Analisi Matematica 1A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 14/1/2020

Esercizio 1 Dato un parametro reale $\alpha \in [-1,1]$ si consideri la successione definita in modo ricorsivo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n^2 + 1 - \alpha\right), \quad n \geq 0,$$

con $a_0 = 5/4$.

i) (5pt) Studiare la monotonia della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) (3pt) Discutere l'esistenza finita del limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

iii) (2pt) Calcolare il limite $L \in \mathbb{R}$.

Risposte: ii) il limite esiste finito per $\alpha \in$; iii) $L =$

Esercizio 2 (10pt) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log((2n)!)]^\alpha}.$$

Risposte: La serie converge se e solo se $\alpha \in$

Esercizio 3 Dato l'inisieme $X = [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ si definisca la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = |\cos x - \cos y| + |\sin x - \sin y|.$$

i) (2pt) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.

ii) (6pt) Stabilire se (X, d) è uno spazio metrico completo.

iii) (4pt) Stabilire se (X, d) è (sequenzialmente) compatto.

Risposte: ii)) X completo: si/no: ; iii) X compatto: si/no

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Sia $\alpha \in [-1,1]$ un parametro reale si consideri la successione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n^2 - \alpha + 1\right), \quad n \geq 1,$$

e $a_0 = \dfrac{5}{4}$.

i) Studiare la monotonia della successione

ii) Discutere l'esistenza (finita) del limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

iii) Quando esiste, calcolare il limite $L \in \mathbb{R}$.

Risoluzione. Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $\phi(x) = \frac{1}{2}(x^2 - \alpha + 1)$

I limiti (finiti) della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono da cercarsi fra le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ dell' equazione $\phi(x) = x$, ovvero

$$x^2 - \alpha + 1 = 2x \iff x^2 - 2x + 1 = \alpha$$
$$\iff (x-1)^2 = \alpha$$

Se $\alpha < 0$ l'equazione non ha soluzione. Quindi per $\alpha \in [-1,0)$ la successione non può avere limite finito. Per $\alpha \geq 0$ si trova $x = 1 \pm \sqrt{\alpha}$.

Per studiare la monotonia risolviamo preliminarmente la disequazione $\phi(x) \leq x$, ovvero

$$x^2 - \alpha + 1 \leq 2x \iff (x-1)^2 \leq \alpha$$

Se $\alpha < 0$ la diseq. non è mai verificata.

Deduciamo (per induzione) che per $\alpha < 0$ la successione è crescente.

Quando $\alpha \geq 0$ la disequazione $\phi(x) \leq x$ equivale a $|x-1| \leq \sqrt{\alpha}$ ovvero

$$\phi(x) \leq x \iff 1-\sqrt{\alpha} \leq x \leq 1+\sqrt{\alpha}.$$

Deduciamo questo:

$$a_n \in [1-\sqrt{\alpha}, 1+\sqrt{\alpha}] \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$$

e inoltre

$$a_n > 1+\sqrt{\alpha} \Rightarrow a_{n+1} > a_n > 1+\sqrt{\alpha}.$$

In questo secondo caso $(a_n > 1+\sqrt{\alpha})$ la successione e' certamente crescente da n in poi.

Deduciamo che

$$a_0 = \frac{5}{4} > 1+\sqrt{\alpha} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è crescente}$$

Siccome i possibili limiti sono solo $1 \pm \sqrt{\alpha}$ deduciamo che

$$0 \leq \alpha < \frac{1}{16} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Rimane da studiare il caso $\alpha \in [\frac{1}{16}, 1]$. In questo caso

$$1 - \sqrt{\alpha} < \frac{5}{4} = a_0 \leq 1 + \sqrt{\alpha} \; . .$$

Avremo $a_1 = \phi(a_0) \leq a_0 \leq 1 + \sqrt{\alpha}$. Se vale anche $a_1 \geq 1 - \sqrt{\alpha}$ allora sarà anche $a_2 \leq a_1$ e la successione sarà decrescente per induzione. Per chiudere il ragionamento dobbiamo verificare che

$$x \in [1 - \sqrt{\alpha}, 1 + \sqrt{\alpha}] \Rightarrow \phi(x) \in [1 - \sqrt{\alpha}, 1 + \sqrt{\alpha}] .$$

Il fatto che $\phi(x) \leq 1 + \sqrt{\alpha}$ è già stato provato.
Proviamo che $\phi(x) \geq 1 - \sqrt{\alpha}$, ovvero:

$$\frac{1}{2}(x^2 - \alpha + 1) \geq 1 - \sqrt{\alpha} \iff x^2 - \alpha + 1 \geq 2 - 2\sqrt{\alpha}$$
$$\iff x^2 \geq 1 - 2\sqrt{\alpha} + \alpha = (1 - \sqrt{\alpha})^2$$

Siccome $\alpha \in [0,1]$ abbiamo $1 - \sqrt{\alpha} \geq 0$ e quindi

$$\phi(x) \geq 1 - \sqrt{\alpha} \overset{(x \geq 0)}{\iff} x \geq 1 - \sqrt{\alpha} .$$

Conclusione: per induzione ora possiamo provare che per $\alpha \in [\frac{1}{16}, 1]$

$$a_n \in [1 - \sqrt{\alpha}, 1 + \sqrt{\alpha}] \quad \text{e} \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} .$$

Dunque il limite $L = \lim_{n \to \infty} a_n$ esiste finito e dovrà essere $L = 1 - \sqrt{\alpha}$.

ESERCIZIO Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^{\alpha}}$$

Risoluzione. Per $\alpha \leq 0$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^{\alpha}} = +\infty$$

È violata la condizione necessaria di convergenza e dunque la serie diverge.

Studiamo il caso $\alpha > 0$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\log(2n)! &= \log(2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1) \\
&= \sum_{i=2}^{2n} \log(i) \\
&\geq \sum_{i=n}^{2n} \log(i) \qquad n \geq 2 \\
&\geq \log(n) \cdot (2n - (n-1)) \\
&= (n+1)\log(n)
\end{aligned}$$

Dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^{\alpha}} \overset{(\alpha>0)}{\leq} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha}(\log n)^{\alpha}}$$

Per Confronto Asintotico l'ultima serie converge se e solo se converge

$$\circledast \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}(\log n)^{\alpha}}$$

Per $\alpha - 1 < 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}(\log n)^{\alpha}} = \infty$

e dunque la serie diverge.

Per $\alpha - 1 \geq 0$ il termine generale è decrescente e possiamo usare il Criterio di Cauchy per dire che la serie $\circledast$ converge se e solo se converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^{\alpha-1}(\log 2^n)^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2^n)^{\alpha-2} n^{\alpha} (\log 2)^{\alpha}}$$

Se $\alpha - 2 < 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2^n)^{\alpha-2} n^{\alpha}} = +\infty$

e la serie non converge.

Se $\alpha - 2 \geq 0$ la serie invece converge, ed è facile da vedere.

Conclusione raggiunta per confronto:

$$\alpha \geq 2 \implies \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}(\log n)^{\alpha}} < +\infty .$$

Rimane da studiare il caso $0 < \alpha < 2$

Abbiamo $\log(2n)! \leq 2n \cdot \log(2n)$ e

dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{[\log(2n)!]^{\alpha}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(2n)^{\alpha}(\log 2n)^{\alpha}} = \square$$

Con conti del tutto analoghi ai precedenti si vede che

$$0 < \alpha < 2 \implies \square = +\infty .$$

Risposta finale: Serie Converge $\iff \alpha \geq 2$.

$\square$