Analisi Matematica 1A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 27/8/2019

Esercizio 1 (10pt) Calcolare i seguenti

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{3}\sqrt[3]{n - \frac{1}{3}} \right\} \quad \text{e} \quad L^+ = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{3}\sqrt[3]{n - \frac{1}{3}} \right\},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Risposte: 1) $L^- =$ 0 ; 2) $L^+ =$ 1

Esercizio 2 i) (4pt) Provare che la successione $b_n = \cos(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ha primitiva limitata.

ii) (3pt) Stabilire se converge (semplicemente) la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

iii) (3pt) Stabilire se converge la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)\sin(n)$.

Risposte: 3) serie ii) converge: si/no sí ; 4) serie iii) converge: si/no no

Esercizio 3 Dato un parametro reale $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin|x|}{|x|^\alpha} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e sia $K_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \subset \mathbb{R}$. Per ciascun $\alpha > 0$ stabilire se:

i) (2pt) $K_\alpha \neq \emptyset$ oppure no;

ii) (5pt) K_α è chiuso oppure no;

iii) (3pt) K_α è compatto oppure no.

Risp.: 5) $K_\alpha \neq \emptyset$ per $\alpha \in \mathbb{R}^+$; 6) K_α chiuso per $\alpha \in (0,1)$; 7) K_α compatto per $\alpha \in (0,1)$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Calcolare i seguenti

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{3}\sqrt[3]{n - \frac{1}{3}} \right\}$$

$$L^+ = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{3}\sqrt[3]{n - \frac{1}{3}} \right\}$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Risoluzione. Certamente $0 \le L^- \le L^+ \le 1$.

Voglio provare: $L^- = 0$

Scelgo $n \in \mathbb{N}$ fatto in questo modo

$$n = 27\, m^3 + 1 \qquad m \in \mathbb{N}$$

per togliere la radice cubica

per fare $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

positivo

Per togliere $\frac{1}{3}$

Allora abbiamo

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{n - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{27\, m^3 + \frac{2}{3}}$$

e

$$m < \frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3 + \frac{2}{3}} \overset{?}{<} m+1$$

Chiaro

Mi domando se è vero

La disuguaglianza con ? è:

$$\sqrt[3]{27m^3+\frac{2}{3}} < 3(m+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$27m^3+\frac{2}{3} < 27(m^3+3m^2+3m+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{3} < 27(3m^2+3m+1)$$

VERA $\forall\, m \geq 0$

Quindi la parte intera di $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3+\frac{2}{3}}$ è m e dunque

$$\left\{\frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3+\frac{2}{3}}\right\} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3+\frac{2}{3}} - m =$$

$$= m\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{27m^3}} - m$$

$$= m\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\frac{1}{27m^3}} - 1\right)$$

Uso $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+o(t)$

$$= m\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{27m^3}+o\left(\frac{2}{3}\frac{1}{27m^3}\right)-1\right)$$

$$= \frac{2}{9\cdot 27\cdot m^2}+o\left(\frac{1}{m^2}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Questo prova che $L^- = 0$.

Adesso devo capire il limite superiore.

Scelgo $n \in \mathbb{N}$ fatto così:

$$n = \underbrace{27m^3}_{\substack{\text{motivi} \\ \text{come sopra}}} + 0 = 27m^3$$

per fare $0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ e alla fine rimane $27m^3 - \frac{1}{3} < 27m^3$.

Ora abbiamo

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{n - \frac{1}{3}}$$

$$\parallel$$

$$m - 1 \overset{?}{<} \frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3 - \frac{1}{3}} < m$$

Mi chiedo se vale — Chiaro

La disuguaglianza è $27(m-1)^3 < 27m^3 - \frac{1}{3}$ ovvero

$$27(m^3 - 3m^2 + 3m - 1) < 27m^3 - \frac{1}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{27(-3m^2 + 3m - 1)}_{\substack{\downarrow \text{ per } m \to \infty \\ -\infty}} < -\frac{1}{3}$$

È vera definitivamente

Dunque

$$
\left\{ \frac{1}{3} \sqrt[3]{27n^3 - \frac{1}{3}} \right\} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{27n^3 - \frac{1}{3}} - (n-1) =
$$

$$
= n \sqrt[3]{1 - \frac{1}{3} \frac{1}{27n^3}} - n + 1
$$

$$
= n \left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{3} \frac{1}{27n^3}} - 1 \right) + 1
$$

$$
= n \left(- \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{27n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + 1
$$

$$
= - \frac{1}{9 \cdot 27 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 .
$$

Questo prova che $L^+ = 1$.

$\square$

ESERCIZIO

i) Provare che la successione $b_n = \cos(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ha primitiva limitata.

ii) Dire se converge (semplicemente) la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

iii) Dire se converge (semplicemente) la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \sin(n).$$

Risoluzione. i) La primitiva di $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata.

Infatti,

$$\sum_{n=0}^{N} \cos(n) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{Re}\,(e^{in}) = \mathrm{Re} \sum_{n=0}^{N} (e^{i})^n =$$

$$= \mathrm{Re}\,\frac{1-e^{(N+1)i}}{1-e^{i}}$$

e quindi

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \cos(n)\right| \leq \left|\mathrm{Re}\,\frac{1-e^{(N+1)i}}{1-e^{i}}\right| \leq \left|\frac{1-e^{(N+1)i}}{1-e^{i}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{|1-e^{i}|} < \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

ii) $b_n = \cos n$ ha primitiva limitata e $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

è infinitesima decrescente:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin(0) = 0 \quad e \quad \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Per il Criterio di Abel-Dirichlet la serie al punto ii) converge.

iii) Sappiamo questo: se $x \notin \pi\mathbb{Q}$ allora la successione $(e^{ixn})_{n\in\mathbb{N}}$ è densa nella circonferenza.

Chiaramente $1 \notin \pi\mathbb{Q}$ perché π è irrazionale.

Quindi esiste $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ selezione di indici tale che $e^{ixn_k} \overset{x=1}{=} e^{in_k}$ converge dove vogliamo. Ad esempio:

$$e^{in_k} = \cos n_k + i \sin n_k \to \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi

$$\lim_{k\to\infty} \cos n_k \sin n_k = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

E quindi $\lim_{n\to\infty} \sin(n)\cos(n) \neq 0$ (in effetti non esiste). Quindi la serie al punto iii) non può convergere. È violata la condizione necessaria di convergenza.

□

ESERCIZIO Dato un parametro reale $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin|x|}{|x|^\alpha} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

e sia $K_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \subset \mathbb{R}$.

Per ciascun $\alpha > 0$ stabilire se:

i) $K_\alpha \neq \emptyset$ oppure no;

ii) K_α è chiuso oppure no;

iii) K_α è compatto oppure no.

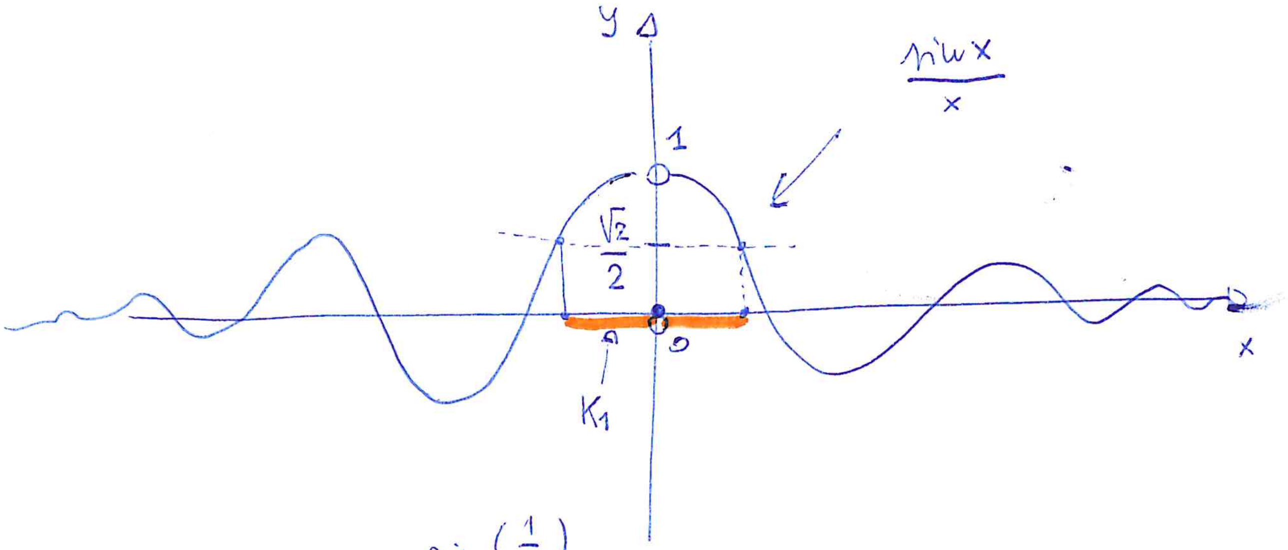
Risoluzione i) Osserviamo che $f(1) = \dfrac{\sin 1}{1} = \sin 1 \geq$ $\geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, per ~~ogla~~ ogni $\alpha > 0$. Dunque si ha che $1 \in K_\alpha$ per ogni $\alpha > 0$ e quindi $K_\alpha \neq \emptyset$ sempre.

ii) Osserviamo che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ \infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Dunque per $\alpha < 1$ f è continua. In questo caso K_α è chiuso essendo $K_\alpha = f_\alpha^{-1}\Big(\underbrace{\left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)}_{\text{chiuso}}\Big)$ con f_α continua.

Quando $\alpha = 1$ il grafico di f è circa il seguente



Siccome $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ i punti $\frac{1}{n}$ appartengono a K_1 e tuttavia $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ con $0 \notin K_1$.

Quindi K_1 NON è chiuso.

Quando $\alpha > 1$ la situazione è simile. Abbiamo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}} = +\infty \quad \text{per } \alpha > 1$$

e quindi $\frac{1}{n} \in K_\alpha$ (definitivamente).

Ma anche in questo caso $0 \notin K_\alpha$. Dunque K_α non è chiuso.

iii) Per $\alpha \geq 1$ K_α non è compatto perché non è chiuso. Vediamo se per $\alpha < 1$ l'insieme K_α è limitato. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin|x|}{|x|^\alpha} = 0 \quad \text{per } \alpha > 0.$$

Dunque esiste $M_\alpha > 0$ tale che

$$|x| > M_\alpha \implies \frac{\sin|x|}{|x|^\alpha} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dunque $K_\alpha \subset [-M_\alpha, M_\alpha]$ è limitato.
Per Heine-Borel K_α è compatto per $\alpha < 1$.

$\square$