operatorname{diam} K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
da cui: $d(x,y) = 0$, ovvero $x = y$.

ESERCIZIO 12.6 Sia $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iniettiva.

Definiamo $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$:

$$d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

1) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico

2) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è completo se e solo se $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso (nel topologia standard).

Risoluzione. 2) Sia $(\mathbb{R}, d)$ completo e proviamo che $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso.

Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \bar{x}$, per punti $x_n \in \mathbb{R}$.

Dunque $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ con la distanza standard. Ovvero: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$ perché $d(x_n, x_m) = |\varphi(x_n) - \varphi(x_m)|$.

Per ipotesi esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $d(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

ovvero

$$0 = \lim_{n \to \infty} |\varphi(x_n) - \varphi(x)| = |\bar{x} - \varphi(x)| \implies \bar{x} = \varphi(x)$$

ovvero $\bar{x} \in \varphi(\mathbb{R})$.

Questo prova che $\varphi(\mathbb{R}) = \overline{\varphi(\mathbb{R})}$.

Supponiamo ora che $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ sia chiuso e proviamo che $(\mathbb{R}, d)$ è completo.

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in $(\mathbb{R}, d)$. Ovvero:

$(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ con distanza standard.

Per completezza di $\mathbb{R}$ standard:

$$\underset{\varphi(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{\varphi(x_n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x} \in \mathbb{R}$$

Ma $\varphi(\mathbb{R})$ è chiuso e $\bar{x} \in \overline{\varphi(\mathbb{R})} = \varphi(\mathbb{R})$. Quindi esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $\bar{x} = \varphi(x)$. Ma allora

$$d(x_n, x) = |\varphi(x_n) - \varphi(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

$\square$