Analisi Matematica 1A — Tema A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 31/1/2019

Scrivere le risposte nelle caselle incorniciate.
Verranno corretti solo i compiti con almeno 3 risposte giuste su 8.

Esercizio 1 (10pt) Si consideri la successione di numeri reali

$$a_n = \left\{ \frac{1}{2}\left(n - \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right)\right\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria. Calcolare i seguenti:

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{ed} \qquad L^+ = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Risposte: 1) $L^- =$ 0 ; 2) $L^+ =$ 1/2

Esercizio 2 (10pt) Per ciascuna $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - x^{n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

i) (8pt) Calcolare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie converga assolutamente.

ii) (1pt) Provare che per $x \in [0, 1[$ si ha $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$.

iii) (1pt) Calcolare il limite $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Risposte: 3) Serie converge per $x \in$ $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 4) $L =$ $-\infty$

Esercizio 3 (12pt) Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme del piano Euclideo

$$K_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < y^2 - \alpha x^2 + 2y \leq 1\}.$$

Per ciascun valore di α stabilire se K_α è chiuso, compatto, aperto, nè aperto nè chiuso.

Risposte: 5) chiuso per $\alpha \in$ $(-\infty, 0]$	6) compatto per $\alpha \in$ $(-\infty, 0[$
7) aperto per $\alpha \in$ $\emptyset$	8) nè aperto nè chiuso per $\alpha \in$ $]0, \infty)$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Analisi Matematica 1A — Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 31/1/2019

Scrivere le risposte nelle caselle incorniciate.
Verranno corretti solo i compiti con almeno 3 risposte giuste su 8.

Esercizio 1 (10pt) Si consideri la successione di numeri reali

$$a_n = \left\{ \frac{1}{2}\left(n + \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} \right) \right) \right\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria. Calcolare i seguenti:

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{ed} \qquad L^+ = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Risposte: 1) $L^- =$ 1/2 ; 2) $L^+ =$ 1

Esercizio 2 (10pt) Per ciascuna $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + x^{n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

i) (8pt) Calcolare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie converga assolutamente.

ii) (1pt) Provare che per $x \in [0,1[$ si ha $f(x) \geq \frac{1+x}{2(1-x)}$.

iii) (1pt) Calcolare il limite $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Risposte: 3) Serie converge per $x \in$ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ 4) $L =$ $+\infty$

Esercizio 3 (12pt) Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme del piano Euclideo

$$K_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x^2 + \alpha y^2 + 2x \leq 1\}.$$

Per ciascun valore di α stabilire se K_α è chiuso, compatto, aperto, nè aperto nè chiuso.

Risposte: 5) chiuso per $\alpha \in$ $[0,\infty)$	6) compatto per $\alpha \in$ $]0,\infty)$
7) aperto per $\alpha \in$ $\emptyset$	8) nè aperto nè chiuso per $\alpha \in$ $(-\infty, 0[$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Si consideri la successione di numeri reali

$$a_n = \left\{ \frac{1}{2} \left(n + \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} \right) \right) \right\}$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria. Calcolare i seguenti

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{ed} \quad L^+ = \limsup_{n\to\infty} a_n .$$

Risoluzione. Osserviamo che

$$\frac{\pi n^2}{n+1} = \pi n \left(\frac{n}{n+1} \right) = \pi n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \pi n - \frac{\pi n}{n+1} ,$$

e quindi

$$\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} \right) = \cos\left(\pi n - \frac{\pi n}{n+1} \right) = \left[\begin{array}{l} \text{distinguo} \\ n \text{ pari ed} \\ n \text{ dispari} \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} (n = 2m) \\ \\ (n = 2m+1) \end{array} \quad = \begin{cases} \cos\left(2\pi m - \dfrac{2\pi m}{2m+1} \right) = \cos\left(- \dfrac{2\pi m}{2m+1} \right) \\ \cos\left((2m+1)\pi - \dfrac{(2m+1)\pi}{2m+2} \right) = \cos\left(\pi - \dfrac{(2m+1)\pi}{2m+2} \right) \end{cases}$$

ovvero:

$$\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} \right) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{2\pi m}{2m+1} \right) & \text{se } n = 2m \text{ è pari} \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2m+2} \right) & \text{se } n = 2m+1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque si ha

$$a_{2m} = \left\{ \frac{1}{2}\left(2m + \cos\left(\frac{2\pi m}{2m+1}\right)\right\} \right.$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi m}{2m+1}\right)\right\} \qquad \boxed{-1 < \cos\left(\frac{2\pi m}{2m+1}\right) < 0}$$

$$= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi m}{2m+1}\right) - (-1)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi m}{2m+1}\right) \xrightarrow[m \to \infty]{} 1 + \frac{1}{2}\cos(\pi) = \frac{1}{2}.$$

E poi:

$$a_{2m+1} = \left\{ \frac{1}{2}\left(2m+1 + \cos\left(\frac{\pi}{2m+2}\right)\right)\right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2m+2}\right)\right\} \qquad \boxed{0 < \cos\left(\frac{\pi}{2m+2}\right) < 1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2m+2}\right) \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Deduciamo che $L^- = \frac{1}{2}$ ed $L^+ = 1$.

ESERCIZIO Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - x^{n+1}}{1+x^{2n}} .$$

1) Calcolare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie converga.

2) Provare che per $x \in [0,1[$ si ha $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$.

~~3) Provare che~~ $\cancel{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

3) Calcolare il limite $L = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Risoluzione. Per $x=1$ si ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-1}{2} = 0$

e la serie converge. Per $x=-1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{1+x^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{2} \quad \text{NON DEFINITA.}$$

Per $|x|<1$ si trova

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n(1-x)}{1+x^{2n}} \right| \underset{\text{usato } x^{2n} \ge 0}{\le} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = (1-x) \frac{1}{1-|x|} < \infty$$

Dunque per $0 \le x < 1$ si trova $f(x) \le 1$.

Sempre per $0 \leq x < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{1+x^{2n}} \geq \sum_{\substack{n=0 \\ x^{2n} \leq 1}}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{2} = \frac{1-x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{2}.$$

Questo prova che $f(x) \geq \frac{1}{2}$ per $x \in [0,1[$.

Ora guardiamo il caso $|x| > 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n(1-x)}{1+x^{2n}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n(1+|x|)}{|x|^{2n}} \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^{2n}} =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|}{|x|^n} = 2|x| \frac{1}{1-\frac{1}{|x|}} = \frac{2|x|^2}{|x|-1} < \infty$$

Quindi c'è convergenza assoluta per $|x|>1$.

Dunque la serie converge per $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ora consideriamo $x > 1$. Il termine generale è negativo:

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(x-1)}{1+x^{2n}} \leq -(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2x^{2n}} = -\frac{(x-1)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

e quindi $f(x) \leq -\frac{(x-1)}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}x$.

Per confronto:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri l'insieme

$$K_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x^2 + \alpha y^2 + 2x \leq 1\}.$$

Per ciascun valore di α stabilire se K_α è chiuso, compatto aperto, né aperto né chiuso.

Risoluzione. Completando il quadrato in x, le condizioni che definiscono K_α si riscrivono in questo modo:

$$-2 < (x^2 + 2x + 1) - 1 + \alpha y^2 \leq 1 \iff -1 < (x+1)^2 + \alpha y^2 \leq 2$$

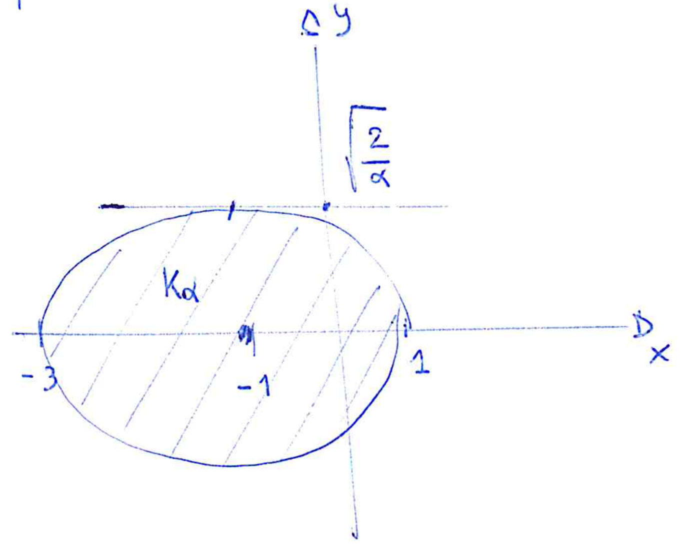
Quando $\alpha \geq 0$ la disequazione $-1 < (x+1)^2 + \alpha y^2$ è sempre verificata. Dunque per $\alpha \geq 0$ si ha

$$K_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + \alpha y^2 \leq 2\}$$
$$= F^{-1}(]-\infty, 2])$$

dove $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = (x+1)^2 + \alpha y^2$ è continua. Quindi per $\alpha \geq 0$ l'insieme K_α è chiuso. Non è aperto perché i punti dove $(x+1)^2 + \alpha y^2 = 2$ sono di frontiera.

Quando $\alpha = 0$ l'insieme K_α non è limitato, perché y è libera. Quindi per $\alpha = 0$, K_α è chiuso ma non compatto (Heine - Borel).

Quando $\alpha > 0$, la disequazione $(x+1)^2 + \alpha y^2 \leq 2$ identifica i punti dentro un'ellisse (frontiera inclusa):



Dunque K_α è limitato e quindi compatto.

Rimane da studiare il caso $\alpha < 0$.

Consideriamo punti $(x,y) \in K_\alpha$ con $x = 1$.
L'ordinata y deve verificare:

$$-5 < \alpha y^2 \leq -2$$

ovvero ($\alpha < 0$)

$$\frac{2}{|\alpha|} \leq y^2 < \frac{5}{|\alpha|} .$$

L'insieme di tali y non è né aperto né chiuso.

Quindi per $\alpha < 0$, K_α non è né aperto né chiuso.