Analisi Matematica 1A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 15/7/2019

Esercizio 1 Dato l'inisieme $X = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$, si definisca la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|} + \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right|.$$

i) (3pt) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.

ii) (4pt) Stabilire se (X, d) è uno spazio metrico completo.

iii) (4pt) Stabilire se l'insieme $K = (0, 1] \subset X$ è compatto nella topologia di (X, d).

Risposte: 1) X completo: si/no: ; 2) K compatto: si/no

Esercizio 2 Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[n]{n}}.$$

i) (2pt) Provare che $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$ definitivamente per $n \in \mathbb{N}$.

ii) (3pt) Studiare la convergenza semplice della serie.

iii) (4pt) Studiare la convergenza assoluta della serie.

Risposte: 3) CS: si/no: ; 4) CA: si/no

Esercizio 3 i) (8pt) Dato un numero reale $x \in (0, 1)$, calcolare i seguenti

$$L^-(x) = \liminf_{n \to \infty} \{(-1)^n \sqrt{n^2 + 2nx}\},$$

$$L^+(x) = \limsup_{n \to \infty} \{(-1)^n \sqrt{n^2 + 2nx}\},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

ii) (2pt) Rispondere alle domande del punto i) nel caso $x \in (1, 2)$.

Risposte: 5) $L^-(x) =$; 6) $L^+(x) =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Dato l'insieme $X =]0, \infty) \subset \mathbb{R}$, si consideri la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = \sqrt{|x-y|} + \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right| .$$

i) Stabilire se (X,d) è uno spazio metrico.

ii) Stabilire se (X,d) è completo oppure no.

iii) Stabilire se l'insieme $K =]0,1] \subset X$ è compatto nella topologia di (X,d).

Risoluzione i) (X,d) è uno SM. Infatti:

- $d(x,y) \geq 0$ $\forall x,y \in X$ è vero. Se poi $d(x,y) = 0$ allora in particolare $\sqrt{|x-y|} = 0$ e quindi $x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$ segue facilmente dalle proprietà del valore assoluto.
- Disuguaglianza triangolare: Alla fine -

ii) Proviamo che (X,d) è completo. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq \bar{n}$ vale:

$$\sqrt{|a_n - a_m|} + \left| \frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_m}} \right| < \varepsilon .$$

In particolare,

$$|a_n - a_m| < \varepsilon^2 < \varepsilon, \text{ se } 0 < \varepsilon < 1,$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_m}} \right| < \varepsilon .$$

Quindi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ed $\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sono di Cauchy nella distanza standard. Dunque esistono $L, M \geq 0$ tali che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} = M$$

Non può essere $L = 0$, altrimenti sarebbe $M = +\infty$.
Quindi $L \in (0, \infty)$ ed $M = \frac{1}{\sqrt{L}}$ (continuità radice).

Dunque

$$\lim_{n \to \infty} d(a_n, L) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{|a_n - L|} + \left| \frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{L}} \right| = 0.$$

iii) L'insieme K non è compatto. Si consideri ad esempio

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \qquad n \geq 1.$$

Se $n \geq m+1$ allora

$$d(a_n, a_m) \geq \left| \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2}}} \right| = |n - m| \geq 1$$

e quindi a_n non può avere sottosuccessioni convergenti. (Chiaramente $a_n \in K$ $\forall n$.)

Rimane la disuguaglianza triangolare. Siano $x, y, z \in X$. Allora

$$\circledast \quad \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right| ,$$

e inoltre

$$\boxdot \quad \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|} \underset{\substack{\uparrow \\ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}}}{\leq} \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} .$$

Mettendo insieme $\circledast$ e $\boxdot$ si trova

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) .$$

$\square$

ESERCIZIO Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[n]{n}} .$$

i) Provare che $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$ definitivamente per $n \in \mathbb{N}$.

ii) Stabilire se la serie converge semplicemente.

iii) Stabilire se la serie converge assolutamente.

Risoluzione i) Si ha

$$\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n} \iff (n+1)^n \leq n^{n+1}$$

$$\iff \frac{(n+1)^n}{n^n} \leq n$$

$$\iff \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq n$$

Siccome $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}$, la disuguaglianza vale definitivamente.

ii) Sia $a_n = \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[n]{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Siccome $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

si ha che $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Dal punto i) segue che $a_{n+1} \leq a_n$ è vera definitivamente. La serie converge per il Criterio di Leibniz.

iii) Dobbiamo capire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n}}$ converge.

Bisogna capire quanto velocemente $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ tende a zero. Possiamo studiare queste disuguaglianze

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{con } \alpha > 0 \text{ da decidere,}$$

oppure

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n^\beta} \quad \text{con } \beta > 0 \text{ da decidere.}$$

Ad esempio:

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n^\beta} \iff 1 - \frac{1}{n^\beta} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\iff \left(1 - \frac{1}{n^\beta}\right)^n \geq \frac{1}{n}$$

Con $\beta = 1$ si vede che $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} > 0$

e quindi

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{n} \quad \text{è vera definitivamente.}$$

Dunque $1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n}$ è vera definitivamente.

Di conseguenza

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n}} \geq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

La serie diverge assolutamente.

ESERCIZIO i) Dato $x \in (0,1)$ calcolare

$$L^-(x) = \liminf_{n \to \infty} \left\{ (-1)^n \sqrt{n^2+2xn} \right\}$$

$$L^+(x) = \limsup_{n \to \infty} \left\{ (-1)^n \sqrt{n^2+2xn} \right\}$$

con $\{\cdot\}$ = parte frazionaria.

ii) Stessa domanda per $x \in (1,2)$.

Risoluzione i) Dobbiamo prima capire $\sqrt{n^2+2xn}$.

Si ha

$$(*) \qquad n \leq \sqrt{\underbrace{n^2+2nx}_{\geq 0}} < n+1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Controlliamo la disuguaglianza a destra:

$$\sqrt{n^2+2nx} < n+1 \iff n^2+2nx < (n+1)^2 = n^2+2n+1$$

$$\iff 2nx < 2n+1.$$

sempre verificato per $x \in (0,1)$.

Dunque, per n pari si ha:

$$\left\{(-1)^n \sqrt{n^2+2nx}\right\} = \left\{\sqrt{n^2+2nx}\right\} = \sqrt{n^2+2nx} - n$$

$$= \frac{2nx}{\sqrt{n^2+2nx}+n}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1+2x/n}+1} \xrightarrow[n \to \infty]{(n \text{ pari})} x.$$

Ora consideriamo il caso n dispari:

Siccome il punto ⊛ con $x \in (0,1)$ (ovvero $x \neq 0$) in effetti è più precisamente

$$n < \sqrt{n^2+2nx} < n+1 \quad , \quad \text{per } n \geq 1,$$

allora

$$-n-1 < -\sqrt{n^2+2nx} < -n.$$

Quindi per n dispari:

$$\left\{(-1)^n \sqrt{n^2+2nx}\right\} = \left\{-\sqrt{n^2+2nx}\right\} = -\sqrt{n^2+2nx} - (-n-1)$$

$$= n+1 - \sqrt{n^2+2nx}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}-2nx}{n+1+\sqrt{n^2+2nx}}$$

$$= \frac{2-2x+1/n}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+2x/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(n \text{ dispari})} 1-x.$$

Concludiamo che

$$L^-(x) = \min\{x, 1-x\}$$

$$L^+(x) = \max\{x, 1-x\}$$

per $x \in (0,1)$.

ii) Quando $x \in (1,2)$ si ha

$$n+1 < \sqrt{n^2+2nx} < n+2 \quad \text{definitivamente.}$$

Infatti:

- $n^2+2n+1 = (n+1)^2 < n^2+2nx \iff 2n+1 < 2nx$ Vero definitivamente perché $x>1$

- $n^2+2nx < (n+2)^2 = n^2+4n+4 \iff 2nx < 4n+4$ Vero definitivamente perché $x<2$.

Dunque, per n pari:

$$\left\{\sqrt{n^2+2nx}\right\} = \sqrt{n^2+2nx} - (n+1) = \frac{\cancel{n^2}+2nx-\cancel{n^2}-2n-1}{\sqrt{n^2+2nx}+n+1}$$

$$= \frac{2x-2-1/n}{\sqrt{1+2x/n}+1+1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x-1$$

Per n dispari:

$$\left\{-\sqrt{n^2+2nx}\right\} = -\sqrt{n^2+2nx} - (-n-2)$$

$$= n+2-\sqrt{n^2+2nx}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+4n+4-\cancel{n^2}-2nx}{n+2+\sqrt{n^2+2nx}}$$

$$= \frac{4+4/n-2x}{1+2/n+\sqrt{1+2x/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2-x$$

Dunque $L^-(x) = \min\{x-1, 2-x\}$,

$L^+(x) = \max\{x-1, 2-x\}$.

$\square$