Analisi Matematica 1A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 18/6/2019

Esercizio 1 (7pt) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n^2)!} n^{kn}.$$

Risposte: 1) Serie converge per $k \in$ $\mathbb{R}$

Esercizio 2 Sia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ la funzione

$$\varphi(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}, \quad x \geq 0,$$

e fissato $a_0 \geq 0$ definiamo in modo ricorsivo la successione $a_{n+1} = \varphi(a_n)$ per $n \geq 0$.

i) (4pt) Studiare le disequazioni $\varphi(x) \leq x$ e $\varphi(x) \leq 1$, limitatamente ad $x \geq 0$.

ii) (4pt) Studiare la monotonia della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al variare di a_0.

iii) (3pt) Provare che esiste finito o infinito e calcolare il limite $L = \lim_{n \to \infty} a_n$ al variare di $a_0 \geq 0$.

Risposte: 2) $\varphi(x) \leq x$ per $x \in$ $[0,1]$; 3) $\varphi(x) \leq 1$ per $x \in$ $[0,1]$; 4) $L = \begin{cases} 0 & \text{se } a_0 \in [0,1) \\ 1 & \text{se } a_0 = 1 \\ +\infty & \text{se } a_0 > 1 \end{cases}$

Esercizio 3 Dato l'inisieme $X = [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ si definisca la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |\cos x - \cos y| + |\sin x - \sin y|.$$

i) (2pt) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.

ii) (6pt) Stabilire se (X, d) è uno spazio metrico completo.

iii) (4pt) Stabilire se (X, d) è (sequenzialmente) compatto.

Risposte: 5) X completo: si/no: sì ; 6) X compatto: si/no sì

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Al variare di $k \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n^2)!} n^{kn}.$$

Risoluzione. Detta $a_n = \frac{(n!)^2}{(n^2)!} n^{kn}$, usiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{[(n+1)^2]!} (n+1)^{k(n+1)} \frac{(n^2)!}{(n!)^2 n^{kn}}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2[(n+1)^2-1] \cdot \ldots \cdot [n^2+1]} \frac{(n+1)^{kn}}{n^{kn}} (n+1)^k$$

$$= \frac{(n+1)^k}{\underbrace{[n^2+2n] \cdot \ldots \cdot [n^2+1]}_{2n \text{ termini}}} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k$$

$$\leq \underbrace{\frac{(n+1)^k}{(n^2+1)^{2n}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \forall k \in \mathbb{R}} \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k}_{\to e^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Per il Criterio del Rapporto la serie converge $\forall k \in \mathbb{R}$.

□

ESERCIZIO Dato $a_0 \geq 0$ definiamo in modo ricorsivo la successione

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^3}{a_n^2+1}, \quad \text{per } n \geq 0.$$

1) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di a_0.

2) Provare che esiste finito o infinito il limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

e calcolarlo al variare di $a_0 \geq 0$.

Risoluzione. 1) Sia $\phi(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$, per $x \geq 0$.
Studiamo $\phi(x) \leq x$:

$$\frac{2x^3}{x^2+1} \leq x \iff 2x^2 \leq x^2+1$$
$$\iff x^2 \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 1 \quad (x \geq 0)$$

Quindi a_n decresce se $a_n \leq 1$ mentre cresce se $a_n \geq 1$.

Studiamo $\phi(x) \leq 1$:

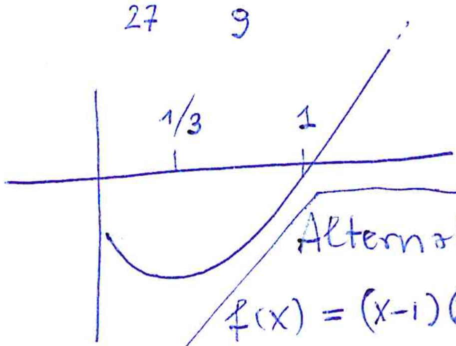
$$\frac{2x^3}{x^2+1} \leq 1 \iff 2x^3 \leq x^2+1$$
$$\iff f(x) = 2x^3 - x^2 - 1 \leq 0$$

Breve studio di funzione: $f'(x) = 6x^2 - 2x$
$= 2x(3x-1)$

Dunque $f \downarrow$ per $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ mentre $f \uparrow$ per $x \geq \frac{1}{3}$

Abbiamo $f(0) = -1$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} - 1 < 0$

$f(1) = 0$



Deduciamo che $f(x) \leq 0$
$\Updownarrow$
$0 \leq x \leq 1$.

Alternativamente:
$f(x) = (x-1)(2x^2 - 3x + 1)$
e si fa lo studio esatto.

Per induzione deduciamo le seguenti cose:

1) $a_0 \leq 1 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decresce e rimane $a_n \leq 1$ $\forall n$.

2) $a_0 \geq 1 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cresce e rimane $a_n \geq 1$ $\forall n$.

In particolare: $a_0 = 1 \Rightarrow a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

In tutti i casi esiste il limite $L = \lim_{n \to \infty} a_n$.

In particolare:

1) $a_0 \leq 1 \Rightarrow L \in [0, 1]$

2) $a_0 \geq 1 \Rightarrow L \in [1, \infty]$

Se $L \in \mathbb{R}$ passiamo al limite in

$$L = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 a_n^3}{a_n^2 + 1} = \frac{2L^3}{L^2 + 1}$$

da cui $L^3 + L = 2L^3 \Leftrightarrow L = L^3 \Leftrightarrow L = 0$ oppure $L = 1$.
($L = -1$ si scarta)

Deduciamo che

1) $0 \leq a_0 < 1 \Rightarrow L = 0$

2) $a_0 = 1 \Rightarrow L = 1$

3) $a_0 > 1 \Rightarrow L = +\infty$ (crescente senza limite finito)

$\square$

ESERCIZIO Sull'insieme $X = [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}$ sia $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = |\cos x - \cos y| + |\sin x - \sin y| .$$

1) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.

3) Stabilire se (X,d) è (sequenzialmente) compatto.

2) Stabilire se (X, d) è completo.

Risoluzione 1) Controlliamo gli assiomi di spazio metrico:

i) $d \geq 0$ VERO. Se $d(x,y) = 0$ allora

$$\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \\ x, y \in [0, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow x = y . \quad \text{VERO}$$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ VERO per il valore assoluto

iii) Dis. triangolare:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\cos x - \cos y| + |\sin x - \sin y| \\ &\leq |\cos x - \cos z| + |\cos z - \cos y| + \\ &+ |\sin x - \sin z| + |\sin z - \sin y| = d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

2) Sia $x_n \in X$ di Cauchy in d:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ \begin{matrix} \forall n \geq \bar{n} \\ \forall m \geq \bar{n} \end{matrix} : \ d(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

Siccome $x_n \in [0, 2\pi[$ per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione tale che

$$\lim_{k \to \infty} |x_{n_k} - x_\infty| = 0$$

per un qualche $x_\infty \in [0, 2\pi]$.

1° CASO: $x_\infty \in [0, 2\pi[$. Allora:

$$\lim_{k \to \infty} |\cos(x_{n_k}) - \cos(x_\infty)| + |\sin(x_{n_k}) - \sin(x_\infty)| = 0$$

perché sin e cos sono continue.

2° CASO: $x_\infty = 2\pi$. Definiamo $\overline{x_\infty} = 0 \in X$. Allora

$$\lim_{k \to \infty} |\cos(x_{n_k}) - \cos(\overline{x_\infty})| + |\sin(x_{n_k}) - \sin(\overline{x_\infty})| = 0.$$

In tutti i casi: Esiste $x \in X$ tale che

$$\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, x) = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, avremo: $\exists\, \forall n \geq \bar{n}$

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{\substack{< \\ \varepsilon \\ \text{per } n \geq \bar{n} \ \exists \\ n_k \geq \bar{n} \\ \text{per Cauchy}}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{\substack{< \\ \varepsilon \ \text{per } k \geq \bar{k} \\ \exists}} < 2\varepsilon.$$

Soluzione alternativa del punto 2):

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in (X,d):

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}\in\mathbb{N}\ \forall m,n\geq\bar{n}$ si ha:

$$|\cos x_n - \cos x_m| + |\sin x_n - \sin x_m| < \varepsilon .$$

Quindi $(\cos x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\sin x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono di Cauchy in $\mathbb{R}$ con la distanza standard.

Quindi

$$\begin{aligned} \cos x_n &\longrightarrow \alpha \in [-1,1] \\ \sin x_n &\longrightarrow \beta \in [-1,1] \\ &\ \ n\to\infty \end{aligned}$$

con convergenza nella distanza standard.

Inoltre, sin e cos sono continue e quindi

$$\alpha^2+\beta^2 = \lim_{n\to\infty}(\cos x_n)^2 + \lim_{n\to\infty}(\sin x_n)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(\cos x_n)^2 + (\sin x_n)^2\right]$$

$$= 1$$

Quindi esiste $x\in[0,2\pi[$ (unico) tale che

$$\alpha = \cos x \quad \text{e} \quad \beta = \sin x$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} |\cos x_n - \cos x| + |\sin x_n - \sin x| = 0$$

e questo significa che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$. □

Soluzione di 3). Nel punto 2) (primo sol.) abbiamo provato questo:

ogni successione in (X,d) ha una sottosuccessione che converge in (X,d).

Quindi (X,d) è sequenzialmente compatto. □

Alternativamente: si può ragionare come nella seconda soluzione del punto 2). □

<u>Terza soluzione. Solo idea generale.</u>

Sia $\mathbb{R}^2$ con distanza $\delta((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$. La circonferenza

$$K = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

è compatta.

La funzione $\varphi : (X, d) \to (K, \delta)$

$$\varphi(x) = (\cos x, \sin x)$$

è un'isometria suriettiva. Dunque:

$$
\begin{array}{ccc}
(K, \delta) \text{ compatto} & \Rightarrow & (X, d) \text{ compatto} \\
 & & \Downarrow \\
 & & (X, d) \text{ completo.}
\end{array}
$$

In effetti: compatto $\Rightarrow$ completo, sempre.

$\square$