Analisi Matematica 1 - Parte A
Soluzioni dei compiti d'esame del 2019

Roberto Monti

Matematica – Anno Accademico 2020-21

Analisi Matematica 1A — Tema A

Nome, cognome, matricola: — Scritto del 31/1/2019

Scrivere le risposte nelle caselle incorniciate.
Verranno corretti solo i compiti con almeno 3 risposte giuste su 8.

Esercizio 1 (10pt) Si consideri la successione di numeri reali

$$a_n = \left\{ \frac{1}{2}\left(n - \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right)\right\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria. Calcolare i seguenti:

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{ed} \qquad L^+ = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Risposte: 1) $L^- =$ 0 ; 2) $L^+ =$ 1/2

Esercizio 2 (10pt) Per ciascuna $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - x^{n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

i) (8pt) Calcolare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie converga assolutamente.

ii) (1pt) Provare che per $x \in [0, 1[$ si ha $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$.

iii) (1pt) Calcolare il limite $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Risposte: 3) Serie converge per $x \in$ $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ 4) $L =$ $-\infty$

Esercizio 3 (12pt) Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme del piano Euclideo

$$K_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < y^2 - \alpha x^2 + 2y \le 1\}.$$

Per ciascun valore di α stabilire se K_α è chiuso, compatto, aperto, nè aperto nè chiuso.

Risposte: 5) chiuso per $\alpha \in$ $(-\infty, 0]$	6) compatto per $\alpha \in$ $(-\infty, 0[$
7) aperto per $\alpha \in$ $\emptyset$	8) nè aperto nè chiuso per $\alpha \in$ $]0, \infty)$

2 ore e 30 minuti a disposizione

Analisi Matematica 1A   Tema B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 31/1/2019

Scrivere le risposte nelle caselle incorniciate.
Verranno corretti solo i compiti con almeno 3 risposte giuste su 8.

Esercizio 1 (10pt) Si consideri la successione di numeri reali

$$a_n = \left\{ \frac{1}{2}\left(n + \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right)\right\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria. Calcolare i seguenti:

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{ed} \qquad L^+ = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Risposte: 1) $L^- =$ 1/2 ; 2) $L^+ =$ 1

Esercizio 2 (10pt) Per ciascuna $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + x^{n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

i) (8pt) Calcolare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie converga assolutamente.

ii) (1pt) Provare che per $x \in [0, 1[$ si ha $f(x) \geq \frac{1+x}{2(1-x)}$.

iii) (1pt) Calcolare il limite $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Risposte: 3) Serie converge per $x \in$ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ 4) $L =$ $+\infty$

Esercizio 3 (12pt) Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme del piano Euclideo

$$K_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x^2 + \alpha y^2 + 2x \leq 1\}.$$

Per ciascun valore di α stabilire se K_α è chiuso, compatto, aperto, nè aperto nè chiuso.

Risposte: 5) chiuso per $\alpha \in$ $[0, \infty)$ 6) compatto per $\alpha \in$ $]0, \infty)$
7) aperto per $\alpha \in$ $\emptyset$ 8) nè aperto nè chiuso per $\alpha \in$ $(-\infty, 0[$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Si consideri la successione di numeri reali

$$a_n = \left\{ \frac{1}{2}\left(n + \cos\left(\frac{\pi\, n^2}{n+1} \right)\right)\right\}$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria. Calcolare i seguenti

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{ed} \quad L^+ = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Risoluzione. Osserviamo che

$$\frac{\pi n^2}{n+1} = \pi n \left(\frac{n}{n+1} \right) = \pi n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \pi n - \frac{\pi n}{n+1},$$

e quindi

$$\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \cos\left(\pi n - \frac{\pi n}{n+1}\right) = \left[\begin{array}{l}\text{distinguo}\\ n \text{ pari ed}\\ n \text{ dispari}\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} (n=2m) \\ \\ (n=2m+1) \end{array} = \begin{cases} \cos\left(2\pi m - \dfrac{2\pi m}{2m+1}\right) = \cos\left(-\dfrac{2\pi m}{2m+1}\right) \\ \cos\left((2m+1)\pi - \dfrac{(2m+1)\pi}{2m+2}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{(2m+1)\pi}{2m+2}\right) \end{cases}$$

ovvero:

$$\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{2\pi m}{2m+1}\right) & \text{se } n = 2m \text{ è pari} \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2m+2}\right) & \text{se } n = 2m+1 \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque si ha

$$a_{2m} = \left\{ \frac{1}{2} \left(2m + \cos\left(\frac{2\pi m}{2m+1} \right) \right\} \right.$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi m}{2m+1} \right) \right\} \qquad \boxed{-1 < \cos\left(\frac{2\pi m}{2m+1} \right) < 0}$$

$$= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi m}{2m+1} \right) - (-1)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi m}{2m+1} \right) \xrightarrow[m \to \infty]{} 1 + \frac{1}{2} \cos(\pi) = \frac{1}{2}.$$

E poi:

$$a_{2m+1} = \left\{ \frac{1}{2} \left(2m+1 + \cos\left(\frac{\pi}{2m+2} \right) \right) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2m+2} \right) \right\} \qquad \boxed{0 < \cos\left(\frac{\pi}{2m+2} \right) < 1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2m+2} \right) \xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Deduciamo che $L^- = \frac{1}{2}$ ed $L^+ = 1$.

ESERCIZIO Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - x^{n+1}}{1+x^{2n}} .$$

1) Calcolare l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie converga.

2) Provare che per $x \in [0,1[$ si ha $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$.

~~3) Provare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$~~

3) Calcolare il limite $L = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Risoluzione. Per $x = 1$ si ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-1}{2} = 0$

e la serie converge. Per $x = -1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{1+x^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{2} \quad \text{NON DEFINITA.}$$

Per $|x| < 1$ si trova

usato $x^{2n} \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n(1-x)}{1+x^{2n}} \right| \le (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = (1-x) \frac{1}{1-|x|} < \infty$$

Dunque per $0 \le x < 1$ si trova $f(x) \le 1$.

Sempre per $0 \leq x < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{1+x^{2n}} \underset{x^{2n}\leq 1}{\geq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{2} = \frac{1-x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{2}.$$

Questo prova che $f(x) \geq \frac{1}{2}$ per $x \in [0,1[$.

Ora guardiamo il caso $|x| > 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n(1-x)}{1+x^{2n}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n(1+|x|)}{|x|^{2n}} \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^{2n}} =$$

$$= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|}{|x|^n} = 2|x| \frac{1}{1-\frac{1}{|x|}} = \frac{2|x|^2}{|x|-1} < \infty$$

Quindi c'é convergenza assoluta per $|x|>1$.

Dunque la serie converge per $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ora consideriamo $x>1$. Il termine generale é negativo:

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(x-1)}{1+x^{2n}} \leq -(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2x^{2n}} = -\frac{(x-1)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

e quindi $f(x) \leq -\frac{(x-1)}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}x$.

Per confronto:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

□

ESERCIZIO Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri l'insieme

$$K_\alpha = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x^2 + \alpha y^2 + 2x \leq 1 \}.$$

Per ciascun valore di α stabilire se K_α è chiuso, compatto aperto, né aperto né chiuso.

Risoluzione. Completando il quadrato in x, le condizioni che definiscono K_α si riscrivono in questo modo:

$$-2 < (x^2 + 2x + 1) - 1 + \alpha y^2 \leq 1 \iff -1 < (x+1)^2 + \alpha y^2 \leq 2$$

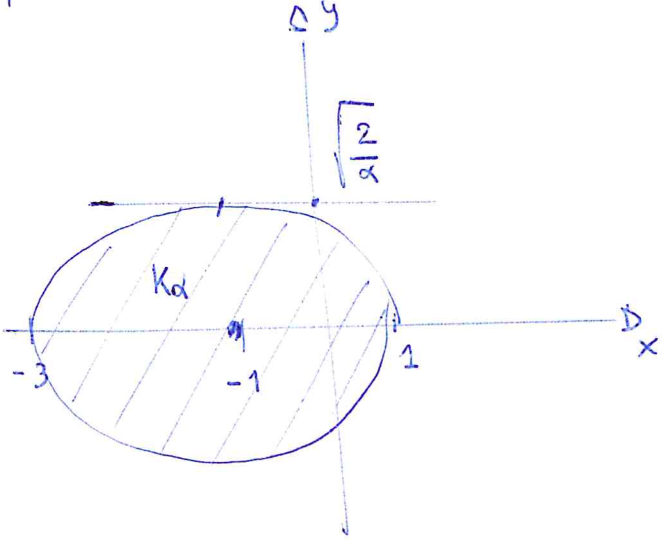
Quando $\alpha \geq 0$ la disequazione $-1 < (x+1)^2 + \alpha y^2$ è sempre verificata. Dunque per $\alpha \geq 0$ si ha

$$K_\alpha = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + \alpha y^2 \leq 2 \}$$
$$= F^{-1}( ]-\infty, 2])$$

dove $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = (x+1)^2 + \alpha y^2$ è continua. Quindi per $\alpha \geq 0$ l'insieme K_α è chiuso. Non è aperto perché i punti dove $(x+1)^2 + \alpha y^2 = 2$ sono di frontiera.

Quando $\alpha = 0$ l'insieme K_α non è limitato, perché y è libera. Quindi per $\alpha = 0$, K_α è chiuso ma non compatto (Heine-Borel).

Quando $\alpha > 0$, la disequazione $(x+1)^2 + \alpha y^2 \leq 2$ identifica i punti dentro un'ellisse (frontiera inclusa):



Dunque K_α è limitato e quindi compatto.

Rimane da studiare il caso $\alpha < 0$.

Consideriamo punti $(x,y) \in K_\alpha$ con $x = 1$.

L'ordinata y deve verificare:

$$-5 < \alpha y^2 \leq -2$$

ovvero $(\alpha < 0)$

$$\frac{2}{|\alpha|} \leq y^2 < \frac{5}{|\alpha|} .$$

L'insieme di tali y non è né aperto né chiuso.

Quindi per $\alpha < 0$, K_α non è né aperto né chiuso.

Analisi Matematica 1A   **Tema A**

Nome, cognome, matricola: Scritto del 14/2/2019

Scrivere le risposte nelle caselle incorniciate.
Verranno corretti solo i compiti con almeno 3 risposte giuste su 7.

Esercizio 1 Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme del piano Euclideo

$$K_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + \alpha xy + y^2 \leq 1\}.$$

i) (1pt) Per quali α l'equazione $t^2 + \alpha t + 1 = 0$ ha almeno una soluzione $t \in \mathbb{R}$?

ii) (10pt) Determinare tutti gli α tali che K_α sia chiuso, compatto, nè aperto nè chiuso.

Risposte:	1) Esiste sol. $t \in \mathbb{R}$ per $\alpha \in$ $|\alpha| \geq 2$	2) K_α chiuso per $\alpha \in$ $|\alpha| \leq 2$
	3) compatto per $\alpha \in$ $|\alpha| < 2$	4) nè aperto nè chiuso per $\alpha \in$ $|\alpha| \geq 2$

Esercizio 2 Dato un parametro $\beta \in \mathbb{R}$, si consideri la successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita in modo ricorsivo da $a_0 = 2$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 + a_n + \frac{\beta^2}{1 + a_n}\Big), \qquad n \geq 0.$$

i) (6pt) Studiare la monotonia della successione.

ii) (3pt) Provare che esiste e calcolare il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

iii) (2pt) Per quali β la successione è strettamente decrescente?

Risposte: 5) $L =$ $\sqrt{1+\beta^2}$; 6) strettamente decrescente per $\beta \in$ $\beta^2 < 3$

Esercizio 3 Si consideri la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}} \log n}.$$

i) (4pt) Stabilire se la serie converge assolutamente.

ii) (2pt) Provare che

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 + b_n \qquad \text{con} \qquad |b_n| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}, \qquad n \geq 1.$$

iii) (4pt) Stabilire se la serie converge semplicemente (lecito usare ii) anche se non provato).

Risposte: 7) CA si/no: No ; CS si/no: Sì

2 ore e 30 minuti a disposizione

Analisi Matematica 1A **Tema B**

Nome, cognome, matricola: Scritto del 14/2/2019

Scrivere le risposte nelle caselle incorniciate.
Verranno corretti solo i compiti con almeno 3 risposte giuste su 7.

Esercizio 1 Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri il sottoinsieme del piano Euclideo

$$K_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + 4\alpha xy + y^2 \leq 1\}.$$

i) (1pt) Per quali α l'equazione $t^2 + 4\alpha t + 1 = 0$ ha almeno una soluzione $t \in \mathbb{R}$?

ii) (10pt) Determinare tutti gli α tali che K_α sia chiuso, compatto, nè aperto nè chiuso.

Risposte: 1) Esiste sol. $t \in \mathbb{R}$ per $\alpha \in$ $|\alpha| \geq 1/2$	2) K_α chiuso per $\alpha \in$ $|\alpha| \leq 1/2$
3) compatto per $\alpha \in$ $|\alpha| < 1/2$	4) nè aperto nè chiuso per $\alpha \in$ $|\alpha| > 1/2$

Esercizio 2 Dato un parametro $\beta \in \mathbb{R}$, si consideri la successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita in modo ricorsivo da $a_0 = 2$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 + a_n + \frac{3\beta^2}{1 + a_n}\Big), \qquad n \geq 0.$$

i) (6pt) Studiare la monotonia della successione.

ii) (3pt) Provare che esiste e calcolare il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

iii) (2pt) Per quali β la successione è strettamente decrescente?

Risposte: 5) $L = \sqrt{1+3\beta^2}$	; 6) strettamente decrescente per $\beta \in$ $\beta^2 < 1$

Esercizio 3 Si consideri la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \log^2 n}.$$

i) (4pt) Stabilire se la serie converge assolutamente.

ii) (2pt) Provare che

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 + b_n \qquad \text{con} \qquad |b_n| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}, \qquad n \geq 1.$$

iii) (4pt) Stabilire se la serie converge semplicemente (lecito usare ii) anche se non provato).

Risposte: 7) CA si/no: NO	; CS si/no: si

2 ore e 30 minuti a disposizione

<u>ESERCIZIO</u> Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'insieme $K_\alpha \subset \mathbb{R}^2$

$$K_\alpha = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2 + \alpha xy + y^2 \leq 1 \}.$$

i) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione $t^2+\alpha t+1=0$ ha almeno una soluzione $t \in \mathbb{R}$?

ii) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che K_α sia chiuso.

iii) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che K_α sia compatto.

iv) Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme K_α non è né aperto né chiuso?

Risoluzione. i) Il discriminante dell'equazione $t^2+\alpha t+1=0$ è $\Delta = \alpha^2-4$. Perché ci sia una soluzione deve essere $\alpha^2-4 \geq 0$.

ii) Sappiamo che $-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \leq xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Dunque

$$x^2+\alpha xy+y^2 \geq x^2 - |\alpha|\,|xy| + y^2 \geq x^2 - \frac{|\alpha|}{2}(x^2+y^2) + y^2 =$$

$$= \left(1 - \frac{|\alpha|}{2}\right)(x^2+y^2)$$

Vediamo che se $|\alpha| \leq 2$ allora $x^2+\alpha xy+y^2 \geq 0$ sempre.

In questo caso

$$K_\alpha = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+\alpha xy+y^2 \leq 1 \}$$

$$= F^{-1}(]-\infty, 1]) \text{ è chiuso}$$

in quanto $F(x,y) = x^2+\alpha xy+y^2$ è continua.

Vedremo che per $|\alpha|>2$ K_α non è chiuso.

iii) Se $|\alpha|<2$ abbiamo

$$x^2+y^2 \leq \frac{x^2+\alpha xy+y^2}{1-|\alpha|/2} \leq \frac{1}{1-|\alpha|/2} < \infty$$

Quindi K_α è limitato e dunque compatto (Heine Borel).

Se $|\alpha| \geq 2$ sia $t \in \mathbb{R}$ una soluzione di $t^2 + \alpha t + 1 = 0$.
Allora i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\frac{x}{y} = t$ (oppure $\frac{y}{x} = t$) verificano $x^2 + \alpha xy + y^2 = 0$ e quindi sono in K_α, che pertanto non è limitato.

Conclusione: K_α è compatto $\iff |\alpha| < 2$

iv) Il punto $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ è in K_α, ma $(1+r, 0) \notin K_\alpha$ per $r > 0$. Quindi $(1,0) \in K_\alpha$ non è interno e dunque K_α non è mai aperto.

Ora proviamo che per $|\alpha| > 2$ l'insieme K_α non è chiuso. Supponiamo ad esempio $\alpha > 2$. Con $y = -x$ si trova:

$$x^2 + \alpha xy + y^2 = x^2 - \alpha x^2 + x^2 = (2-\alpha)x^2 \leq 0$$

ed inoltre $(2-\alpha)x^2 > -1 \iff x^2 < \frac{1}{\alpha - 2}$.

Dunque il punto $\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha-2}}, -\sqrt{\frac{1}{\alpha-2}}\right)$ è in ∂K_α ma non in K_α.

Conclusione: K_α né aperto né chiuso $\iff |\alpha| > 2$ $\square$

ESERCIZIO Sia $\beta \in \mathbb{R}$ un parametro fissato e si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita in modo ricorsivo da $a_0 = 2$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+a_n+\frac{\beta^2}{1+a_n}\right), \quad n \geq 0.$$

i) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Provare che esiste e calcolare il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$

iii) Per quali $\beta \in \mathbb{R}$ la successione è strettamente decrescente?

Risoluzione: i) Sia $\phi(x) = \frac{1}{2}\left(1+x+\frac{\beta^2}{1+x}\right)$, $x \geq 0$.

Studiamo la disequazione $\phi(x) \geq x$:

$$\frac{1}{2}\left(1+x+\frac{\beta^2}{1+x}\right) \geq x \iff (1+x)^2+\beta^2 \geq 2x(1+x)$$

$$\iff x^2+2x+1+\beta^2 \geq 2x+2x^2$$

$$\iff x^2 \leq 1+\beta^2.$$

Deduzioni: 1) a_n cresce fintanto che $a_n \leq \sqrt{1+\beta^2}$;

2) a_n decresce fintanto che $a_n \geq \sqrt{1+\beta^2}$.

Allora studiamo la disequazione $\phi(x) \leq \sqrt{1+\beta^2}$:

$$\frac{1}{2}\left(1+x+\frac{\beta^2}{1+x^2}\right) \leq \sqrt{1+\beta^2} \iff (1+x)^2+\beta^2 \leq 2\sqrt{1+\beta^2}(1+x)$$

$$\iff (1+x)^2-2\sqrt{1+\beta^2}(1+x)+\beta^2 \leq 0$$

Le radici di $t^2 - 2\sqrt{1+\beta^2}\,t + \beta^2 = 0$ sono $t_\pm = \sqrt{1+\beta^2} \pm 1$

Quindi $\phi(x) \leq \sqrt{1+\beta^2}$ se e solo se

$$\sqrt{1+\beta^2} - 1 \leq 1+x \leq \sqrt{1+\beta^2} + 1$$

ovvero se e solo se $\sqrt{1+\beta^2} - 2 \leq x \leq \sqrt{1+\beta^2}$.

Deduzioni:

1) Se $\sqrt{1+\beta^2} - 2 \leq \overset{2}{\overset{\shortparallel}{a_0}} \leq \sqrt{1+\beta^2}$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cresce e rimane $a_n \leq \sqrt{1+\beta^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Se $a_0 \geq \sqrt{1+\beta^2}$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decresce e rimane $a_n \geq \sqrt{1+\beta^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Se $a_0 \leq \sqrt{1+\beta^2} - 2$ allora $a_1 \geq a_0$, ma di più! $a_1 \geq \sqrt{1+\beta^2}$ e da questo punto in poi a_n decresce.

ii) In tutti i casi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente monotona e limitata. Quindi il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ esiste. Passando al limite nella relazione ricorsiva si ottiene

$$L = \frac{1}{2}\left(L + 1 + \frac{\beta^2}{1+L}\right)$$

e sappiamo che l'unica soluzione positiva è $L = \sqrt{1+\beta^2}$.

iii) La successione è strettamente decrescente quando $2 = a_0 > \sqrt{1+\beta^2}$, ovvero $\beta^2 < 3$. $\square$

ESERCIZIO Si consideri la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}\; n \log n}$$

i) Stabilire se la serie converge assolutamente.

ii) Provare che

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 + b_n \quad \text{con} \quad |b_n| \leq \frac{3}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$$

iii) Studiare la convergenza semplice della serie.

Risoluzione i) Dobbiamo dire se converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\; n \lg n} .$$

Siccome $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \lg n},$$

Con il Criterio di condensazione di Cauchy si vede che questa serie diverge:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \lg 2^n} = \frac{1}{\lg 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty .$$

ii) Abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 + \frac{1 - \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}} = 1 + b_n$$

con

$$|b_n| \overset{=}{\leq} \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{n} - 1 .$$

Come visto in classe, consideriamo $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n$.

Per Bernoulli:

$$\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + a_n \iff \sqrt{n} = (1 + a_n)^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n a_n$$

Quindi $a_n \leq \dfrac{\sqrt{n} - 1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Partendo da $\sqrt[n]{n} = (1 + a_n)^2 = 1 + 2a_n + a_n^2$ si trova

$$\sqrt[n]{n} - 1 = 2a_n + a_n^2 \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$$

iii) Abbiamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}\, n \log n} = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}}_{\substack{\text{converge} \\ \text{semplicemente} \\ \text{(Leibniz)}}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n b_n}{n \log n}}_{\substack{\text{Proviamo che} \\ \text{converge} \\ \text{assolutamente}}}$$

Infatti

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n b_n}{n \log n} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^{3/2} \log n} \underset{\text{Fatto noto}}{<} \infty .$$

□

Analisi Matematica 1A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 18/6/2019

Esercizio 1 (7pt) Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n^2)!} n^{kn}.$$

Risposte: 1) Serie converge per $k \in$ $\mathbb{R}$

Esercizio 2 Sia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ la funzione

$$\varphi(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}, \quad x \geq 0,$$

e fissato $a_0 \geq 0$ definiamo in modo ricorsivo la successione $a_{n+1} = \varphi(a_n)$ per $n \geq 0$.

i) (4pt) Studiare le disequazioni $\varphi(x) \leq x$ e $\varphi(x) \leq 1$, limitatamente ad $x \geq 0$.

ii) (4pt) Studiare la monotonia della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al variare di a_0.

iii) (3pt) Provare che esiste finito o infinito e calcolare il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ al variare di $a_0 \geq 0$.

Risposte: 2) $\varphi(x) \leq x$ per $x \in [0,1]$; 3) $\varphi(x) \leq 1$ per $x \in [0,1]$; 4) $L = \begin{cases} 0 & \text{se } a_0 \in [0,1) \\ 1 & \text{se } a_0 = 1 \\ +\infty & \text{se } a_0 > 1 \end{cases}$

Esercizio 3 Dato l'inisieme $X = [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ si definisca la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |\cos x - \cos y| + |\sin x - \sin y|.$$

i) (2pt) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.

ii) (6pt) Stabilire se (X, d) è uno spazio metrico completo.

iii) (4pt) Stabilire se (X, d) è (sequenzialmente) compatto.

Risposte: 5) X completo: si/no: si ; 6) X compatto: si/no si

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Al variare di $k \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(n^2)!} n^{kn}.$$

Risoluzione. Detta $a_n = \frac{(n!)^2}{(n^2)!} n^{kn}$, usiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{[(n+1)^2]!} (n+1)^{k(n+1)} \frac{(n^2)!}{(n!)^2 n^{kn}}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2[(n+1)^2-1]\cdot\ldots\cdot[n^2+1]} \frac{(n+1)^{kn}}{n^{kn}} (n+1)^k$$

$$= \frac{(n+1)^k}{\underbrace{[n^2+2n]\cdot\ldots\cdot[n^2+1]}_{2n \text{ termini}}} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k$$

$$\leq \frac{(n+1)^k}{(n^2+1)^{2n}} \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k}_{\to e^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\frac{(n+1)^k}{(n^2+1)^{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Per il Criterio del Rapporto la serie converge $\forall k \in \mathbb{R}$.

□

ESERCIZIO Dato $a_0 \geq 0$ definiamo in modo ricorsivo la successione

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^3}{a_n^2+1}, \quad \text{per } n \geq 0.$$

1) Studiare la monotonia di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al variare di a_0.

2) Provare che esiste finito o infinito il limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

e calcolarlo al variare di $a_0 \geq 0$.

Risoluzione. 1) Sia $\phi(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$, per $x \geq 0$.

Studiamo $\phi(x) \leq x$:

$$\frac{2x^3}{x^2+1} \leq x \iff 2x^2 \leq x^2+1$$
$$\iff x^2 \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 1 \quad (x \geq 0)$$

Quindi a_n decresce se $a_n \leq 1$ mentre cresce se $a_n \geq 1$.

Studiamo $\phi(x) \leq 1$:

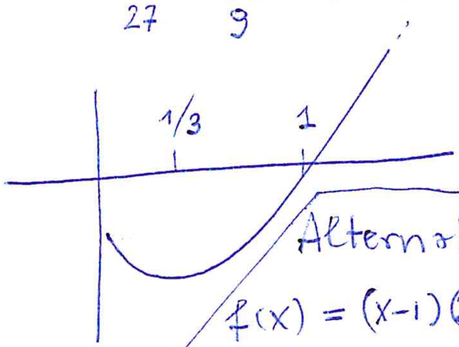
$$\frac{2x^3}{x^2+1} \leq 1 \iff 2x^3 \leq x^2+1$$
$$\iff f(x) = 2x^3 - x^2 - 1 \leq 0$$

Breve studio di funzione: $f'(x) = 6x^2 - 2x$
$= 2x(3x-1)$

Dunque $f \downarrow$ per $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ mentre $f \uparrow$ per $x \geq \frac{1}{3}$

Abbiamo $f(0) = -1$, $f(1/3) = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} - 1 < 0$

$f(1) = 0$



Alternativamente: $f(x) = (x-1)(2x^2 - 3x + 1)$ e si fa lo studio esatto.

Deduciamo che $f(x) \leq 0$
$\Updownarrow$
$0 \leq x \leq 1$.

Per induzione deduciamo le seguenti cose:

1) $a_0 \leq 1 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decresce e rimane $a_n \leq 1$ $\forall n$.

2) $a_0 \geq 1 \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cresce e rimane $a_n \geq 1$ $\forall n$.

In particolare: $a_0 = 1 \Rightarrow a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

In tutti i casi esiste il limite $L = \lim_{n \to \infty} a_n$.

In particolare:

1) $a_0 \leq 1 \Rightarrow L \in [0, 1]$

2) $a_0 \geq 1 \Rightarrow L \in [1, \infty]$

Se $L \in \mathbb{R}$ passiamo al limite in

$$L = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 a_n^3}{a_n^2 + 1} = \frac{2L^3}{L^2 + 1}$$

da cui $L^3 + L = 2L^3 \iff L = L^3 \iff L = 0$ oppure $L = 1$.
($L = -1$ si scarta)

Deduciamo che

1) $0 \leq a_0 < 1 \Rightarrow L = 0$

2) $a_0 = 1 \Rightarrow L = 1$

3) $a_0 > 1 \Rightarrow L = +\infty$ (crescente senza limite finito)

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Sull'insieme $X = [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}$ sia $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = |\cos x - \cos y| + |\sin x - \sin y| .$$

1) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.

3) Stabilire se (X,d) è (sequenzialmente) compatto.

2) Stabilire se (X,d) è completo.

Risoluzione 1) Controlliamo gli assiomi di spazio metrico:

i) $d \geq 0$ VERO. Se $d(x,y) = 0$ allora

$$\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \\ x, y \in [0, 2\pi) \end{cases} \Rightarrow x = y . \quad \text{VERO}$$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ VERO per il valore assoluto

iii) Dis. triangolare:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |\cos x - \cos y| + |\sin x - \sin y| \\ &\leq |\cos x - \cos z| + |\cos z - \cos y| + \\ &\quad + |\sin x - \sin z| + |\sin z - \sin y| = d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

2) Sia $x_n \in X$ di Cauchy in d:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ \begin{matrix} \forall n \geq \bar{n} \\ \forall m \geq \bar{n} \end{matrix} : \ d(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

Siccome $x_n \in [0, 2\pi[$ per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione tale che

$$\lim_{k \to \infty} |x_{n_k} - x_\infty| = 0$$

per un qualche $x_\infty \in [0, 2\pi]$.

1° CASO: $x_\infty \in [0, 2\pi[$. Allora:

$$\lim_{k \to \infty} |\cos(x_{n_k}) - \cos(x_\infty)| + |\sin(x_{n_k}) - \sin(x_\infty)| = 0$$

perché sin e cos sono continue.

2° CASO: $x_\infty = 2\pi$. Definiamo $\overline{x_\infty} = 0 \in X$. Allora

$$\lim_{k \to \infty} |\cos(x_{n_k}) - \cos(\overline{x_\infty})| + |\sin(x_{n_k}) - \sin(\overline{x_\infty})| = 0.$$

In tutti i casi: Esiste $x \in X$ tale che

$$\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, x) = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, avremo:

$$\exists \; \forall n \geq \bar{n}$$

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{\substack{< \varepsilon \\ \text{per } n \geq \bar{n} \;\exists \\ n_k \geq \bar{n} \\ \text{per Cauchy}}} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{\substack{< \varepsilon \text{ per } k \geq \bar{k} \\ \exists}} < 2\varepsilon.$$

Soluzione alternativa del punto 2):

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in (X, d):

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq \bar{n}$ si ha:

$$|\cos x_n - \cos x_m| + |\sin x_n - \sin x_m| < \varepsilon .$$

Quindi $(\cos x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\sin x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono di Cauchy in $\mathbb{R}$ con la distanza standard.

Quindi

$$\cos x_n \to \alpha \in [-1,1]$$
$$\sin x_n \to \beta \in [-1,1]$$
$$n \to \infty$$

con convergenza nella distanza standard.

Inoltre, sin e cos sono continue e quindi

$$\alpha^2 + \beta^2 = \lim_{n\to\infty} (\cos x_n)^2 + \lim_{n\to\infty} (\sin x_n)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[(\cos x_n)^2 + (\sin x_n)^2 \right]$$

$$= 1$$

Quindi esiste $x \in [0, 2\pi[$ (unico) tale che

$$\alpha = \cos x \quad e \quad \beta = \sin x$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} |\cos x_n - \cos x| + |\sin x_n - \sin x| = 0$$

e questo significa che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x$. □

Soluzione di 3). Nel punto 2) (primo sol.) abbiamo provato questo:

ogni successione in (X,d) ha una sottosuccessione che converge in (X,d).

Quindi (X,d) è sequenzialmente compatto. □

Alternativamente: si può ragionare come nella seconda soluzione del punto 2). □

Terza soluzione. Solo idea generale.

Sia $\mathbb{R}^2$ con distanza $\delta((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$. La circonferenza

$$K = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

è compatta.

La funzione $\varphi : (X, d) \to (K, \delta)$

$$\varphi(x) = (\cos x, \sin x)$$

è un'isometria suriettiva. Dunque:

(K, δ) compatto $\Rightarrow$ (X, d) compatto

$\Downarrow$

(X, d) completo.

In effetti: compatto $\Rightarrow$ completo, sempre.

$\square$

Analisi Matematica 1A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 15/7/2019

Esercizio 1 Dato l'inisieme $X = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$, si definisca la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = \sqrt{|x-y|} + \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right|.$$

i) (3pt) Provare che (X, d) è uno spazio metrico.

ii) (4pt) Stabilire se (X, d) è uno spazio metrico completo.

iii) (4pt) Stabilire se l'insieme $K = (0, 1] \subset X$ è compatto nella topologia di (X, d).

Risposte: 1) X completo: si/no:	; 2) K compatto: si/no

Esercizio 2 Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[n]{n}}.$$

i) (2pt) Provare che $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$ definitivamente per $n \in \mathbb{N}$.

ii) (3pt) Studiare la convergenza semplice della serie.

iii) (4pt) Studiare la convergenza assoluta della serie.

Risposte: 3) CS: si/no:	; 4) CA: si/no

Esercizio 3 i) (8pt) Dato un numero reale $x \in (0, 1)$, calcolare i seguenti

$$L^-(x) = \liminf_{n \to \infty} \{(-1)^n \sqrt{n^2 + 2nx}\},$$

$$L^+(x) = \limsup_{n \to \infty} \{(-1)^n \sqrt{n^2 + 2nx}\},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

ii) (2pt) Rispondere alle domande del punto i) nel caso $x \in (1, 2)$.

Risposte: 5) $L^-(x) =$	; 6) $L^+(x) =$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Dato l'insieme $X =]0, \infty) \subset \mathbb{R}$, si consideri la funzione $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = \sqrt{|x-y|} + \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right| .$$

i) Stabilire se (X,d) è uno spazio metrico.

ii) Stabilire se (X,d) è completo oppure no.

iii) Stabilire se l'insieme $K =]0,1] \subset X$ è compatto nella topologia di (X,d).

Risoluzione i) (X,d) è uno SM. Infatti:

- $d(x,y) \geq 0 \;\; \forall x,y \in X$ è vero. Se poi $d(x,y) = 0$ allora in particolare $\sqrt{|x-y|} = 0$ e quindi $x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$ segue facilmente dalle proprietà del valore assoluto.
- Disuguaglianza triangolare: Alla fine -

ii) Proviamo che (X,d) è completo. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \; \forall n,m \geq \bar{n}$ vale: $\cancel{\sqrt{|x-y|}}$

$$\sqrt{|a_n - a_m|} + \left| \frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_m}} \right| < \varepsilon .$$

In particolare,

$$|a_n - a_m| < \varepsilon^2 < \varepsilon, \quad \text{se } 0 < \varepsilon < 1,$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_m}} \right| < \varepsilon .$$

Quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sono di Cauchy nella distanza standard. Dunque esistono $L, M \geq 0$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} = M$$

Non può essere $L=0$, altrimenti sarebbe $M=+\infty$. Quindi $L\in(0,\infty)$ ed $M=\frac{1}{\sqrt{L}}$ (continuità radice).

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, L) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n - L|} + \left|\frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{L}}\right| = 0.$$

iii) L'insieme K non è completo. Si consideri ad esempio

$$a_n = \frac{1}{n^2}; \qquad n\geq 1.$$

Se $n \geq m+1$ allora

$$d(a_n, a_m) \geq \left|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2}}}\right| = |n-m| \geq 1$$

e quindi a_n non può avere sottosuccessioni convergenti. (Chiaramente $a_n\in K$ $\forall n$.)

Rimane la disuguaglianza triangolare. Siano $x, y, z \in X$.
Allora

$$(*) \quad \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{z}} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right| ,$$

e inoltre

$$(\square) \quad \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x-z| + |z-y|} \underset{\substack{\Uparrow \\ \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}}}{\leq} \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|} .$$

Mettendo insieme $(*)$ e $(\square)$ si trova

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) .$$

$\square$

ESERCIZIO Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[n]{n}} .$$

i) Provare che $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$ definitivamente per $n \in \mathbb{N}$.

ii) Stabilire se la serie converge semplicemente.

iii) Stabilire se la serie converge assolutamente.

Risoluzione i) Si ha

$$\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n} \iff (n+1)^n \leq n^{n+1}$$

$$\iff \frac{(n+1)^n}{n^n} \leq n$$

$$\iff \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n$$

Siccome $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \in \mathbb{R}$, la disuguaglianza vale definitivamente.

ii) Sia $a_n = \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{\sqrt[n]{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Siccome $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dal punto i) segue che $a_{n+1} \leq a_n$ è vero definitivamente. La serie converge per il Criterio di Leibniz.

iii) Dobbiamo capire se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n}}$ converge.

Bisogna capire quanto velocemente $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ tende a zero. Possiamo studiare queste disuguaglianze

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{con } \alpha > 0 \text{ da decidere},$$

oppure

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n^\beta} \quad \text{con } \beta > 0 \text{ da decidere}.$$

Ad esempio:

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n^\beta} \iff 1 - \frac{1}{n^\beta} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$\iff \left(1 - \frac{1}{n^\beta}\right)^n \geq \frac{1}{n}$$

Con $\beta = 1$ si vede che $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} > 0$

e quindi

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{n} \quad \text{è vero definitivamente.}$$

Dunque $1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n}$ è vero definitivamente.

Di conseguenza

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n}} \geq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

La serie diverge assolutamente.

ESERCIZIO i) Dato $x \in (0,1)$ calcolare

$$L^-(x) = \liminf_{n \to \infty} \left\{ (-1)^n \sqrt{n^2+2xn} \right\}$$

$$L^+(x) = \limsup_{n \to \infty} \left\{ (-1)^n \sqrt{n^2+2xn} \right\}$$

con $\{\cdot\}$ = parte frazionaria.

ii) Stessa domanda per $x \in (1,2)$.

Risoluzione i) Dobbiamo prima capire $\sqrt{n^2+2xn}$.

Si ha

$$\circledast \qquad n \leq \sqrt{n^2+\underbrace{2nx}_{\geq 0}} < n+1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Controlliamo la disuguaglianza a destra:

$$\sqrt{n^2+2nx} < n+1 \iff n^2+2nx < (n+1)^2 = n^2+2n+1$$

$$\iff 2nx < 2n+1.$$

sempre verificato per $x \in (0,1)$.

Dunque, per n pari si ha:

$$\left\{(-1)^n \sqrt{n^2+2nx}\right\} = \left\{\sqrt{n^2+2nx}\right\} = \sqrt{n^2+2nx} - n$$

$$= \frac{2nx}{\sqrt{n^2+2nx}+n}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1+2x/n}+1} \xrightarrow[n \to \infty]{(n \text{ pari})} x.$$

Ora consideriamo il caso n dispari:

Siccome il punto $\circledast$ con $x \in (0,1)$ (ovvero $x \neq 0$) in effetti è più precisamente

$$n < \sqrt{n^2+2nx} < n+1 \quad , \qquad \text{per } n \geq 1 \, ,$$

allora

$$-n-1 < -\sqrt{n^2+2nx} < -n.$$

Quindi per n dispari:

$$\{(-1)^n \sqrt{n^2+2nx}\} = \{-\sqrt{n^2+2nx}\} = -\sqrt{n^2+2nx} - (-n-1)$$

$$= n+1 - \sqrt{n^2+2nx}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}-2nx}{n+1+\sqrt{n^2+2nx}}$$

$$= \frac{2-2x+1/n}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+2x/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(n \text{ dispari})} 1-x.$$

Concludiamo che

$$L^-(x) = \min\{x, 1-x\}$$

$$L^+(x) = \max\{x, 1-x\} \qquad \text{per } x \in (0,1).$$

ii) Quando $x \in (1,2)$ si ha

$$n+1 < \sqrt{n^2+2nx} < n+2 \quad \text{definitivamente.}$$

Infatti:

- $n^2+2n+1 = (n+1)^2 < n^2+2nx \iff 2n+1 < 2nx$ vero definitivamente perché $x>1$

- $n^2+2nx < (n+2)^2 = n^2+4n+4 \iff 2nx < 4n+4$ vero definitivamente perché $x<2$.

Dunque, per n pari:

$$\left\{\sqrt{n^2+2nx}\right\} = \sqrt{n^2+2nx} - (n+1) = \frac{\cancel{n^2}+2nx-\cancel{n^2}-2n-1}{\sqrt{n^2+2nx}+n+1}$$

$$= \frac{2x-2-1/n}{\sqrt{1+2x/n}+1+1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x-1$$

Per n dispari:

$$\left\{-\sqrt{n^2+2nx}\right\} = -\sqrt{n^2+2nx} - (-n-2)$$

$$= n+2-\sqrt{n^2+2nx}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}+4n+4-\cancel{n^2}-2nx}{n+2+\sqrt{n^2+2nx}}$$

$$= \frac{4+4/n-2x}{1+2/n+\sqrt{1+2x/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2-x$$

Dunque $L^-(x) = \min\{x-1, 2-x\}$,
$L^+(x) = \max\{x-1, 2-x\}$. $\square$

Analisi Matematica 1A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 27/8/2019

Esercizio 1 (10pt) Calcolare i seguenti

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{3} \sqrt[3]{n - \frac{1}{3}} \right\} \quad \text{e} \quad L^+ = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{3} \sqrt[3]{n - \frac{1}{3}} \right\},$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Risposte: 1) $L^- =$ 0 ; 2) $L^+ =$ 1

Esercizio 2 i) (4pt) Provare che la successione $b_n = \cos(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ha primitiva limitata.

ii) (3pt) Stabilire se converge (semplicemente) la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

iii) (3pt) Stabilire se converge la serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \sin(n)$.

Risposte: 3) serie ii) converge: si/no sí ; 4) serie iii) converge: si/no no

Esercizio 3 Dato un parametro reale $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin|x|}{|x|^\alpha} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e sia $K_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \subset \mathbb{R}$. Per ciascun $\alpha > 0$ stabilire se:

i) (2pt) $K_\alpha \neq \emptyset$ oppure no;

ii) (5pt) K_α è chiuso oppure no;

iii) (3pt) K_α è compatto oppure no.

Risp.: 5) $K_\alpha \neq \emptyset$ per $\alpha \in \mathbb{R}^+$; 6) K_α chiuso per $\alpha \in (0,1)$; 7) K_α compatto per $\alpha \in (0,1)$

2 ore e 30 minuti a disposizione

ESERCIZIO Calcolare i seguenti

$$L^- = \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{3}\sqrt[3]{n - \frac{1}{3}} \right\}$$

$$L^+ = \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{3}\sqrt[3]{n - \frac{1}{3}} \right\}$$

dove $\{\cdot\}$ indica la parte frazionaria.

Risoluzione. Certamente $0 \le L^- \le L^+ \le 1$.

Voglio provare: $L^- = 0$

Scelgo $n \in \mathbb{N}$ fatto in questo modo

$$n = 27\,m^3 + 1 \qquad m \in \mathbb{N}$$

per togliere la radice cubica

per fare $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

positivo

Per togliere $\frac{1}{3}$

Allora abbiamo

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{n - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{27\,m^3 + \frac{2}{3}}$$

e

$$m < \frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3 + \frac{2}{3}} \overset{?}{<} m+1$$

Chiaro

Mi domando se è vero

La disuguaglianza con ? è :

$$\sqrt[3]{27m^3+\frac{2}{3}} < 3(m+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$27m^3+\frac{2}{3} < 27(m^3+3m^2+3m+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2}{3} < 27(3m^2+3m+1)$$

VERA $\forall m \geq 0$

Quindi la parte intera di $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3+\frac{2}{3}}$ è m e dunque

$$\left\{\frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3+\frac{2}{3}}\right\} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3+\frac{2}{3}} - m =$$

$$= m\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{27m^3}} - m$$

$$= m\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\frac{1}{27m^3}} - 1\right)$$

Uso $(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t)$

$$= m\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\frac{1}{27m^3} + o\left(\frac{2}{3}\frac{1}{27m^3}\right) - 1\right)$$

$$= \frac{2}{9\cdot 27\cdot m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Questo prova che $L^- = 0$.

Adesso devo capire il limite superiore.

Scelgo $n \in \mathbb{N}$ fatto così:

$$n = \underbrace{27m^3}_{\substack{\text{motivi} \\ \text{come sopra}}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per fare } 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}}}{0} = 27m^3$$

e alla fine rimane $27m^3 - \frac{1}{3} < 27m^3$.

Ora abbiamo

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{n - \frac{1}{3}}$$

$$m - 1 \overset{?}{<} \frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3 - \frac{1}{3}} < m$$

Mi chiedo se vale   Chiaro

La disuguaglianza è $27(m-1)^3 < 27m^3 - \frac{1}{3}$ ovvero

$$27(m^3 - 3m^2 + 3m - 1) < 27m^3 - \frac{1}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{27(-3m^2 + 3m - 1)}_{\substack{\downarrow \text{ per } m \to \infty \\ -\infty}} < -\frac{1}{3}$$

È vera definitivamente

Dunque

$$\left\{ \frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3 - \frac{1}{3}} \right\} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{27m^3 - \frac{1}{3}} - (m-1) =$$

$$= m\sqrt[3]{1 - \frac{1}{3}\frac{1}{27m^3}} - m + 1$$

$$= m\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{3}\frac{1}{27m^3}} - 1\right) + 1$$

$$= m\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27m^3} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) + 1$$

$$= -\frac{1}{9\cdot 27m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right) + 1 \xrightarrow[m\to\infty]{} 1.$$

Questo prova che $L^+ = 1$.

$\square$

ESERCIZIO

i) Provare che la successione $b_n = \cos(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ha primitiva limitata.

ii) Dire se converge (semplicemente) la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

iii) Dire se converge (semplicemente) la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \sin(n).$$

Risoluzione. i) La primitiva di $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata.

Infatti,

$$\sum_{n=0}^{N} \cos(n) = \sum_{n=0}^{N} \operatorname{Re}(e^{in}) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N} (e^{i})^n =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{1 - e^{(N+1)i}}{1 - e^{i}}$$

e quindi

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \cos(n) \right| \leq \left| \operatorname{Re} \frac{1 - e^{(N+1)i}}{1 - e^{i}} \right| \leq \left| \frac{1 - e^{(N+1)i}}{1 - e^{i}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{|1 - e^{i}|} < \infty \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

ii) $b_n = \cos n$ ha primitiva limitata e $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ è infinitesima decrescente:

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin(0) = 0 \quad e \quad \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Per il Criterio di Abel - Dirichlet la serie al punto ii) converge.

iii) Sappiamo questo: se $x \notin \pi\mathbb{Q}$ allora la successione $(e^{ixn})_{n\in\mathbb{N}}$ è densa nella circonferenza.

Chiaramente $1 \notin \pi\mathbb{Q}$ perché π è irrazionale.

Quindi esiste $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ selezione di indici tale che $e^{ixn_k} \overset{x=1}{=} e^{in_k}$ converge dove vogliamo. Ad esempio:

$$e^{in_k} = \cos n_k + i \sin n_k \to \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi

$$\lim_{k\to\infty} \cos n_k \sin n_k = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

E quindi $\lim_{n\to\infty} \sin(n)\cos(n) \neq 0$ (in effetti non esiste). Quindi la serie al punto iii) non può convergere. È violata la condizione necessaria di convergenza.

$\square$

ESERCIZIO Dato un parametro reale $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin|x|}{|x|^\alpha} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

e sia $K_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \subset \mathbb{R}$.

Per ciascun $\alpha > 0$ stabilire se:

i) $K_\alpha \neq \emptyset$ oppure no;

ii) K_α è chiuso oppure no;

iii) K_α è compatto oppure no.

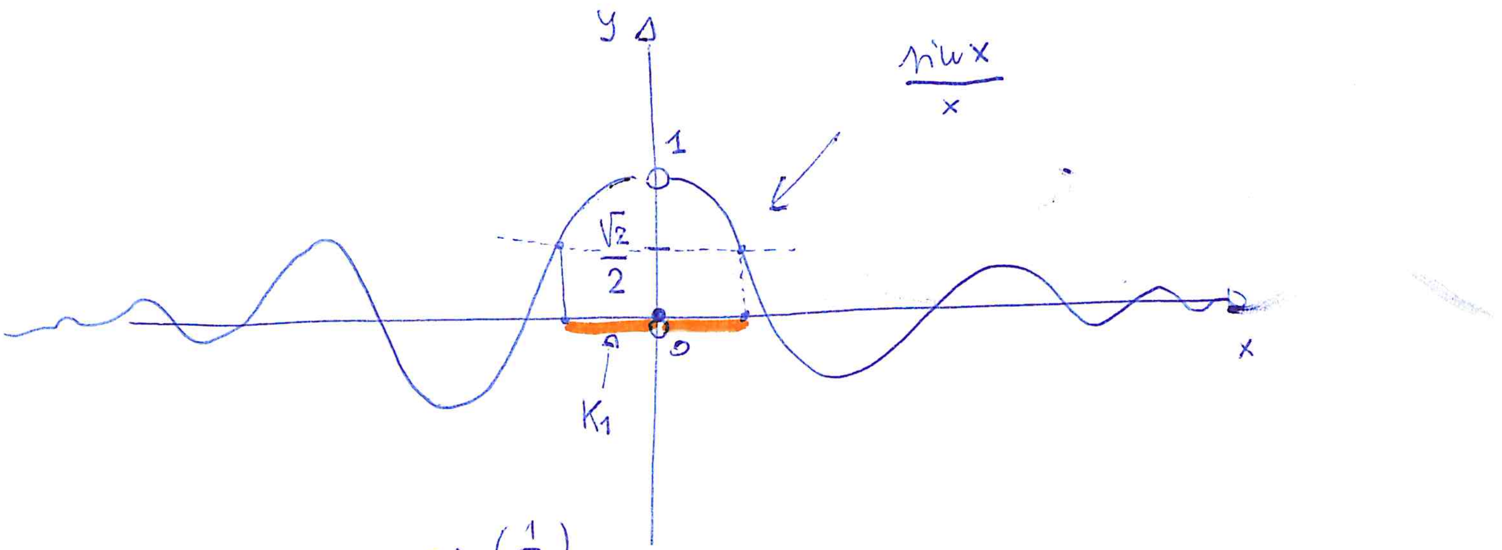
Risoluzione i) Osserviamo che $f(1) = \dfrac{\sin 1}{1} = \sin 1 \geq$ $\geq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, per ogni $\alpha > 0$. Dunque si ha che $1 \in K_\alpha$ per ogni $\alpha > 0$ e quindi $K_\alpha \neq \emptyset$ sempre.

ii) Osserviamo che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ \infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Dunque per $\alpha < 1$ f è continua. In questo caso K_α è chiuso essendo $K_\alpha = f_\alpha^{-1}\Big(\underbrace{\left[\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)}_{\text{chiuso}}\Big)$ con f_α continua.

Quando $\alpha = 1$ il grafico di f è circa il seguente



Siccome $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ i punti $\frac{1}{n}$ appartengono a K_1 e tuttavia $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ con $0 \notin K_1$.

Quindi K_1 NON è chiuso.

Quando $\alpha > 1$ la situazione è simile. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}} = +\infty \quad \text{per } \alpha > 1$$

e quindi $\frac{1}{n} \in K_\alpha$ (definitivamente).

Ma anche in questo caso $0 \notin K_\alpha$. Dunque K_α non è chiuso.

iii) Per $\alpha \geq 1$ K_α non è compatto perché non è chiuso. Vediamo se per $\alpha < 1$ l'insieme K_α è limitato. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sin|x|}{|x|^\alpha} = 0 \quad \text{per } \alpha > 0 .$$

Dunque esiste $M_\alpha > 0$ tale che

$$|x| > M_\alpha \Rightarrow \frac{\sin|x|}{|x|^\alpha} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dunque $K_\alpha \subset [-M_\alpha, M_\alpha]$ è limitato.

Per Heine-Borel K_α è compatto per $\alpha < 1$.

$\square$