Analisi Matematica 1 - Parte A
Quaderno degli esercizi settimanali

Roberto Monti

MATEMATICA – ANNO ACCADEMICO 2020-21

VERSIONE DEL 25 SETTEMBRE 2020

Indice

Introduzione

In questo "Quaderno degli esercizi settimanali" sono raccolte dodici schede di esercizi, una per ogni settimana del corso di Analisi Matematica 1 parte A. L'ordine degli argomenti corrisponde all'ordine che sarà seguito nella presentazione degli argomenti. Gli esercizi cercano di illustrare in modo pratico e creativo tutti gli aspetti (definizioni, teoremi, criteri, tecniche) studiati nel corso.

In ogni scheda gli esercizi sono divisi in tre gruppi: gli esercizi di base, per la cui soluzione è richiesta la sola comprensione e diretta applicazione di definizioni o teoremi; gli esercizi di livello intermedio, dove è richiesto allo studente un maggiore grado di autonomia; gli esercizi più avanzati, che sono di complessità maggiore.

Per gli esercizi contrassegnati con $\star$ possibile trovare la soluzione nel file "Quaderno delle soluzioni" disponibile on-line in forma manoscritta. Per gli esercizi contrassegnati con † possibile trovare la soluzione nei compiti d'esame degli anni precedenti, pure disponibili on-line.

Gli esercizi di questo Quaderno fanno parte integrante del programma del corso di Analisi Matematica 1 parte A.

SETTIMANA 1

Insiemi, cardinalità, induzione, Binomio di Newton

Esercizi di base

Esercizio 1.1. Siano A, B, C tre sottoinsiemi di uno stesso insieme ambiente. Verificare le formule distributive:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Esercizio 1.2. Dati due insiemi A e B, verificare che $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(B \times A)$.

Esercizio 1.3. Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni iniettive. Provare che $g \circ f : A \to C$ è iniettiva. È vero il viceversa, e cioè che se $g \circ f$ è iniettiva allora sia f che g devono essere iniettive?

Esercizio 1.4. Siano $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Verificare l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Esercizi intermedi

Esercizio 1.5. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $0 < x < 1$. Usando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale la seguente variante della disuguaglianza di Bernoulli

$$(1 - x)^n < \frac{1}{1 + nx}.$$

Esercizio 1.6. Sia $f : A \to B$ una funzione.

1) $\star$ Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha $C \subset f^{-1}(f(C))$. Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia iniettiva.
2) Provare che per ogni insieme $D \subset B$ si ha $f(f^{-1}(D)) \subset D$. Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia suriettiva.

Esercizio 1.7. $\star$ Sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f, ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita. Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
2) Stabilire se f è iniettiva. Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

Esercizio 1.8. $\star$ Siano A, B, C insiemi finiti e indichiamo con $|A| = \mathrm{Card}(A)$ la cardinalità. Provare che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Provare preliminarmente che $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Esercizio 1.9. Dimostrare che per $n \geq 1$ si ha:

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1}-1), \qquad 2) \quad \star \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Esercizio 1.10. $\star$ Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Calcolare il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x+a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x+b)^m$. Precisamente, calcolare i polinomi $s(x)$ (il quoziente della divisione) ed $r(x)$ (il resto della divisione) tali che $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, dove il grado di r è al più $m-1$.

Esercizi avanzati

Esercizio 1.11. Siano $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ e $(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$. Esibendo biiezioni concrete, provare che:

1) $\star$ $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}([0,1))$;
2) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}((0,1))$;
3) $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$.

Esercizio 1.12. $\star$ Sia $\mathcal{A} = \{I \subset \mathbb{R} : I \text{ intervallo}\}$ un insieme costituito da intervalli non degeneri $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$. Supponiamo che $\mathcal{A}$ verifichi questa proprietà: $I, J \in \mathcal{A}$ con $I \cap J \neq \emptyset$ implica $I = J$ (ovvero, gli intervalli sono a coppie disgiunti). Dimostrare che $\mathcal{A}$ è numerabile.

Esercizio 1.13. Ad un torneo partecipano $n \in \mathbb{N}$ squadre, $n \geq 3$. Ogni squadra gioca una volta con ogni altra squadra. Ci sono tre squadre A, B, C tali che A sconfigge B, B sconfigge C e C sconfigge A. Dimostrare che alla fine del torneo ci sono almeno due squadre a pari punti.

SETTIMANA 2

Numeri reali, sup e inf, parte intera

Esercizi di base

Esercizio 2.1. Sia X un insieme. Verificare che $(\mathcal{P}(X), \subset)$ è un insieme parzialmente ordinato.

Esercizio 2.2. Siano $A \subset \mathbb{R}$ un insieme e $-A = \{-x \in \mathbb{R} : x \in A\}$ l'insieme opposto. Verificare che

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

Esercizio 2.3. $\star$ Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato. Verificare che

$$\sup A - \inf A = \sup\{x - y \in \mathbb{R} : x, y \in A\}.$$

Esercizi intermedi

Esercizio 2.4. Siano dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{\frac{1+2n^2}{1+n^2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{\frac{xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0\right\},$$

$$C = \left\{x^2 - 2x\sin x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\right\}, \quad D = \left\{\frac{n^2\cos(1/n)}{1-n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 2\right\}.$$

1) Determinare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.
2) Determinare $\inf B$ e verificare che $\sup B = 1/2$. Dire se esistono $\min B$ e $\max B$.
3) Verificare che $\sup C = \infty$.
4) Verificare che $\inf D = -\infty$.

Esercizio 2.5. $\star$ Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Provare che se $\sqrt{m} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ allora anche $\sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Esercizio 2.6. † Si consideri l'insieme

$$A = \left\{\frac{n+1-n2^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

dove $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Calcolare $\sup A$, $\inf A$, e dire se esistono $\max A$ e $\min A$.

Esercizio 2.7. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \left\{n - \sqrt{n^2-1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1\right\}.$$

1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

ESERCIZIO 2.8. Sia $(X, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato. Usando ad ogni passo gli assiomi di campo ordinato verificare che $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in X$. Si veda l'Esempio 2.4 del Capitolo 2 degli Appunti del Corso.

ESERCIZIO 2.9. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ non negativi. Verificare che

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1,$$
$$[x][y] \leq [xy] \leq [x] + [y] + [x][y],$$

dove $[x]$ è la parte intera di x.

Esercizi avanzati

ESERCIZIO 2.10. $\star$ Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha:

$$[x] + [x + 1/n] + \ldots + [x + (n-1)/n] = [nx],$$

dove $[x]$ è la parte intera di x.

ESERCIZIO 2.11. $\star$ Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una funzione iniettiva tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si abbia

$$|x - y| \leq 10 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq 10.$$

Determinare la funzione f.

ESERCIZIO 2.12 (Disuguaglianza Media Geometrica-Aritmetica). Siano $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ numeri reali. Provare che

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

e dimostrare che si ha uguaglianza se e solo se i numeri sono tutti uguali fra loro.

SETTIMANA 3

Spazi metrici, disuguaglianze, successioni numeriche

Esercizi di base

Esercizio 3.1. In ciascuno dei seguenti casi, dire se la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una distanza su $\mathbb{R}$: 1) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$; 2) $d(x, y) = |x - y|^2$; 3) $d(x, y) = |e^x - e^y|$; 4) $\star$ $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$.

Esercizio 3.2. Usando la definizione di limite, verificare che

$$1) \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3}{3n^2 + 2} = \frac{2}{3}; \quad 2) \lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 1}\right) = 0.$$

Esercizi intermedi

Esercizio 3.3. Verificare che la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

è una distanza su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.4. $\star$ Usando la definizione, verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{e^{n/2} + e^{-n/2}}}{e^{n/4}} = 1.$$

Esercizio 3.5. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $|\langle x, y\rangle| = |x||y|$. Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $y = \lambda x$. Questo è il caso dell'uguaglianza nella disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Esercizio 3.6. Consideriamo la successione

$$a_n = \binom{2n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Verificare che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente;
ii) Verificare (per induzione) che $a_n \geq 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
iii) Dedurre dal punto ii) che $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Esercizio 3.7. $\star$ Siano $a_1, \ldots, a_n > 0$ numeri reali positivi. Verificare che

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\Big) \geq n^2.$$

Esercizio 3.8. $\star$ Siano $0 < x_1, \ldots, x_n < 1$ numeri reali, $n \geq 2$. Provare la disuguaglianza:

$$(1 - x_1) \cdots (1 - x_n) < 1 - x_1 \cdots x_n.$$

Esercizi avanzati

Esercizio 3.9. $\star$ Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale che verifica $a_1 > 1$ e $a_1 + \ldots + a_{n-1} < a_n$ per ogni $n \geq 2$. Provare che esiste un numero reale $q > 1$ tale che $a_n > q^n$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 3.10. Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il polinomio della variabile reale $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$$

non ha zeri reali, ovvero non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che $p(x) = 0$.

Esercizio 3.11. Studiare la convergenza della successione

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n.$$

SETTIMANA 4

Successioni reali e complesse

Esercizi di base

ESERCIZIO 4.1. Verificare che:
$\lim_{n\to\infty} n\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}-1\Big) = -1;\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4+1} = 1;\quad \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n}\Big) = -1.$

ESERCIZIO 4.2. Calcolare i seguenti limiti:
1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 3^n + 1}{n^3 2^n + (-1)^n}$; 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log^4(n) + n\arctan(n)}{n^2+\log n}$; 3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\log n + 1/n}$.

ESERCIZIO 4.3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\star \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}; \qquad \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big).$$

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 4.4. Calcolare i seguenti limiti:
1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n]{n!}}{n}$; 2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot \sqrt[n+1]{n+1}\cdot\ldots\cdot \sqrt[2n]{2n}$; 3) $\star \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

ESERCIZIO 4.5. Al variare dei numeri reali $\alpha, \beta, b > 0$ studiare la convergenza delle successioni

$$1)\ \dagger\ a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad 2)\quad b_n = \frac{1}{b^n}\binom{2n}{n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Il caso $b = 2$ pi difficile.

ESERCIZIO 4.6. † Al variare di $z \in \mathbb{C}$ studiare la convergenza della successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n = \Big(3z^n + \frac{2ni}{3ni+1}\Big)^n, \quad n\in\mathbb{N},$$

e, quando esiste, calcolarne il limite.

ESERCIZIO 4.7. Al variare di $z \in \mathbb{C}$ studiare la convergenza della successione complessa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$a_n = \frac{1+iz^n}{i+|z|^{2n}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

ESERCIZIO 4.8. Sia $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$. Calcolare tutti i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ in funzione di m tali che il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} n^\beta \left(\sqrt[m]{n+1} - \sqrt[m]{n}\right)$$

esista finito e risulti $L \neq 0$.

Esercizio 4.9. † Al variare dei numeri naturali $k, m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ calcolare il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^m}{(2kn)!}.$$

Esercizio 4.10. † Sia $\alpha > 0$ un parametro e si consideri la successione

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare i limiti:
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ per ogni $\alpha > 0$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ per $\alpha = 2$.

Esercizi avanzati

Esercizio 4.11. ⋆ Per $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n \in \mathbb{R}$ l'unica radice positiva del polinomio $p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$ nella variabile $x \in \mathbb{R}$. Provare che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.

Esercizio 4.12. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista (ad es. finito) il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Provare che anche $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

SETTIMANA 5

Successioni ricorsive, liminf e limsup

Esercizi di base

ESERCIZIO 5.1. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Provare che

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n,$$
$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

ESERCIZIO 5.2. Dimostrare che la successione numerica

$$a_n = \frac{n^2\cos(n\pi)}{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \geq 1,$$

non ha limite per $n \to \infty$.

ESERCIZIO 5.3. Calcolare i limiti inferiore e superiore della successione $a_n = \sqrt[n]{(-1)^n n}$.

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 5.4 (Algoritmo di Erone per il calcolo della radice quadrata). Siano $a_0 > 0$ ed $x > 0$ due numeri reali fissati e definiamo la successione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Provare che la successione converge e calcolarne il limite.

ESERCIZIO 5.5. $\star$ Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(x) = x - x^3$. Assegnato $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in modo ricorsivo tramite la relazione

$$a_{n+1} = \varphi(a_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1) Provare che se $a_0 \in [-1, 1]$ la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.
2) Provare che la successione converge se e solo se $|a_0| < \sqrt{2}$.

ESERCIZIO 5.6. † Siano $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$. Definiamo in modo ricorsivo la successione

$$a_{n+1} = \frac{\beta a_n^2}{1 + a_n^2}, \quad n \geq 0.$$

Discutere al variare di $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$ la convergenza della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, se esiste, calcolarne il limite. Studiare prima il caso $0 < \beta < 2$, poi il caso $\beta = 2$ e infine $\beta > 2$.

ESERCIZIO 5.7. † Calcolare i seguenti limiti inferiore e superiore

$$L^- = \liminf_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\sqrt[3]{n + \frac{5}{4}}\right\} \quad \text{e} \quad L^+ = \limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\sqrt[3]{n + \frac{5}{4}}\right\},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Esercizio 5.8. $\star$ Verificare che

$$\liminf_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} = 0, \quad \limsup_{n\to\infty}\{\sqrt{n}\} = 1,$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Esercizi avanzati

Esercizio 5.9. $\star$ Al variare del numero reale $x \in \mathbb{R}$ con $0 < x < 1$ calcolare i seguenti limite inferiore e limite superiore

$$L^-(x) = \liminf_{n\to\infty}\big\{(-1)^n\sqrt{n^2+2nx}\big\},$$
$$L^+(x) = \limsup_{n\to\infty}\big\{(-1)^n\sqrt{n^2+2nx}\big\},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria. Stabilire per quali $0 < x < 1$ esiste il limite della successione in esame.

Esercizio 5.10. $\star$ Sia $\vartheta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $|\mathrm{e}^{in\vartheta\pi} - 1| < \varepsilon$. Dedurre da questo fatto che l'insieme $\{\mathrm{e}^{in\vartheta\pi} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$ è denso nella circonferanza unitaria del piano complesso.

SETTIMANA 6

Serie numeriche

Esercizi di base

ESERCIZIO 6.1. Osservato che

$$\frac{n-1}{2^n} = 2\left(\frac{n}{2^n} - \frac{(n+1)}{2^{n+1}}\right),$$

calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n}$.

ESERCIZIO 6.2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\mathrm{e}^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii)} \star \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

ESERCIZIO 6.3. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1}; \quad \text{ii)} \star \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \big|\sin(\sin n)\big|^n.$$

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 6.4. Al variare dei numeri reali $\alpha > 0$ ed $x > 1$ studiare la convergenza delle serie

$$\star \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n!)^\alpha}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}.$$

ESERCIZIO 6.5. Al variare dei parametri studiare la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{nx}(n+1)^{n+2}}{(n+3)!},\ x \in \mathbb{R}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{(\log n)^\alpha},\ x \in (0,1),\ \alpha > 0; \quad \dagger \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 n^{xn}}{(n^2)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 6.6. $\star$ Sia Q un quadrato di lato 2 e sia Q_n, $n \geq 1$, una successione di quadrati tali che Q_n abbia lato $1/n$. È possibile disporre tutti i quadrati Q_n dentro il quadrato Q senza che si sovrappongano fra loro?

ESERCIZIO 6.7. Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$ diverge.

Esercizi avanzati

ESERCIZIO 6.8. $\star$ Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale tale che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga. Provare che anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.

Esercizio 6.9. $\star$ Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva e crescente. Provare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

converge se e solo se esiste finito il limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Esercizio 6.10. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali tali che $b_n \neq 0$ e $a_n+b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$$

convergano. Provare che converge anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}$.

SETTIMANA 7

Convergenza semplice ed assoluta. Funzione esponenziale

Esercizi di base

Esercizio 7.1. Dedurre le formule di addizione per seno e coseno per $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$

a partire dall'identità funzionale per l'esponenziale $\exp(z+\zeta) = \exp(z)\exp(\zeta)$ con $z, \zeta \in \mathbb{C}$ e dalle identità di Eulero

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}.$$

Esercizio 7.2. Risolvendo le forme indeterminate, calcolare i seguenti limiti:

$$1) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^3}{2n+1}}; \quad 2) \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!}; \quad 3) \lim_{n\to\infty} \frac{n^n + n!\log(n+1)}{2^n + (n+1)^n}.$$

Esercizi intermedi

Esercizio 7.3. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie

$$\text{i)} \star \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}\Big(\frac{x}{x+1}\Big)^{n+1}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n\big(\sin(2x)\big)^n}{n^2+1}; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}.$$

Esercizio 7.4. Al variare di $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza delle serie

$$1) \star \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sqrt[3]{1+\frac{\alpha}{n}} - \sqrt{1+\frac{\beta}{n}}\Big); \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(1/n^\alpha)}{[1-\cos(1/n)]^\beta}.$$

Esercizio 7.5. † Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)\sin\big(\frac{1}{n}\big).$$

Esercizi avanzati

Esercizio 7.6. $\star$ Provare che la costante di Eulero e non è un numero razionale.

Esercizio 7.7. † Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Esercizio 7.8. $\star$ Sia $0 < a < 1$ un numero reale.

i) Definita $a_n \in (-1, 0)$ tramite la relazione $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, provare che

$$|a_n| \leq \frac{1}{n}\Big(\frac{1-a}{a}\Big), \quad n \geq 1.$$

ii) Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1}.$$

Esercizio 7.9. $\star$ Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ non negativo calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n}.$$

Risposta: $1 - 2\{x\}$. Sopra $[x]$ e $\{x\}$ sono la parte intera e la parte frazionaria di x. Lavorare in rappresentazione binaria

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k \in \{0, 1\}.$$

Esercizio 7.10. Provare che $\lim_{n\to\infty} n \sin(2\pi n! \mathrm{e}) = 2\pi$.

SETTIMANA 8

Sottosuccessioni, punti di accumulazione, spazi metrici

Esercizi di base

Esercizio 8.1. Data una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, provare che sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ad un limite finito);
B) Esiste un numero $L \in \mathbb{R}$ con questa proprietà: ogni sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una ulteriore sottosuccessione che converge ad L.

Esercizio 8.2. 1) Costruire una successione di numeri reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la seguente proprietà. Per ogni $L \in \mathbb{R}$ esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$.
2) Stabilire se esiste una successione di numeri reali $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che per ogni $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, ci sia una sottosuccessione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$, ma non per $L = 0$.

Esercizi intermedi

Esercizio 8.3. † Si consideri l'insieme

$$A = \Big\{ \frac{i}{3^n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ i \in \mathbb{N} \text{ tale che } 3^n \leq i \leq 4^n \Big\}.$$

Calcolare l'insieme dei punti di accumulazione di A.

Esercizio 8.4. $\star$ Calcolare tutti i punti di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$

$$A = \big\{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N} \big\}.$$

Esercizio 8.5. Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ indichiamo con $D(A)$ ("derivato di A") l'insieme dei punti di accumulazione di A. Costruire un insieme $A \subset [0,1]$ tale che $D(A)$ sia numerabile.

Esercizio 8.6. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali tale che $a_{n+1} \leq a_n + 1/n$ e siano L^- ed L^+ is suoi limiti inferiore e superiore. Provare che per ogni $L \in [L^-, L^+]$ esiste una sottosuccessione convergente ad L.

Esercizio 8.7. $\star$ Si consideri la successione $a_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$. Calcolare l'insieme dei limiti di tutte le sottosuccessioni convergenti.

Esercizi avanzati

Esercizio 8.8. Sia $\alpha \in (0,1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$

$$d(x,y) = |x-y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $|\cdot|$ indica la norma Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.

SETTIMANA 9

Limiti e funzioni continue

Esercizi di base

ESERCIZIO 9.1. Usando la definizione di limite verificare che

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^4}=-\infty, \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}=2.$$

ESERCIZIO 9.2. Stabilire se esistono i seguenti limiti ed eventualmente calcolarli:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{(x^3+x^2)^{3/2}};\ \ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(x^3)}+\sqrt[3]{\sin(x^9)}}{x^3+x^4}.$$

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 9.3. Calcolare i seguenti limiti ‘risolvendo’ le ‘forme indeterminate’:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\Big);\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1};\quad 3)\ \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(\pi-x)^2};$$
$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{x^2},\ \text{con } \alpha,\beta\in\mathbb{R};\quad 5)\ \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{x-x_0},\ \text{dove } x_0>0;$$

Risposte: 1) -1; 2) $3/2$; 3) $1/8$; 4) $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$; 5) $\frac{1}{3}x_0^{-2/3}$. Ai punti 3) e 4), si assuma come noto il limite notevole $\sin x/x\to 1$ per $x\to 0$. Al punto 3): sostituzione.

ESERCIZIO 9.4. i) Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=-\frac{1}{2}.$$

ii) Calcolare il limite precedente usando le operazioni elementari sui limiti.

ESERCIZIO 9.5. Usando la definizione, provare che

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z^2}{|z|^2+1}=\frac{z_0^2}{|z_0|^2+1}$$

per ogni $z_0\in\mathbb{C}$, dove z varia in $\mathbb{C}$, e sui complessi si considera la distanza standard.

ESERCIZIO 9.6. Calcolare i seguenti limiti:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\log_2(\mathrm{e}^x+x^2)}{x+\log_2 x};\quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2 2^x+4^x}{3^x\log(1+3^x)+(2^x+1)^2};$$
$$3)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{x})+\mathrm{e}^{-1/x}}{x^\alpha},\ \alpha>0;\quad 4)\ \lim_{x\to\infty}\frac{(3x)^x+\arctan(3^x)}{x^2+2^{x\log x}}.$$

Si possono usare i limiti elementari (confronto fra logaritmi, potenze, esponenziali, etc.), le regole sulle operazioni coi limiti, confronti, sostituzioni, continuità delle funzioni elementari. Argomentare in modo dettagliato ogni passaggio.

Esercizio 9.7. Calcolare i seguenti limiti 'risolvendo' le forme indeterminate del tipo $[1^\infty]$:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^3+1}{x+2}};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}};\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{\sin x}{x^3}}.$$

Risposte: 1) e^{-2}. 3) $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Esercizio 9.8. Stabilire se la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}\{-x\}$ (prodotto delle due parti frazionarie) è continua e disegnarne il grafico.

Esercizio 9.9. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione con la seguente proprietà. Per ogni successione limitata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali si ha

$$f\big(\limsup_{n\to\infty} a_n\big)=\limsup_{n\to\infty} f(a_n).$$

Provare che f è continua e monotona crescente.

Esercizi avanzati

Esercizio 9.10. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel seguente modo:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ oppure } x=0,\\ \dfrac{1}{q} & \text{se } x=\dfrac{p}{q} \text{ con } p,q\in\mathbb{Z},\ q>0, \text{ coprimi e } x\neq 0.\end{cases}$$

Calcolare l'insieme dei punti in cui f è continua (nella distanza standard).

SETTIMANA 10

Introduzione al calcolo differenziale

Esercizi di base

ESERCIZIO 10.1. Calcolare la derivata delle funzioni $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ cos definite $f(x) = x^x$ e $g(x) = x^{x^x}$ per $x > 0$.

ESERCIZIO 10.2. Stabilire il dominio delle seguenti funzioni e l'insieme dei punti di derivabilità. Calcolarne quindi la derivata:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x(x+2)}, \quad g(x) = \log|\log \sin x|, \quad h(x) = \sin(\arcsin x), \quad k(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2})$$

ESERCIZIO 10.3. La funzione seno iperbolico $f(x) = \sinh x$, $x \in \mathbb{R}$, iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Calcolare la derivata della sua funzione inversa settsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ("settore seno iperbolico").

Esercizi intermedi

ESERCIZIO 10.4. Calcolare la derivata della funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0,$$

e quindi disegnarne il grafico.

ESERCIZIO 10.5. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \{x\}\{-x\}\sin(\pi x), \quad x \in \mathbb{R},$$

è derivabile a calcolarne, quando possibile, la derivata. Con $\{\cdot\}$ si indica la parte frazionaria.

ESERCIZIO 10.6. Consideriamo la funzione $f : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \log\big(\arcsin x + \arccos x\big).$$

Calcolarne la derivata e quindi disegnarne il grafico.

Esercizi avanzati

ESERCIZIO 10.7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione dell'Esercizio 9.10. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$ la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|^\alpha f(x)$ derivabile nel punto $x = 0$.

ESERCIZIO 10.8. Sia $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ una funzione data dalla serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

con raggio di convergenza $R > 0$. Provare che f derivabile in ogni punto $x \in (-R, R)$ e che

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

SETTIMANA 11

Topologia di uno spazio metrico

Esercizi di base

Esercizio 11.1. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme. Provare le seguenti affermazioni:

i) A° è il più grande insieme aperto contenuto in A;
ii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

Esercizio 11.2. Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Provare che $x \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$.

Esercizio 11.3. 1) Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato. Provare che $\sup A \in \overline{A}$. 2) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ e $Z = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Provare che A è aperto e che Z è chiuso. Provare che $\partial A \subset Z$. È sempre vero che $\partial A = Z$?

Esercizio 11.4. Sia (X, d) uno spazio metrico discreto e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. Provare che una *qualsiasi* funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è continua.

Esercizi intermedi

Esercizio 11.5. Siano (X, d) uno spazio metrico ed $A \subset X$. Provare che $\bar{A} = \mathrm{int}(A) \cup \partial A$.

Esercizio 11.6. Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza Euclidea e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; iv) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

Esercizio 11.7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e si considerino i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\} \quad \text{e} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}.$$

Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:
1) Se f è continua allora A è aperto.
2) Se A è aperto allora f è continua.
3) Se f è continua allora C è chiuso.
4) Se C è chiuso allora f è continua.

Esercizio 11.8. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \Big\{\frac{mn}{m^2 + n^2 + 1} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Calcolare la chiusura $\bar{A} \subset \mathbb{R}$ rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}$.

Esercizio 11.9. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
A) f è continua.
B) Il suo grafico $\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$ rispetto alla distanza standard del piano.

Esercizio 11.10. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ il seguente insieme

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 < 0\big\}.$$

i) Provare che $A \subset [-M, M] \times [-M, M]$ per $M > 0$ opportuno.
ii) Provare che A è aperto.
iii) Dimostrare che $\partial A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 - x^2 + y^2 = 0\big\}$.
iv) Rappresentare A nel piano Cartesiano (in modo approssimativo).

Esercizio 11.11. Sia (X, d) uno spazio metrico. Per $x_0 \in X$ ed $r > 0$ definiamo

$$B_r(x_0) = \big\{x \in X : d(x, x_0) < r\big\},$$
$$K_r(x_0) = \big\{x \in X : d(x, x_0) \leq r\big\},$$
$$S_r(x_0) = \big\{x \in X : d(x, x_0) = r\big\}.$$

Provare che $\partial B_r(x_0) \subset S_r(x_0)$ e che $\overline{B_r(x_0)} \subset K_r(x_0)$. Mostrare tramite esempi che le inclusioni possono essere strette.

Esercizio 11.12. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato, $x \in A$ ed $r \subset \mathbb{R}^n$ una semiretta uscente da x. Provare che $r \cap \partial A \neq \emptyset$.

Esercizi avanzati

Esercizio 11.13. Provare che un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}$ è l'unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.

Esercizio 11.14. Siano $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi chiusi disgiunti. Provare che esistono due insiemi aperti e disgiunti $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ tali che $C_1 \subset A_1$ e $C_1 \subset A_2$.

SETTIMANA 12

Spazi metrici completi e completamento

Esercizi di base

Esercizio 12.1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che se X è completo allora anche K è completo con la distanza ereditata da X.

Esercizio 12.2. Definiamo le funzioni $|\cdot|_1, |\cdot|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|, \quad |x|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Provare che $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_1)$ e $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_\infty)$ sono spazi normati e che come spazi metrici sono completi.

Esercizio 12.3. Sia X un insieme non vuoto e sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

1) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.
2) Descrivere le palle in X.
3) Descrivere gli insiemi aperti.
4) Caratterizzare gli insiemi compatti in X
5) Provare che (X, d) è completo.

Esercizi intermedi

Esercizio 12.4. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi non vuoti tali che:

i) $K_{n+1} \subset K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(K_n) = 0$.

Provare che esiste $x \in X$ tale che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}.$$

Ricordiamo che il diametro di un insieme $A \subset X$ è $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x,y\in A} d(x, y)$.

Esercizio 12.5. Definiamo la funzione $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.
iii) Determinare il completamento di $(\mathbb{R}, d)$.

Esercizio 12.6. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.
ii) Provare che se $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso, allora lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ è completo.
iii) Provare che se $(\mathbb{R}, d)$ è completo, allora $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ è chiuso.

Esercizio 12.7. Siano $X = (-1, \infty)$ e $d : X \times X \to [0, \infty)$ la funzione

$$d(x, y) = \Big| \log\Big(\frac{1 + x}{1 + y}\Big)\Big|, \quad x, y \in X.$$

1) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.
2) Esibire un'isometria suriettiva $\varphi : \mathbb{R} \to (X, d)$, $d(\varphi(t), \varphi(s)) = |t - s|$, con $s, t \in \mathbb{R}$.
3) Provare che (X, d) è uno spazio metrico completo.

Esercizi avanzati

Esercizio 12.8. Dopo aver determinato l'immagine della funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \Big(\frac{2x}{1 + x^2}, \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R},$$

considerare lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ con la distanza

$$d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}$.
ii) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ non è completo.
iii) Calcolare il completamento di questo spazio metrico.