Analisi Matematica 1A — Tema A

Nome, cognome, matricola: — Scritto del 14/2/2019

Scrivere le risposte nelle caselle incorniciate.
Verranno corretti solo i compiti con almeno 3 risposte giuste su 7.

Esercizio 1 Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme del piano Euclideo

$$K_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + \alpha xy + y^2 \leq 1\}.$$

i) (1pt) Per quali α l'equazione $t^2 + \alpha t + 1 = 0$ ha almeno una soluzione $t \in \mathbb{R}$?

ii) (10pt) Determinare tutti gli α tali che K_α sia chiuso, compatto, nè aperto nè chiuso.

Risposte:	1) Esiste sol. $t \in \mathbb{R}$ per $\alpha \in$ $|\alpha| \geq 2$	2) K_α chiuso per $\alpha \in$ $|\alpha| \leq 2$
	3) compatto per $\alpha \in$ $|\alpha| < 2$	4) nè aperto nè chiuso per $\alpha \in$ $|\alpha| \geq 2$

Esercizio 2 Dato un parametro $\beta \in \mathbb{R}$, si consideri la successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita in modo ricorsivo da $a_0 = 2$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 + a_n + \frac{\beta^2}{1 + a_n}\Big). \qquad n \geq 0.$$

i) (6pt) Studiare la monotonia della successione.

ii) (3pt) Provare che esiste e calcolare il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

iii) (2pt) Per quali β la successione è strettamente decrescente?

Risposte: 5) $L =$ $\sqrt{1+\beta^2}$	; 6) strettamente decrescente per $\beta \in$ $\beta^2 < 3$

Esercizio 3 Si consideri la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}} \log n}.$$

i) (4pt) Stabilire se la serie converge assolutamente.

ii) (2pt) Provare che

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 + b_n \qquad \text{con} \qquad |b_n| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}, \qquad n \geq 1.$$

iii) (4pt) Stabilire se la serie converge semplicemente (lecito usare ii) anche se non provato).

Risposte: 7) CA si/no: No	; CS si/no: Si

2 ore e 30 minuti a disposizione

Analisi Matematica 1A   Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 14/2/2019

Scrivere le risposte nelle caselle incorniciate.
Verranno corretti solo i compiti con almeno 3 risposte giuste su 7.

Esercizio 1 Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme del piano Euclideo

$$K_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + 4\alpha xy + y^2 \leq 1\}.$$

i) (1pt) Per quali α l'equazione $t^2 + 4\alpha t + 1 = 0$ ha almeno una soluzione $t \in \mathbb{R}$?

ii) (10pt) Determinare tutti gli α tali che K_α sia chiuso, compatto, nè aperto nè chiuso.

Risposte: 1) Esiste sol. $t \in \mathbb{R}$ per $\alpha \in$ $|\alpha| \geq 1/2$ 2) K_α chiuso per $\alpha \in$ $|\alpha| \leq 1/2$
3) compatto per $\alpha \in$ $|\alpha| < 1/2$ 4) nè aperto nè chiuso per $\alpha \in$ $|\alpha| > 1/2$

Esercizio 2 Dato un parametro $\beta \in \mathbb{R}$, si consideri la successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita in modo ricorsivo da $a_0 = 2$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 + a_n + \frac{3\beta^2}{1 + a_n}\Big), \qquad n \geq 0.$$

i) (6pt) Studiare la monotonia della successione.

ii) (3pt) Provare che esiste e calcolare il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

iii) (2pt) Per quali β la successione è strettamente decrescente?

Risposte: 5) $L =$ $\sqrt{1+3\beta^2}$; 6) strettamente decrescente per $\beta \in$ $\beta^2 < 1$

Esercizio 3 Si consideri la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \log^2 n}.$$

i) (4pt) Stabilire se la serie converge assolutamente.

ii) (2pt) Provare che

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 + b_n \qquad \text{con} \qquad |b_n| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}, \qquad n \geq 1.$$

iii) (4pt) Stabilire se la serie converge semplicemente (lecito usare ii) anche se non provato).

Risposte: 7) CA si/no: NO ; CS si/no: si

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme $K_\alpha \subset \mathbb{R}^2$

$$K_\alpha = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + \alpha xy + y^2 \leq 1 \} .$$

i) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione $t^2+\alpha t+1=0$ ha almeno una soluzione $t \in \mathbb{R}$?

ii) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che K_α sia chiuso.

iii) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che K_α sia compatto.

iv) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme K_α non è né aperto né chiuso?

Risoluzione. i) Il discriminante dell'equazione $t^2+\alpha t+1=0$ è $\Delta = \alpha^2-4$. Perché ci sia una soluzione deve essere $\alpha^2-4 \geq 0$.

ii) Sappiamo che $-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Dunque

$$x^2+\alpha xy+y^2 \geq x^2-|\alpha|\,|xy|+y^2 \geq x^2-\frac{|\alpha|}{2}(x^2+y^2)+y^2 =$$

$$= \left(1-\frac{|\alpha|}{2}\right)(x^2+y^2)$$

Vediamo che se $|\alpha| \leq 2$ allora $x^2+\alpha xy+y^2 \geq 0$ sempre.

In questo caso

$$K_\alpha = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+\alpha xy+y^2 \leq 1 \}$$

$$= \quad F^{-1}(]-\infty,1]) \quad \text{è chiuso}$$

in quanto $F(x,y) = x^2+\alpha xy+y^2$ è continua.

Vedremo che per $|\alpha|>2$ K_α non è chiuso.

iii) Se $|\alpha|<2$ abbiamo

$$x^2+y^2 \leq \frac{x^2+\alpha xy+y^2}{1-|\alpha|/2} \leq \frac{1}{1-|\alpha|/2} < \infty$$

Quindi K_α è limitato e dunque compatto (Heine Borel).

Se $|\alpha| \geq 2$ sia $t \in \mathbb{R}$ una soluzione di $t^2+\alpha t+1=0$.

Allora i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\frac{x}{y} = t$ (oppure $\frac{y}{x}=t$) verificano $x^2+\alpha xy+y^2=0$ e quindi sono in K_α, che pertanto non è limitato.

Conclusione: K_α è compatto $\Leftrightarrow |\alpha|<2$

iv) Il punto $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ è in K_α, ma $(1+r,0) \notin K_\alpha$ per $r>0$. Quindi $(1,0) \in K_\alpha$ non è interno e dunque K_α non è mai aperto.

Ora proviamo che per $|\alpha|>2$ l'insieme K_α non è chiuso. Supponiamo ad esempio $\alpha>2$. Con $y=-x$ si trova:

$$x^2+\alpha xy+y^2 = x^2-\alpha x^2+x^2 = (2-\alpha)x^2 \leq 0$$

ed inoltre $(2-\alpha)x^2 > -1 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{\alpha-2}$.

Dunque il punto $\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha-2}}, -\sqrt{\frac{1}{\alpha-2}}\right)$ è in ∂K_α ma non in K_α.

Conclusione: K_α né aperto né chiuso $\Leftrightarrow |\alpha|>2$ $\square$

ESERCIZIO Sia $\beta \in \mathbb{R}$ un parametro fissato e si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita in modo ricorsivo da $a_0 = 2$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + a_n + \frac{\beta^2}{1+a_n}\right), \quad n \geq 0.$$

i) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Provare che esiste e calcolare il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$

iii) Per quali $\beta \in \mathbb{R}$ la successione è strettamente decrescente?

Risoluzione: i) Sia $\phi(x) = \frac{1}{2}\left(1+x+\frac{\beta^2}{1+x}\right)$, $x \geq 0$.

Studiamo la disequazione $\phi(x) \geq x$:

$$\frac{1}{2}\left(1+x+\frac{\beta^2}{1+x}\right) \geq x \iff (1+x)^2 + \beta^2 \geq 2x(1+x)$$

$$\iff x^2+2x+1+\beta^2 \geq 2x+2x^2$$

$$\iff x^2 \leq 1+\beta^2.$$

Deduzioni: 1) a_n cresce fintanto che $a_n \leq \sqrt{1+\beta^2}$;

2) a_n decresce fintanto che $a_n \geq \sqrt{1+\beta^2}$.

Allora studiamo la disequazione $\phi(x) \leq \sqrt{1+\beta^2}$:

$$\frac{1}{2}\left(1+x+\frac{\beta^2}{1+x^2}\right) \leq \sqrt{1+\beta^2} \iff (1+x)^2+\beta^2 \leq 2\sqrt{1+\beta^2}\,(1+x)$$

$$\iff (1+x)^2 - 2\sqrt{1+\beta^2}\,(1+x) + \beta^2 \leq 0$$

Le radici di $t^2 - 2\sqrt{1+\beta^2}\,t + \beta^2 = 0$ sono $t_\pm = \sqrt{1+\beta^2} \pm 1$

Quindi $\phi(x) \leq \sqrt{1+\beta^2}$ se e solo se

$$\sqrt{1+\beta^2} - 1 \leq 1+x \leq \sqrt{1+\beta^2} + 1$$

ovvero se e solo se $\sqrt{1+\beta^2} - 2 \leq x \leq \sqrt{1+\beta^2}$.

Deduzioni:

1) Se $\sqrt{1+\beta^2} - 2 \leq \overset{2}{\overset{\shortparallel}{a_0}} \leq \sqrt{1+\beta^2}$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cresce
   e rimane $a_n \leq \sqrt{1+\beta^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Se $a_0 \geq \sqrt{1+\beta^2}$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decresce e rimane
   $a_n \geq \sqrt{1+\beta^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Se $a_0 \leq \sqrt{1+\beta^2} - 2$ allora $a_1 \geq a_0$, ma di più!
   $a_1 \geq \sqrt{1+\beta^2}$ e da questo punto in poi a_n
   decresce.

ii) In tutti i casi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente monotona e limitata. Quindi il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ esiste. Passando al limite nella relazione ricorsiva si ottiene

$$L = \frac{1}{2}\left(L+1 + \frac{\beta^2}{1+L} \right)$$

e sappiamo che l'unica soluzione positiva è $L = \sqrt{1+\beta^2}$.

iii) La successione è strettamente decrescente quando $2 = a_0 > \sqrt{1+\beta^2}$, ovvero $\beta^2 < 3$.

$\square$

ESERCIZIO Si consideri la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}\; n \log n}$$

i) Stabilire se la serie converge assolutamente.

ii) Provare che

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 + b_n \quad \text{con} \quad |b_n| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$$

iii) Studiare la convergenza semplice della serie.

Risoluzione i) Dobbiamo dire se converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\; n \lg n}.$$

Siccome $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg n},$$

Con il criterio di condensazione di Cauchy si vede che questa serie diverge:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \lg 2^n} = \frac{1}{\lg 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

ii) Abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 + \frac{1-\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} = 1 + b_n$$

con

$$|b_n| \overset{=}{\leq} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{n} - 1.$$

Come visto in classe, consideriamo $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$.

Per Bernoulli:

$$\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1+a_n \iff \sqrt{n} = (1+a_n)^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n a_n$$

Quindi $a_n \leq \dfrac{\sqrt{n}-1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Partendo da $\sqrt[n]{n} = (1+a_n)^2 = 1 + 2a_n + a_n^2$ si trova

$$\sqrt[n]{n} - 1 = 2a_n + a_n^2 \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$$

iii) Abbiamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}\, n \log n} = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}}_{\substack{\text{converge} \\ \text{semplicemente} \\ \text{(Leibniz)}}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n \log n}}_{\substack{\text{Proviamo che} \\ \text{converge} \\ \text{assolutamente}}}$$

Infatti

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n b_n}{n \log n} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^{3/2} \log n} \underset{\text{Fatto noto}}{<} \infty .$$

$\square$