

Analisi Matematica 1
Appunti del Corso
Versione provvisoria: Capitoli 1–5

Roberto Monti

MATEMATICA – ANNO ACCADEMICO 2026-27

VERSIONE DEL 25 SETTEMBRE 2026

Indice

Capitolo 1. Numeri reali	5
1. Introduzione assiomatica dei numeri reali	5
2. $\mathbb{R}$ come spazio metrico	9
3. Principio di induzione	10
4. Esercizi	11
Capitolo 2. Numeri complessi	17
1. Numeri complessi come campo	17
2. Rappresentazione trigonometrica ed esponenziale	20
3. Radici di un numero complesso	21
4. $\mathbb{C}$ come spazio metrico	22
5. Polinomi complessi	23
6. Esercizi	24
Capitolo 3. Funzioni di variabile reale	27
1. Dominio, immagine, antimmagine e grafico	27
2. Funzioni pari e dispari, sup e max	27
3. Funzioni iniettive, suriettive, monotone. Funzione inversa e composta	29
4. Funzioni trigonometriche e loro inverse	30
5. Funzioni iperboliche	33
6. Potenze e radici	34
7. Esponenziali e logaritmi	36
8. Esercizi	38
Capitolo 4. Limiti di funzione	41
1. Definizione di limite	41
2. Calcolo dei limiti con la definizione	42
3. Operazioni con i limiti	44
4. Analisi locale delle funzioni. Sviluppi asintotici	47
5. Calcolo dei limiti con gli sviluppi asintotici	49
6. Gerarchia degli infiniti	51
7. Asintoti obliqui	51
8. Esercizi	53
Capitolo 5. Successioni reali	55
1. Successioni numeriche	55
2. Esempi di successioni elementari	58
3. Successioni monotone	61
4. Un limite notevole	62
5. Successioni ricorsive	64

6. Esercizi	64
Capitolo 6. Funzioni continue	69
1. Definizione di continuità	69
2. Continuità delle funzioni elementari	70
3. Teoremi degli zeri e dei valori intermedi	71
4. Continuità della funzione composta e della funzione inversa	72
5. Teorema di Weierstrass	73
6. Esercizi	76
Capitolo 7. Calcolo differenziale	79
1. Derivata di funzione	79
2. Derivata delle funzioni elementari	81
3. Derivata della funzione composta e inversa	83
4. Tavola delle derivate	86
5. Punti critici e punti di estremo locale	87
6. Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy	87
7. Derivata e monotonia	90
8. Teoremi di Hospital	92
9. Teorema di Taylor	94
10. Convessità	98
11. Esercizi	102
Capitolo 8. Integrale di Riemann	109
1. Definizione di integrale di Riemann	109
2. Integrabilità delle funzioni continue	112
3. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale	114
4. Integrazione di funzioni razionali	117
5. Integrazione per parti e per sostituzione	121
6. Esercizi svolti	124
Capitolo 9. Introduzione alle equazioni differenziali	127
1. Equazioni differenziali lineari del primo ordine	127
2. Equazioni differenziali a variabili separabili	128
3. Altre classi di equazioni	130
4. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine	131
Capitolo 10. Esercizi	137
1. Insiemi, cardinalità, induzione	137
2. Successioni reali e complesse	137
3. Serie reali e complesse	137
4. Sottosuccessioni. Completezza e compattezza in $\mathbb{R}$	138
Numeri naturali e induzione	143
Numeri reali, disequazioni, estremo superiore e inferiore	143
Successioni	145
Integrali	147

CAPITOLO 1

Numeri reali

1. Introduzione assiomatica dei numeri reali

In questa sezione introduciamo in modo assiomatico l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali come *campo ordinato completo*. Non prenderemo in esame la costruzione effettiva dei numeri reali. Premettiamo le definizioni di ordine parziale e ordine totale.

Una *relazione* su un insieme X è un sottoinsieme $R \subset X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}$. Dati due elementi $x, y \in X$, diciamo che x è nella relazione R con y se la coppia ordinata soddisfa la condizione $(x, y) \in R$. In questo caso si è soliti scrivere xRy (“ x è nella relazione R con y ”).

DEFINIZIONE 1.1 (Ordine parziale e totale). Una relazione $\leq$ su un insieme X è una relazione di *ordine parziale* se per ogni $x, y, z \in X$ si ha:

- i) $x \leq x$ (proprietà riflessiva);
- ii) se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);
- iii) se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

Se, in aggiunta, si verifica:

- iv) $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (confrontabilità),

allora la relazione si dice di *ordine totale*.

ESEMPIO 1.2. Sia Y un insieme qualsiasi, e indichiamo con $X = \mathcal{P}(Y) = \{A : A \subset Y\}$ la potenza di Y , l'insieme delle parti di Y , insieme vuoto $\emptyset$ ed Y inclusi. Con la relazione di inclusione insiemistica $\subset$ (da intendere: “incluso o uguale”), l'insieme X è parzialmente ordinato, ma non totalmente ordinato.

I numeri reali con l'usuale relazione d'ordine sono totalmente ordinati. Li introduciamo elencando le proprietà (gli “assiomi”) che li caratterizzano.

DEFINIZIONE 1.3. I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ munito di due operazioni, l'addizione $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e la moltiplicazione $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e di una relazione di ordine totale $\leq$ che verificano, per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$, la seguente lista di assiomi.

Assiomi dell'addizione:

- (A1) $x + y = y + x$ (proprietà commutativa);
- (A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (proprietà associativa);
- (A3) esiste $0 \in \mathbb{R}$ tale che $x + 0 = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro, lo zero);
- (A4) per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $-x \in \mathbb{R}$ tale che $x + (-x) = 0$ (esiste l'opposto).

Assiomi della moltiplicazione:

- (M1) $x \cdot y = y \cdot x$ (proprietà commutativa);
- (M2) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (proprietà associativa);

(M3) esiste $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tale che $1 \cdot x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (esiste l'elemento neutro della moltiplicazione, l'unità);

(M4) per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, esiste $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esiste il reciproco).

Proprietà distributiva:

$$(D) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Assiomi dell'ordine:

(O1) se $x \leq y$ allora $x + z \leq y + z$;

(O2) se $x \leq y$ e $z \geq 0$, allora $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Assioma di completezza:

(AC) Ogni insieme non vuoto $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ha estremo superiore.

Chiariremo l'assioma di completezza fra breve.

DEFINIZIONE 1.4 (Campo, campo ordinato, campo ordinato completo).

i) Un insieme X munito di due operazioni $+$ e $\cdot$ che verificano gli assiomi (A1)-(D) si dice *campo*.

ii) Se, in aggiunta ad i), è definita su X una relazione di ordine totale $\leq$ che verifica gli assiomi (O1)-(O2) si ottiene un *campo ordinato*.

iii) Se, infine, $(X, +, \cdot, \leq)$ verifica anche l'assioma di completezza, si ottiene un *campo ordinato completo*.

Indichiamo con $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ gli insiemi dei numeri razionali, reali e complessi. $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$ sono campi ordinati. $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo (si può dimostrare che esiste un unico campo ordinato completo, a meno di isomorfismi di campi ordinati). Il campo $\mathbb{C}$ non può essere dotato di un ordine che lo renda un campo ordinato. Abbiamo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Useremo anche la seguente notazione: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} = \{\text{insieme dei numeri naturali}\} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{\text{insieme dei numeri interi}\} \subset \mathbb{R}$.

ESEMPIO 1.5. A titolo di esempio, facciamo alcuni calcoli basandoci solo sugli assiomi di campo.

1) Verifichiamo che $x \cdot 0 = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$x \cdot 0 \stackrel{A3}{=} x \cdot (0 + 0) \stackrel{D}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0,$$

e dagli assiomi A4 ed A3 si deduce che $x \cdot 0 = 0$.

2) Si ha $(-1) \cdot (-1) = 1$. Infatti:

$$0 \stackrel{1)}{=} 0 \cdot (-1) \stackrel{A4}{=} (1 + (-1)) \cdot (-1) \stackrel{D}{=} 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \stackrel{M3}{=} -1 + (-1) \cdot (-1)$$

e la tesi segue sommando 1 a entrambi i membri ed usando A3 e A4.

3) Si ha $-x = (-1) \cdot x$. Infatti:

$$0 \stackrel{1)}{=} 0 \cdot x \stackrel{A4}{=} (1 + (-1)) \cdot x \stackrel{D}{=} 1 \cdot x + (-1) \cdot x \stackrel{M3}{=} x + (-1) \cdot x,$$

e aggiungendo a destra e sinistra $-x$ si trova la tesi.

ESERCIZIO 1.6. Sia $(X, +, \cdot, \leq)$ un campo ordinato. Usando ad ogni passo gli assiomi e i punti 2), 3) precedenti, verificare che $x^2 \geq 0$ per ogni $x \in X$.

DEFINIZIONE 1.7 (Maggiorante, estremo superiore, massimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

- i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *maggiorante* di A se $x \leq y$ per ogni $x \in A$.
- ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato* se ha un maggiorante.
- iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo superiore* di A se è un maggiorante di A e se $x \leq z$ per ogni altro maggiorante z di A (ovvero x è il minimo dei maggioranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di A poniamo

$$\sup A = x.$$

- iv) Se A non è superiormente limitato poniamo

$$\sup A = \infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\sup \emptyset = -\infty$.

- v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *massimo* di A se $x = \sup A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\max A = x.$$

L'estremo superiore e il massimo, se esistono, sono unici.

OSSERVAZIONE 1.8 (Caratterizzazione dell'estremo superiore). Un numero $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se e solo se:

- i) $y \leq x$ per ogni $y \in A$ (x è un maggiorante);
- ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in A$ tale che $y > x - \varepsilon$ (x è il minimo dei maggioranti).

DEFINIZIONE 1.9 (Minorante, estremo inferiore, minimo). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

- i) Un elemento $y \in \mathbb{R}$ è un *minorante* di A se $y \leq x$ per ogni $x \in A$.
- ii) L'insieme A si dice *inferiormente limitato* se ha un minorante.
- iii) Un elemento $x \in \mathbb{R}$ si dice *estremo inferiore* di A se è un minorante di A e se $z \leq x$ per ogni altro minorante z di A (ovvero x è il massimo dei minoranti). Se $x \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di A poniamo

$$\inf A = x.$$

- iv) Se A non è inferiormente limitato poniamo

$$\inf A = -\infty.$$

La convenzione naturale per l'insieme vuoto è di porre $\inf \emptyset = \infty$.

- v) Un numero $x \in \mathbb{R}$ si dice *minimo* di A se $x = \inf A$ ed $x \in A$. Scriveremo in questo caso

$$\min A = x.$$

Vediamo alcune conseguenze della completezza.

PROPOSIZIONE 1.10 (Proprietà di Archimede). Per ogni coppia di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, esiste un numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.

DIM. Supponiamo per assurdo che esistano numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ tali che $nx \leq y$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme

$$A = \{nx \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$$

è superiormente limitato, in quanto y ne è un maggiorante. Per l'Assioma di completezza esiste l'estremo superiore $\bar{x} = \sup A$. Il numero $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti due proprietà:

- 1) $nx \leq \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\bar{x}$ è un maggiorante di A ;
- 2) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > \bar{x} - \varepsilon$, ovvero $\bar{x}$ è il minimo dei maggioranti.

Scegliamo $\varepsilon = x > 0$ nella proprietà 2) e sia $n \in \mathbb{N}$ il corrispondente numero naturale, ovvero $nx > \bar{x} - x$. Allora da 1) e 2) si ottiene:

$$\bar{x} \geq (n+1)x = nx + x > \bar{x} - x + x = \bar{x},$$

che è una contraddizione. □

DEFINIZIONE 1.11 (Parte intera e frazionaria). Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale e si consideri l'insieme

$$A_x = \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\}.$$

Per la proprietà di Archimede, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Quindi A_x è un insieme di numeri interi superiormente limitato che ha dunque massimo. Definiamo la *parte intera di x*

$$[x] = \max \{p \in \mathbb{Z} : p \leq x\} \in \mathbb{Z}.$$

Il numero $[x] \in \mathbb{Z}$ è il più grande intero minore o uguale ad x . La *parte frazionaria di x* è il numero $\{x\} = x - [x]$.

Parte intera e parte frazionaria verificano le seguenti disuguaglianze:

$$[x] \leq x < [x] + 1, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Proviamo che i numeri razionali $\mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE 1.12 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

DIM. Siccome $y - x > 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$, ovvero $ny - nx > 1$, ovvero $nx < ny - 1$. Segue che

$$nx < ny - 1 < [ny] \leq ny \quad \Rightarrow \quad x < \frac{[ny]}{n} \leq y.$$

Cerchiamo ora $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$x < \frac{[ny]}{n} - \frac{1}{m} < y.$$

La disuguaglianza a sinistra è equivalente a

$$m \left(\frac{[ny]}{n} - x \right) > 1,$$

ed un tale $m \in \mathbb{N}$ esiste per la proprietà di Archimede. □

2. $\mathbb{R}$ come spazio metrico

La funzione *modulo* o *valore assoluto* su $\mathbb{R}$ è la funzione $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, nel seguente modo

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0; \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Valgono le disuguaglianze elementari $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$, e inoltre:

- i) $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- ii) $|x| = |-x|$;
- iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (subaddittività).

La verifica di iii) segue dalle disuguaglianze

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad -(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|.$$

Una conseguenza di iii) è la *disuguaglianza triangolare*

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \quad \text{per ogni } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Infatti, $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Dalla iii) segue anche $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ che, riordinata, fornisce $|x| - |y| \leq |x - y|$. Siccome i ruoli di x, y si possono scambiare, si ottiene la disuguaglianza

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Definiamo la *funzione distanza* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$. Questa funzione verifica le seguenti proprietà:

- i) $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$;
- iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ (disuguaglianza triangolare).

La coppia $(\mathbb{R}, d)$ è allora uno *spazio metrico*. La funzione $d(x, y) = |x - y|$ si dice *distanza standard* o *euclidea* su $\mathbb{R}$.

L'intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di raggio $r > 0$ è l'insieme (intervallo):

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$

In generale, gli intervalli di $\mathbb{R}$ possono essere limitati, non limitati, aperti, chiusi, aperti a destra o a sinistra. Precisamente, dati $-\infty < a < b < \infty$, si definiscono i seguenti intervalli limitati:

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} && \text{intervallo aperto,} \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} && \text{intervallo aperto a destra,} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} && \text{intervallo aperto a sinistra,} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} && \text{intervallo chiuso.} \end{aligned}$$

Poi si definiscono gli intervalli illimitati:

$$\begin{aligned} (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} && \text{intervallo aperto,} \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} && \text{intervallo chiuso,} \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} && \text{intervallo aperto,} \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} && \text{intervallo chiuso,} \end{aligned}$$

cui si aggiunge l'intervallo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

3. Principio di induzione

Il *Principio di induzione* è il criterio con cui si costruiscono i numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Principio di induzione (versione 1). Sia $A \subset \mathbb{N}$ un sottoinsieme dei numeri naturali e supponiamo che:

- i) $1 \in A$ (base induttiva);
- ii) se $n \in A$ allora anche $n + 1 \in A$ (passo induttivo).

Allora $A = \mathbb{N}$.

Ecco una sua formulazione equivalente.

Principio di induzione (versione 2). Sia $A(n)$ un'affermazione (ad es. una formula) che riguarda il numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che:

- i) $A(1)$ è vera (base induttiva);
- ii) $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$. Ovvero, dalla validità dell'ipotesi induttiva $A(n)$ segue la validità di $A(n + 1)$.

Allora $A(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO 1.13 (Disuguaglianza di Bernoulli). Per ogni $x > -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(A(n)) \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Verifichiamo la formula $A(n)$ con il principio di induzione.

i) Base induttiva. Per $n = 1$ la formula è vera: si ottiene l'identità $1 + x = 1 + x$.

ii) Passo induttivo. Supponiamo vera la formula $A(n)$ per un certo $n \in \mathbb{N}$ e dimostriamola per $n + 1$. Usando l'ipotesi induttiva (ovvero $(1 + x)^n \geq 1 + nx$) e il fatto che $1 + x > 0$ si trova

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \\ &\geq (1 + nx)(1 + x) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x. \end{aligned}$$

Abbiamo anche usato il fatto che $nx^2 \geq 0$.

ESEMPIO 1.14 (Somma geometrica parziale). Per ogni $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(A(n)) \quad \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Verifichiamo la formula $A(n)$ con il principio di induzione.

i) Base induttiva. Per $n = 1$ la formula è vera. Infatti, partendo dal membro di destra si ottiene:

$$\frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x.$$

ii) Passo induttivo. Supponiamo vera la formula $A(n)$ per un certo $n \in \mathbb{N}$ e dimostriamola per $n+1$. Usando l'ipotesi induttiva (e la proprietà associativa della somma) si trova:

$$\begin{aligned} (1+x+x^2+\dots+x^n)+x^{n+1} &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 1.15 (Binomio di Newton). Introduciamo alcune notazioni preliminari. Dato $n \in \mathbb{N}$ indichiamo con $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ il fattoriale di n . Per convenzione $0! = 1$. Dati $n, k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ con $k \leq n$ definiamo il coefficiente binomiale (si legge “ n su k ”)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}.$$

Questo coefficiente binomiale conta il numero di modi diversi di scegliere k elementi da un insieme di n elementi.

La formula del binomio di Newton afferma che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Lasciamo al lettore il compito di verificare questa identità utilizzando il Principio di induzione. Nel passo induttivo serve usare la seguente identità combinatoria sui coefficienti binomiali, per $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

4. Esercizi

ESERCIZIO 1.16. Sia X un insieme. Verificare che $(\mathcal{P}(X), \subset)$ è un insieme parzialmente ordinato.

ESERCIZIO 1.17. Sia X un campo ordinato. Provare che per ogni x, y, z vale l'implicazione: $x \leq y$ e $z \leq 0 \Rightarrow yz \leq xz$. Indicare in ciascun passaggio l'assioma utilizzato.

ESERCIZIO 1.18. i) Verificare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ii) Verificare che $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. iii) Verificare che $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$.

ESERCIZIO 1.19. Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Provare che se $\sqrt{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ allora anche $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

ESERCIZIO 1.20. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ non negativi. Verificare che

$$\begin{aligned} [x] + [y] &\leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1, \\ [x][y] &\leq [xy] \leq [x] + [y] + [x][y], \end{aligned}$$

dove $[x]$ è la parte intera di x .

ESERCIZIO 1.21. Verificare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha:

$$[x] + [x + 1/n] + \dots + [x + (n-1)/n] = [nx],$$

dove $[x]$ è la parte intera di x .

ESERCIZIO 1.22. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme e $-A = \{-x \in \mathbb{R} : x \in A\}$ l'insieme opposto. Verificare che

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

ESERCIZIO 1.23. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato. Verificare che

$$\sup A - \inf A = \sup\{x - y \in \mathbb{R} : x, y \in A\}.$$

ESERCIZIO 1.24. Data una funzione $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, verificare che

$$\sup_{n, m \in \mathbb{N}} a(n, m) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \in \mathbb{N}} a(n, m).$$

Ovvero: il sup congiunto è uguale al sup iterato.

ESERCIZIO 1.25. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \left\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

Provare che $\inf A = -\infty$.

ESERCIZIO 1.26. Siano dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{1+2n^2}{1+n^2} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} \in \mathbb{R} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \right\},$$

$$C = \{x^2 - 2x \sin x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \quad D = \left\{ \frac{n^2 \cos(1/n)}{1-n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}.$$

- 1) Determinare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.
- 2) Determinare $\inf B$ e verificare che $\sup B = 1/2$. Dire se esistono $\min B$ e $\max B$.
- 3) Verificare che $\sup C = \infty$.
- 4) Verificare che $\inf D = -\infty$.

ESERCIZIO 1.27. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A = \left\{ \frac{xy}{x+y} \in \mathbb{R} : 0 < x, y < 1 \right\}.$$

- 1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
- 2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

ESERCIZIO 1.28. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme

$$A := \{n - \sqrt{n^2 - 1} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}.$$

- 1) Calcolare $\sup A$ e dire se esiste $\max A$.
- 2) Calcolare $\inf A$ e dire se esiste $\min A$.

ESERCIZIO 1.29. Sia $A \subset \mathbb{R}$ il seguente insieme:

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} - \frac{n+1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

dove $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Calcolare $\sup A$, $\inf A$ e dire se esistono $\max A$ e $\min A$.

ESERCIZIO 1.30. Si consideri l'insieme

$$A = \left\{ \frac{n+1 - n^{2^{n+1}}}{(n+1)^{2^{n+1}}} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

dove $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Calcolare $\sup A$, $\inf A$, e dire se esistono $\max A$ e $\min A$.

ESERCIZIO 1.31. Sia $A = \{\sqrt[n]{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$. Calcolare $\sup A$.

ESERCIZIO 1.32. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri naturali positivi. Provare che è sempre vera una delle disuguaglianze

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} < \frac{m+2n}{m+n} \quad \text{oppure} \quad \frac{m+2n}{m+n} < \sqrt{2} < \frac{m}{n}.$$

Calcolare il minimo

$$\min \left\{ \left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right|, \left| \frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2} \right| \right\}.$$

ESERCIZIO 1.33. Siano $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ ed $A = \{a, 2a, \dots, (n-1)a\}$. Provare che $\text{dist}(A, \mathbb{Z}) \leq 1/n$.

ESERCIZIO 1.34. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$ con $t > 0$. Provare la disuguaglianza:

$$xy \leq \frac{1}{2} \left(tx^2 + \frac{1}{t} y^2 \right).$$

ESERCIZIO 1.35. Siano $1 < p, q < \infty$ due numeri reali tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Provare che per ogni $x, y \geq 0$ vale la disuguaglianza:

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q.$$

ESERCIZIO 1.36. Siano $0 < x_1, \dots, x_n < 1$ numeri reali. Provare la disuguaglianza, per $n \geq 2$:

$$(1 - x_1) \cdots (1 - x_n) < 1 - x_1 \cdots x_n.$$

ESERCIZIO 1.37 (Disuguaglianza Media Geometrica-Aritmetica). Siano $x_1, \dots, x_n \geq 0$ numeri reali. Provare che

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

e dimostrare che si ha uguaglianza se e solo se i numeri sono tutti uguali fra loro.

ESERCIZIO 1.38. Siano $x_1, \dots, x_n \geq 0$ numeri reali e sia $x = x_1 + \dots + x_n$ la loro somma. Provare che

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq \frac{x^2}{4}.$$

ESERCIZIO 1.39. Verificare mediante induzione le seguenti identità per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

ESERCIZIO 1.40. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale non negativo. Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha la seguente versione migliorata della disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2.$$

ESERCIZIO 1.41. Sia $x \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $0 < x < 1$. Usando il principio di induzione, mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, vale la seguente variante della disuguaglianza di Bernoulli

$$(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}.$$

ESERCIZIO 1.42. Dimostrare per induzione che

$$\begin{aligned} i) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2(\sqrt{n+1} - 1), \quad n \geq 1 \\ ii) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1, \\ iii) \quad & n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \quad n \geq 6. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.43. Usando le proprietà elementari del logaritmo verificare per induzione che $\log(n+1) \leq n$.

ESERCIZIO 1.44. Ad un torneo che si svolge in più giornate partecipano $n \geq 2$ squadre e ciascuna incontra una sola volta ogni altra squadra. Provare che alla fine di ogni giornata ci sono almeno due squadre che hanno giocato lo stesso numero di partite.

ESERCIZIO 1.45. Ad un torneo partecipano $n \in \mathbb{N}$ squadre, $n \geq 3$. Ogni squadra gioca una volta con ogni altra squadra. Ci sono tre squadre A, B, C tali che A sconfigge B , B sconfigge C e C sconfigge A . Dimostrare che alla fine del torneo ci sono almeno due squadre a pari punti.

ESERCIZIO 1.46. Siano $n, k \in \mathbb{N}_0$ con $k \leq n$. Verificare l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

ESERCIZIO 1.47. Verificare la seguente disuguaglianza

$$\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{n}.$$

ESERCIZIO 1.48. Verificare la seguente identità

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 = 2^{n-2} n(n+1).$$

ESERCIZIO 1.49. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$. Calcolare il resto della divisione del polinomio $p(x) = (x+a)^n$ per il polinomio $q(x) = (x+b)^m$. Precisamente, calcolare i polinomi $s(x)$ (il quoziente della divisione) ed $r(x)$ (il resto della divisione) tali che $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, dove il grado di r è al più $m-1$.

CAPITOLO 2

Numeri complessi

Introduciamo un simbolo i tale che $i^2 = -1$. L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è definito nel seguente modo:

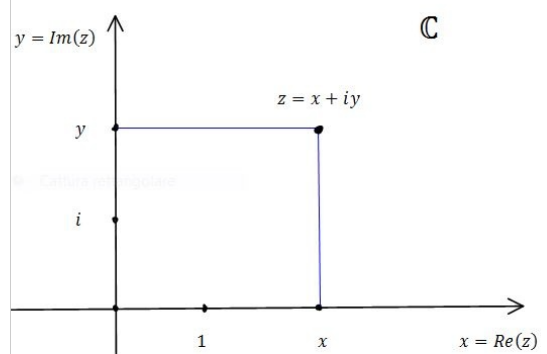
$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Mediante $x + iy \leftrightarrow (x, y)$, $\mathbb{C}$ viene identificato con $\mathbb{R}^2$. Pensato come l'insieme dei numeri complessi, il piano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ è chiamato piano di Gauss.

Definiamo la *parte reale* e la *parte immaginaria* del numero complesso $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x + iy) && \text{parte reale di } z \\ y &= \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x + iy) && \text{parte immaginaria di } z. \end{aligned}$$

Le parti reale e immaginaria di un numero complesso sono numeri reali.



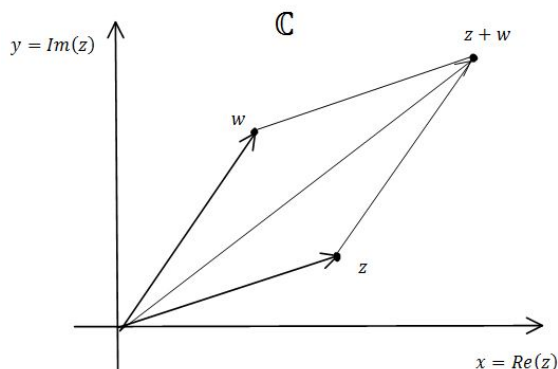
1. Numeri complessi come campo

Sull'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è possibile introdurre una struttura di campo, con operazioni di addizione e moltiplicazione.

Definiamo l'addizione di due numeri complessi $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$ in $\mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} z + w &= (x + iy) + (\xi + i\eta) \\ &= (x + \xi) + i(y + \eta). \end{aligned}$$

Nel piano di Gauss, l'addizione è semplicemente la somma vettoriale.



La moltiplicazione di due numeri complessi $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$ in $\mathbb{C}$ è definita nel seguente modo:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x + iy) \cdot (\xi + i\eta) \\ &= x\xi + ix\eta + iy\xi + i^2y\eta \\ &= (x\xi - y\eta) + i(x\eta + y\xi). \end{aligned}$$

Abbiamo usato la regola $i^2 = -1$. Vedremo in seguito l'interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi. Il simbolo $\cdot$ per indicare la moltiplicazione viene spesso omesso.

Calcoliamo formalmente il reciproco di un numero complesso $z \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2-i^2y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Usiamo questo calcolo formale per *definire* il reciproco di $z = x+iy \neq 0$ nel seguente modo

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Ripercorrendo a ritroso il calcolo precedente, si verifica che per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ si ha

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1.$$

Definito il reciproco di un numero complesso, è immediato definire anche il quoziente fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}.$$

L'operazione di addizione verifica gli assiomi A1–A4, dove lo zero $0 = 0 + i0 \in \mathbb{C}$ è l'origine del piano cartesiano. L'operazione di moltiplicazione verifica gli assiomi M1–M4, dove l'unità è $1 = 1 + i0 \in \mathbb{C}$. Inoltre addizione e moltiplicazione verificano la proprietà distributiva:

$$z \cdot (w + \zeta) = z \cdot w + z \cdot \zeta, \quad z, w, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Dunque $\mathbb{C}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ forma un *campo*.

Nel campo complesso $\mathbb{C}$ non c'è alcuna relazione d'ordine totale compatibile con la struttura algebrica: in assenza di uno specifico ordine, espressioni come $z \leq w$ non sono definite.

PROPOSIZIONE 2.1. Sul campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ non è possibile introdurre alcuna relazione d'ordine totale compatibile con gli assiomi di campo.

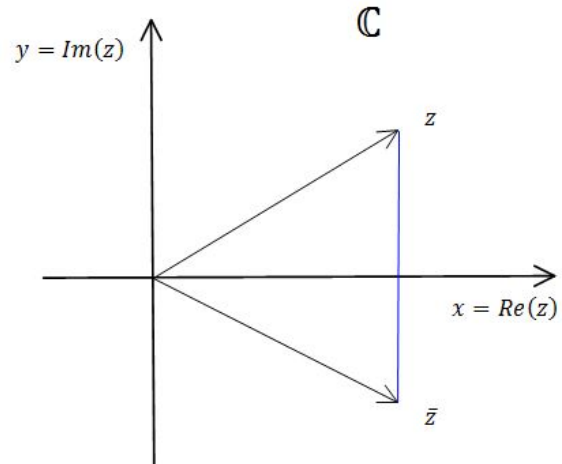
DIM. Supponiamo per assurdo che ci sia su $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine totale $\leq$. L'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ dovrebbe allora verificare $-1 = i^2 \geq 0$ (perchè nei campi ordinati, i quadrati sono tutti non negativi) e quindi si avrebbe $1 \leq 0$. D'altra parte si ha anche $1 = 1^2 \geq 0$. Si deduce che $1 = 0$ e questo non è possibile, perchè per costruzione dei numeri reali abbiamo imposto $0 \neq 1$. $\square$

Definiamo il *coniugato* del numero complesso $z = x+iy$ come il numero complesso

$$\bar{z} = x - iy.$$

Nel piano complesso $\bar{z}$ è il punto simmetrico a z rispetto all'asse delle x :

L'operazione di coniugazione verifica le proprietà descritte nel seguente teorema, la cui dimostrazione è elementare e viene omessa.



PROPOSIZIONE 2.2. Dati numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$, si ha:

- 1) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;
- 2) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$;
- 3) $\bar{\bar{z}} = z$;
- 4) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, w \neq 0$.

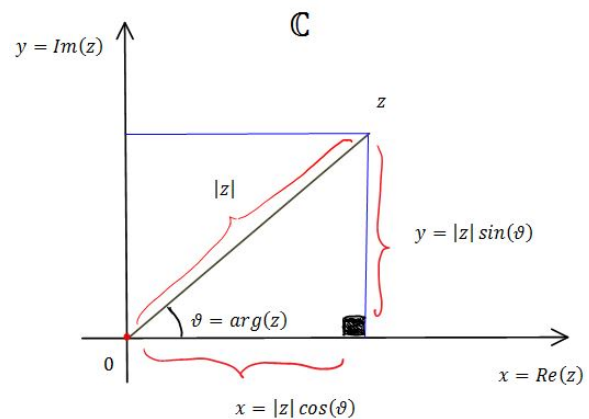
Sono anche utili le seguenti formule per le parti reale e immaginaria di $z = x + iy$:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Il *modulo* del numero complesso $z = x + iy$ è

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\bar{z}} \\ &= \sqrt{(x + iy)(x - iy)} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Il modulo è sempre un numero reale non negativo, $|z| \geq 0$. Per il Teorema di Pitagora, il modulo $|z|$ è la lunghezza del vettore z .



Se $z = x \in \mathbb{R}$ è un numero reale, allora si ha $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ e si trova il valore assoluto di x : il modulo è l'estensione del valore assoluto.

Definiamo l'*argomento* di z come l'angolo $\vartheta \in [0, 2\pi)$ formato in senso antiorario dal punto $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, a partire dal semiasse positivo delle x :

$$\arg(z) = \vartheta.$$

Dalla trigonometria sappiamo che si hanno le relazioni

$$x = |z| \cos \vartheta \quad \text{e} \quad y = |z| \sin \vartheta.$$

Supponendo $x \neq 0$ e formando il quoziente si trova

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{y}{x}.$$

Quando $x = 0$, l'argomento sarà $\pi/2$ nel caso $y > 0$; sarà invece $3\pi/2$ nel caso $y < 0$. Quando $\vartheta \in [0, \pi/2)$, ovvero quando z è nel primo quadrante, possiamo invertire la relazione precedente e trovare la formula per l'argomento

$$\arg(z) = \vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

ESERCIZIO 2.3. Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, provare che:

- 1) $\arg(z) = \pi + \arctan(y/x)$ quando z è nel secondo e terzo quadrante.
- 2) $\arg(z) = 2\pi + \arctan(y/x)$ quando z è nel quarto quadrante.

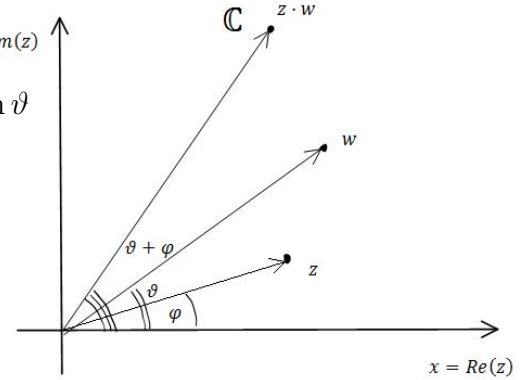
2. Rappresentazione trigonometrica ed esponenziale

Se $r = |z| \geq 0$ è il modulo di $z \in \mathbb{C}$ e $\vartheta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$ è il suo argomento, avremo:

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r \cos \vartheta + ir \sin \vartheta \\ &= r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Questa è la *rappresentazione trigonometrica* di z .

Con la rappresentazione trigonometrica si comprende il significato geometrico della moltiplicazione di numeri complessi. Siano



$$\begin{aligned} z &= r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ w &= \varrho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \end{aligned}$$

con $r, \varrho > 0$ e $\vartheta, \varphi \in [0, 2\pi)$. Allora il loro prodotto è:

$$\begin{aligned} (2.1) \quad z \cdot w &= r\varrho [\cos \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi + i(\cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \cos \varphi)] \\ &= r\varrho (\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi)). \end{aligned}$$

Abbiamo usato le formule di addizione per seno e coseno. Si deducono le seguenti conclusioni:

- 1) Il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli: $|zw| = |z||w|$;
- 2) l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti (modulo 2π): $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Per ottenere la rappresentazione esponenziale serve l'*identità di Eulero*:

$$(2.2) \quad e^{i\vartheta} := \cos \vartheta + i \sin \vartheta.$$

Per il momento accettiamo questa formula come definizione dell'esponenziale complesso. Alla fine del corso ne daremo una dimostrazione usando gli sviluppi di Taylor.

PROPOSIZIONE 2.4. L'esponenziale complesso ha le seguenti proprietà:

- 1) $|e^{i\vartheta}| = 1$ per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$;
- 2) $e^{i\vartheta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\vartheta+\varphi)}$ (formula di addizione);
- 3) $(e^{i\vartheta})^n = e^{in\vartheta}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (formula di de Moivre).

DIM. La 1) segue dalla definizione (2.2). La 2) è una riformulazione di (2.1). La formula 3) segue iterando la 2). $\square$

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si può scrivere nel seguente modo

$$z = re^{i\vartheta},$$

dove $r = |z| \geq 0$ è il modulo di z e $\vartheta = \arg(z)$ è il suo argomento. Questa è la *rappresentazione esponenziale* di z .

3. Radici di un numero complesso

Sia $w = Re^{i\varphi}$, con $R = |w| > 0$ e $\varphi = \arg(w) \in [0, 2\pi)$, un numero complesso fissato e sia $n \in \mathbb{N}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$z^n = w$$

nell'incognita $z \in \mathbb{C}$. In altri termini, vogliamo trovare (tutte) le radici n -esime del numero complesso $w \in \mathbb{C}$. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra dobbiamo trovare esattamente n soluzioni.

Cerchiamo soluzioni in forma esponenziale $z = re^{i\vartheta}$ con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$ da determinare. Usando la formula di de Moivre, avremo

$$z^n = (re^{i\vartheta})^n = r^n(e^{i\vartheta})^n = r^n e^{in\vartheta}.$$

L'equazione $z^n = w$ diventa allora

$$r^n e^{in\vartheta} = Re^{i\varphi}.$$

Uguagliando i moduli si ottiene l'equazione

$$r^n = R \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[n]{R}.$$

D'altra parte, si ha

$$e^{in\vartheta} = e^{i\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad n\vartheta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e quindi si trovano gli argomenti

$$\vartheta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Basta considerare gli indici $k = 0, 1, \dots, n-1$, perchè gli altri k danno delle ripetizioni. In conclusione, si ottengono n radici distinte

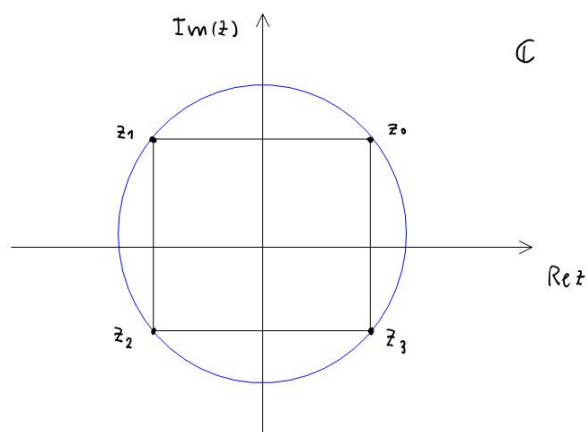
$$z_k = \sqrt[n]{R} e^{i\vartheta_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Le radici si dispongono sui vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza centrata in 0 di raggio $\sqrt[n]{R}$.

ESEMPIO 2.5. Vogliamo calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 = -1$. In primo luogo si scrive il numero complesso $w = -1$ in forma esponenziale: $R = |w| = 1$ mentre $\varphi = \arg(w) = \pi$. Dunque si ha $-1 = e^{i\pi}$. Si trovano le quattro radici

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Le soluzioni si dispongono sui vertici di un quadrato.



4. $\mathbb{C}$ come spazio metrico

Definiamo la distanza fra due numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ nel seguente modo:

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Si tratta della lunghezza del segmento che congiunge z e w . Osserviamo che, con $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$, si ha

$$\begin{aligned} |z - w| &= |x + iy - (\xi + i\eta)| \\ &= |x + iy - \xi - i\eta| \\ &= |(x - \xi) + i(y - \eta)| \\ &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \end{aligned}$$

La distanza d verifica le seguenti proprietà:

- i) $d(z, w) = 0 \Leftrightarrow |z - w| = 0 \Leftrightarrow z - w = 0 \Leftrightarrow z = w$.
- ii) $d(z, w) = |z - w| = |w - z| = d(w, z)$.
- iii) $d(z, w) \leq d(z, \zeta) + d(\zeta, w)$ (Disuguaglianza triangolare).

La verifica della disuguaglianza triangolare è lasciata come esercizio.

ESEMPIO 2.6. 1) Fissati un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ed un numero reale $r \geq 0$, l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

è la circonferenza di raggio r e centro z_0 .

2) Fissati un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ ed un numero reale $r \geq 0$, l'insieme

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

è tutto il cerchio (bordo incluso).

3) L'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$$

è un'ellisse di fuochi i e $-i$.

5. Polinomi complessi

Siano $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ numeri complessi. Un'espressione della forma

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

si dice *polinomio complesso* della variabile $z \in \mathbb{C}$. Se $a_n \neq 0$ diremo che $P(z)$ ha grado $n \in \mathbb{N}_0$.

Un numero complesso $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *radice* di un polinomio complesso $P(z)$ se $P(z_0) = 0$, ovvero se $P(z)$ calcolato in $z = z_0$ si annulla. Il vantaggio di lavorare con polinomi complessi è che ogni polinomio non costante ha un numero di radici pari al suo grado.

TEOREMA 2.7 (Fondamentale dell'Algebra). Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Allora l'equazione

$$P(z) = 0$$

ha esattamente n soluzioni (contate con la loro molteplicità).

La dimostrazione del Teorema è omessa.

ESEMPIO 2.8. Il polinomio $P(x) = 1 + x^2$ della variabile reale $x \in \mathbb{R}$ non ha radici reali. Il polinomio complesso $P(z) = 1 + z^2$ ha invece esattamente due radici in campo complesso che sono $z = \pm i$.

OSSERVAZIONE 2.9. Sia $P(z)$ un polinomio complesso di grado $n \geq 1$ con $a_n = 1$. Siano $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ le sue radici, elencate con la loro molteplicità. Allora il polinomio può essere fattorizzato nel seguente modo

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n).$$

OSSERVAZIONE 2.10. Supponiamo che il polinomio complesso

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

abbia coefficienti reali: $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Allora si ha

$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(\bar{z}) = 0.$$

Dunque, nota una radice $z \in \mathbb{C}$ (non reale) se ne conosce automaticamente una seconda $\bar{z} \in \mathbb{C}$.

Per verificare questo fatto, osserviamo preliminarmente che

$$P(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P(z)} = 0.$$

Inoltre, si ha

$$\overline{P(z)} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k z^k} = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = P(\bar{z}).$$

Abbiamo usato il fatto che i coefficienti sono reali: $\bar{a}_k = a_k$.

6. Esercizi

ESERCIZIO 2.11. Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^3 = 8i$. Ovvero, calcolare le radici cubiche di $8i$

ESERCIZIO 2.12. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 - 2i\sqrt{3}z^2 - 4 = 0$ e rappresentarle nel piano di Gauss.

ESERCIZIO 2.13. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^3 = 9\bar{z}$.

ESERCIZIO 2.14. Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2, \frac{\pi}{6} < \arg(z) < \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme $B = \{i\bar{z}, z \in A\}$.

ESERCIZIO 2.15. Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z+i}{1+i-z} \right| \leq 1, \operatorname{Re}(z^2) > 2 \right\}.$$

ESERCIZIO 2.16. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^3\bar{z} + 3z^2 - 4 = 0$.

ESERCIZIO 2.17. Disegnare nel piano di Gauss l'insieme dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(iz^2 - i\bar{z}^2) \geq -4 \\ \left| z - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2} \right| \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2.18. Consideriamo il polinomio complesso

$$P(z) = z^5 - 2z^4 + 2z^3 + 3z^2 - 6z + 6.$$

Calcolare $P(1-i)$ e quindi determinare tutte le radici di P .

ESERCIZIO 2.19. Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = i$ sia radice del polinomio

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + \lambda z^2 - 2z + 2.$$

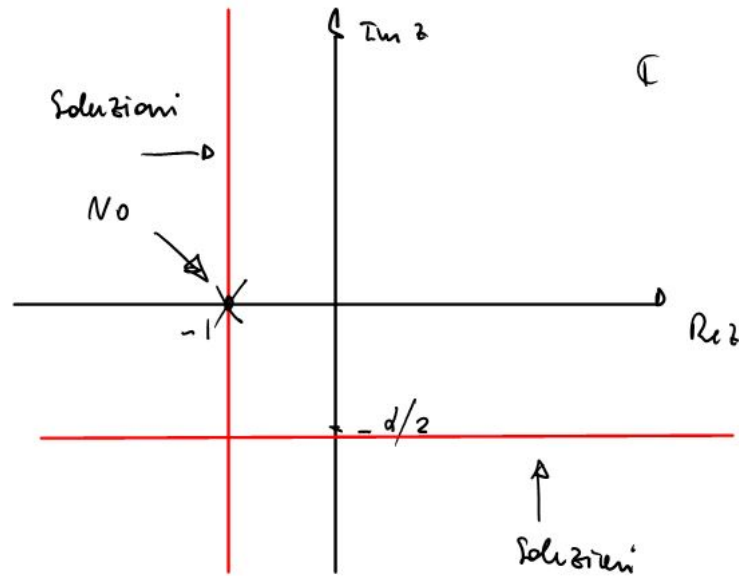
Calcolare quindi tutte le radici.

ESERCIZIO 2.20. Disegnare nel piano complesso l'insieme delle $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{\sqrt{4 - |z - 4|}}{\sqrt{4 - |z + 4i|}} > 1.$$

ESERCIZIO 2.21. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Disegnare nel piano complesso il seguente insieme

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\bar{z} + 1 - i\alpha}{z + 1} \in \mathbb{R} \right\}$$



ESERCIZIO 2.22. Risolvere il seguente sistema di equazioni nell'incognita $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} z^2 \bar{z} - \bar{z} z = -\bar{z} \\ (z^3 + \bar{z})^3 = 1. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2.23. Fattorizzare il polinomio reale $P(x) = 1 + x^4$ come prodotto di due polinomi reali di grado 2.

CAPITOLO 3

Funzioni di variabile reale

1. Dominio, immagine, antimmagine e grafico

Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ insiemi. Una funzione

$$f : A \rightarrow B$$

è un'applicazione che a ogni elemento $x \in A$ associa un elemento univocamente determinato $f(x) \in B$. Diremo che:

- i) $A = D(f)$ è il *dominio* di f ;
- ii) B è il *codominio* di f .

L'insieme

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \in B : x \in A\} \\ &= \{y \in B : \text{esiste } x \in A \text{ tale che } f(x) = y\} \end{aligned}$$

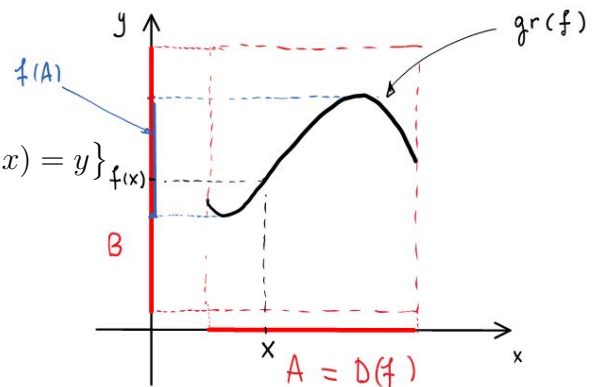
si chiama *immagine* di A rispetto a f . L'immagine è un sottoinsieme del codominio e può essere un suo sottoinsieme proprio. Coincide con il codominio se e solo se la funzione è suriettiva.

Sia $C \subset B$ un sottoinsieme del codominio. La *preimmagine* o *antimmagine* di C rispetto alla funzione $f : A \rightarrow B$ è l'insieme

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) &= \{x \in A : f(x) \in C\} \\ &= \{x \in A : \text{esiste } y \in C \text{ tale che } f(x) = y\}. \end{aligned}$$

Infine, definiamo il *grafico* di f come il seguente sottoinsieme del piano cartesiano:

$$\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A = D(f)\}.$$



2. Funzioni pari e dispari, sup e max

Diciamo che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è *simmetrico* se

$$x \in A \Leftrightarrow -x \in A.$$

Sia A simmetrico. Diremo che una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è *pari* se

$$f(x) = f(-x) \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Diremo che una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è *dispari* se

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{per ogni } x \in A.$$

ESEMPIO 3.1. 1) La funzione $f(x) = \frac{x \sin x}{1 + x^2}$, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è pari:

$$f(-x) = \frac{-x \sin(-x)}{1 + (-x)^2} = \frac{x \sin(x)}{1 + x^2} = f(x).$$

2) La funzione $f(x) = \frac{x^3 \cos x}{\log(2 + |x|)}$, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è dispari:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 \cos(-x)}{\log(2 + |-x|)} = -\frac{x^3 \cos(x)}{\log(2 + |x|)} = -f(x).$$

Definiamo ora l'estremo superiore e inferiore di una funzione su un insieme.

DEFINIZIONE 3.2 (sup e inf). Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Definiamo l'*estremo superiore* di f su A :

$$\sup_A f = \sup_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\}.$$

Definiamo l'*estremo inferiore* di f su A :

$$\inf_A f = \inf_{x \in A} f(x) = \inf\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in A\}.$$

Infine, diremo che f è limitata se

$$\sup_A f < \infty \quad \text{e} \quad \inf_A f > -\infty.$$

OSSERVAZIONE 3.3. Si ha $L = \sup_A f \in \mathbb{R}$ se e solo se:

- i) $f(x) \leq L$ per ogni $x \in A$;
- ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) > L - \varepsilon$.

DEFINIZIONE 3.4 (max e min). Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Se esiste un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \sup_A f$ scriveremo

$$\sup_A f = \max_A f,$$

e diremo che x_0 è un *punto di massimo* di f su A . Il numero $\max_A f \in \mathbb{R}$ è il *valore massimo* di f su A .

Se esiste un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \inf_A f$ scriveremo

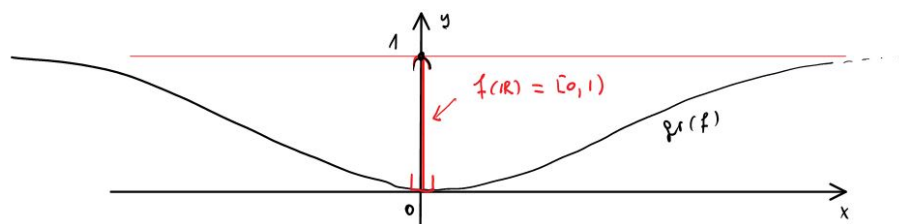
$$\inf_A f = \min_A f,$$

e diremo che x_0 è un *punto di minimo* di f su A . Il numero $\min_A f \in \mathbb{R}$ è il *valore minimo* di f su A .

ESERCIZIO 3.5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare $\sup_{\mathbb{R}} f$, $\inf_{\mathbb{R}} f$ ed $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.



□

3. Funzioni iniettive, suriettive, monotone. Funzione inversa e composta

DEFINIZIONE 3.6. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione. Diremo che:

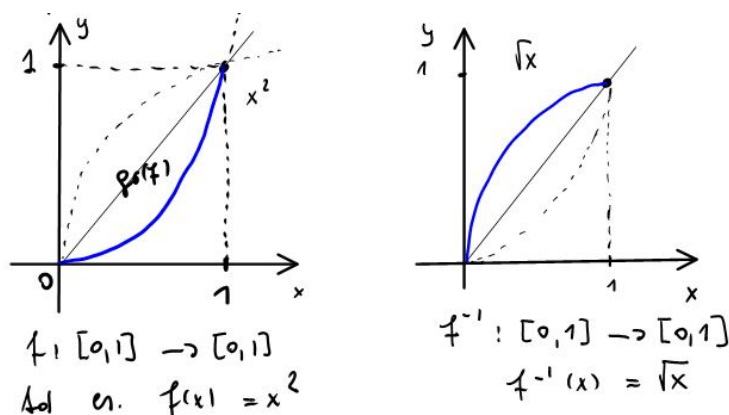
- i) f è iniettiva (1-1) se: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- ii) f è suriettiva (su) se: per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$;
- iii) f è biiettiva se f è 1-1 e su.

DEFINIZIONE 3.7 (Funzione inversa). Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione 1-1 e su. Possiamo definire la funzione inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ in questo modo:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

In altri termini, f^{-1} associa all'elemento $y \in B$ quel punto $x \in A$, che esiste ed è unico, tale che $f(x) = y$.

Il grafico della funzione inversa $gr(f^{-1})$ si ottiene dal grafico della funzione originaria $gr(f)$ con una riflessione rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$:



ESERCIZIO 3.8. Sia $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la funzione

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

- 1) Provare che f è iniettiva e suriettiva.
- 2) Calcolare la funzione inversa $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

DEFINIZIONE 3.9 (Funzione monotona). Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *crescente* su A se

$$x_1 \leq x_2 \text{ con } x_1, x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

La funzione si dice strettamente crescente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *decescente su A* se

$$x_1 \leq x_2 \text{ con } x_1, x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

La funzione si dice strettamente decrescente se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$.

Le funzioni crescenti o decrescenti nel loro dominio si dicono monotone.

ESEMPIO 3.10. Siano $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = 1/x$. La funzione f non è decrescente nel suo dominio A . Infatti, si ha $-1 < 1$ mentre $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

Tuttavia, f è strettamente decrescente su ciascuno dei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$, separatamente.

OSSERVAZIONE 3.11. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora si ha:

$$f \text{ strettamente monotona su } A \Rightarrow f \text{ è 1-1 su } A.$$

Non vale tuttavia l'implicazione opposta.

DEFINIZIONE 3.12 (Funzione composta). Siano $A, B, C \subset \mathbb{R}$ e siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due funzioni. Si definisce la *funzione composta* $g \circ f : A \rightarrow C$ ponendo

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$

Nella definizione della funzione composta $g \circ f$ è indispensabile che l'immagine di f sia contenuta nel dominio di g .

ESEMPIO 3.13. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^4$ e sia $g : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \sqrt{1+x}$. Osserviamo che $f(\mathbb{R}) = [0, \infty) \subset D(g) = [-1, \infty)$ e quindi è ben definita la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{1+f(x)} = \sqrt{1+x^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

OSSERVAZIONE 3.14. Lasciamo al lettore il compito di verificare le seguenti affermazioni:

- i) f crescente e g crescente $\Rightarrow g \circ f$ crescente;
- ii) f crescente e g decrescente $\Rightarrow g \circ f$ decrescente;
- iii) f decrescente e g decrescente $\Rightarrow g \circ f$ crescente.

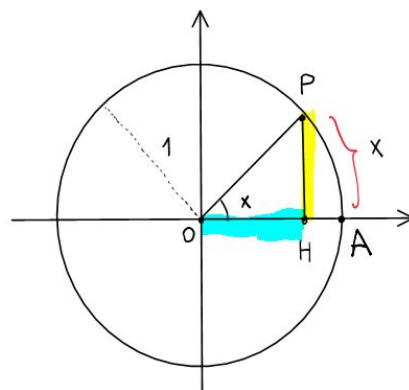
OSSERVAZIONE 3.15. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione iniettiva e suriettiva. Allora:

- i) $f^{-1} \circ f = \text{Identità su } A$;
- ii) $f \circ f^{-1} = \text{Identità su } B$.

4. Funzioni trigonometriche e loro inverse

Definiamo le funzioni trigonometriche in modo geometrico.

Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza unitaria centrata nell'origine. Sia $P \in C$ un punto sulla circonferenza, sia $A = (1, 0)$ e misuriamo l'angolo $\widehat{POA}$ in radianti. Questo significa che l'angolo misura la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$. Sia $x \in \mathbb{R}$ questa lunghezza misurata con segno positivo se si va da A



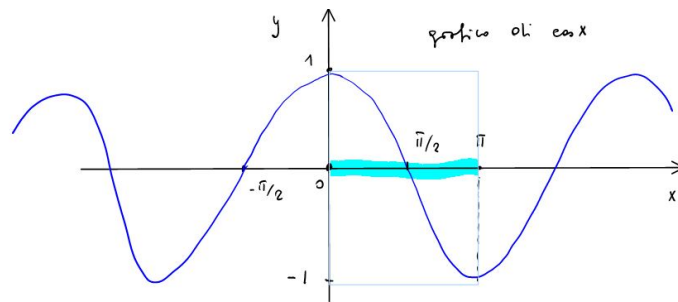
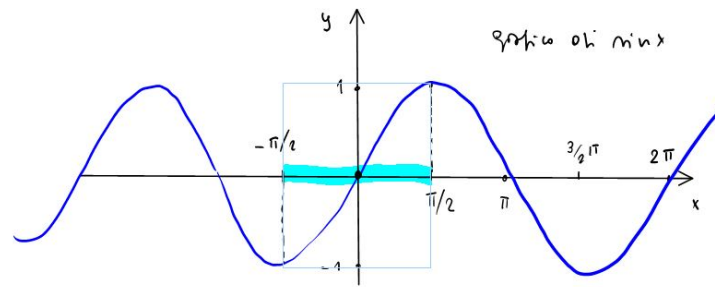
a P in senso antiorario (contiamo anche il numero dei giri che facciamo). Il punto H è la proiezione sull'asse delle x del punto P .

Definiamo le funzioni seno e coseno nel seguente modo:

$\sin x = \overline{PH}$ lunghezza con segno del segmento PH ,

$\cos x = \overline{OH}$ lunghezza con segno del segmento OH .

Le funzioni $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ sono 2π -periodiche. La funzione seno è dispari, la funzione coseno è pari. I loro grafici sono riportati di seguito.



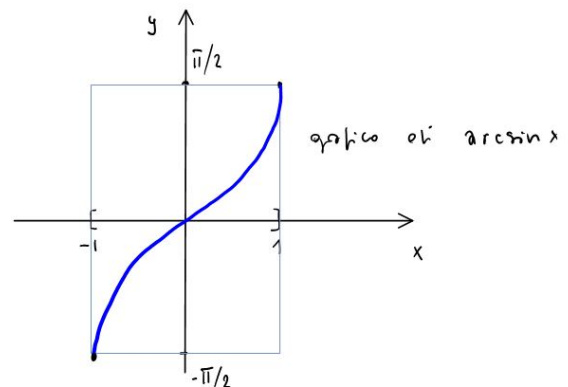
La restrizione della funzione seno

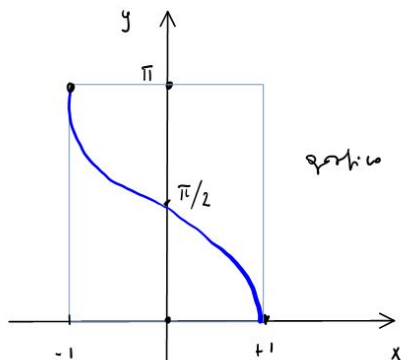
$$\sin : \left[-\pi/2, \pi/2 \right] \rightarrow [-1, 1]$$

è iniettiva (essendo strettamente crescente) e suriettiva. Possiamo definire dunque la funzione inversa arcseno:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

Chiaramente $D(\arcsin) = [-1, 1]$.





La restrizione della funzione coseno

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

funzione di arcocoseno

è iniettiva (essendo strettamente decrescente) e suriettiva. Dunque possiamo definire la funzione inversa arcocoseno:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

Chiaramente $D(\arccos) = [-1, 1]$.

ESERCIZIO 3.16. Determinare il dominio e disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Richiamiamo alcune identità trigonometriche notevoli. Nel seguito, $x, y \in \mathbb{R}$ sono generici numeri reali.

1) Identità trigonometrica fondamentale:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

2) Formule di addizione:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

3) Formule di duplicazione:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

4) Formule di bisezione:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}},$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

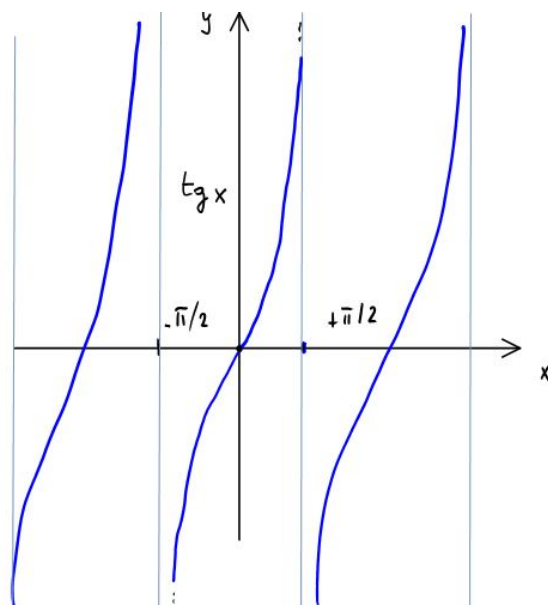
Introduciamo la funzione tangente e la sua inversa, l'arcotangente. Per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ abbiamo $\cos x \neq 0$ e quindi possiamo definire la funzione tangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

La funzione tangente è π -periodica ed è dispari.

La restrizione della tangente

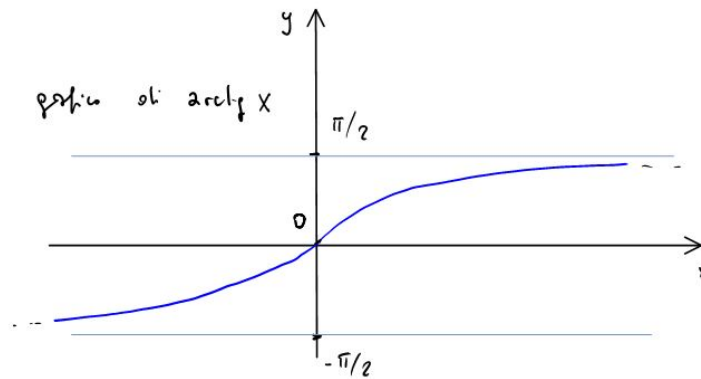
$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$



è iniettiva (essendo strettamente crescente) e suriettiva. Possiamo dunque definire la funzione inversa

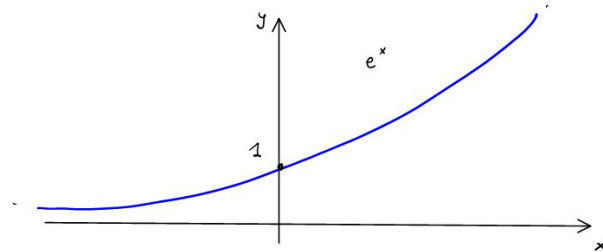
$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Il suo grafico è il seguente:



5. Funzioni iperboliche

Le funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico si definiscono a partire dalla funzione esponenziale $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$:

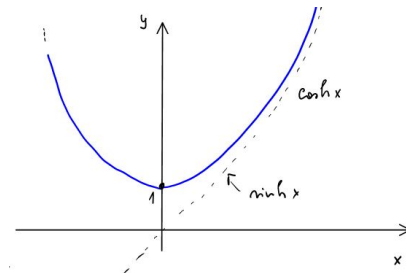
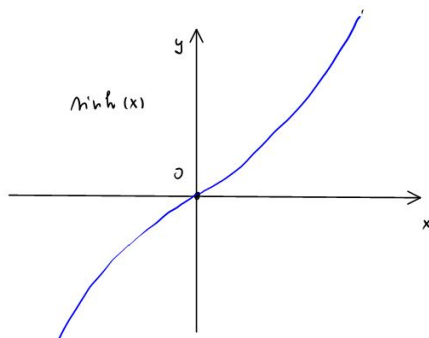


Si definiscono $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{dispari,}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{pari.}$$

Si osservi che $\cosh x \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.



Il seno iperbolico e il coseno iperbolico verificano la seguente identità fondamentale, che giustifica il loro nome:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = 1. \end{aligned}$$

In altri termini, la curva $t \mapsto (\cosh t, \sinh t) \in \mathbb{R}^2$ descrive, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, il ramo destro dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$.

Il seno iperbolico si inverte globalmente (calcolare l'inversa come esercizio). Il coseno iperbolico si inverte nel ramo $x \geq 0$.

6. Potenze e radici

Siano $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, una "base" e $\alpha \in \mathbb{R}$ un esponente. In questa sezione vogliamo definire la potenza

$$x^\alpha \in \mathbb{R}.$$

In questo modo saranno ben definiti numeri come $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ o $\pi^{\log 2}$.

Quando $\alpha \leq 0$ richiederemo che la base sia strettamente positiva, $x > 0$. La definizione della potenza avverrà per passi, a partire dalle situazioni più semplici.

Per un esponente generale α , la definizione della potenza x^α è possibile solo quando $x \geq 0$. In casi speciali, tuttavia, la potenza è definita anche per $x < 0$. Ad esempio, la radice cubica ($\alpha = 1/3$)

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Iniziamo la costruzione. Useremo la seguente convenzione: $x^0 = 1$ per ogni $x > 0$. Il simbolo 0^0 non è definito. Nel seguito è $\alpha \neq 0$.

1° *Passo*: $\alpha = n \in \mathbb{N}$ è un numero naturale. Definiamo in questo caso:

$$x^n = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}}.$$

2° *Passo*: $\alpha = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. La funzione *potenza n -esima* $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

$$f(y) = y^n, \quad y \geq 0,$$

è iniettiva (essendo strettamente crescente) e suriettiva (la prova della suriettività richiede il Teorema dei valori intermedi). Quindi esiste la funzione inversa, la *radice n -esima*, $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Definiamo allora

$$x^{1/n} = f^{-1}(x), \quad x \geq 0.$$

In altri termini: la radice n -esima è la funzione inversa della potenza n -esima. Osserviamo che anche f^{-1} è una funzione strettamente crescente.

Notazione. La radice n -esima si indica anche nel seguente modo: $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

3° *Passo*: $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ è un numero razionale con $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 1$. In questo caso, definiamo

$$x^{p/q} = (x^{1/q})^p,$$

dove $x^{1/q}$ è stato già definito al 2° Passo.

Premettiamo due osservazioni al passo seguente:

- 1) Se $x > 1$ la funzione $\alpha \mapsto x^\alpha$ è strettamente crescente in $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$.
- 2) Se $0 < x < 1$ la funzione $\alpha \mapsto x^\alpha$ è strettamente decrescente in $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 0$.

4° *Passo*: Definiamo la potenza x^α quando $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Se $x = 1$ definiamo $1^\alpha = 1$. Se $x > 1$ definiamo:

$$\begin{aligned} x^\alpha &= \sup \{x^\beta \in \mathbb{R} : \beta \in \mathbb{Q}, 0 < \beta < \alpha\} \\ &= \lim_{\substack{\beta \rightarrow \alpha \\ \beta < \alpha}} x^\beta. \end{aligned}$$

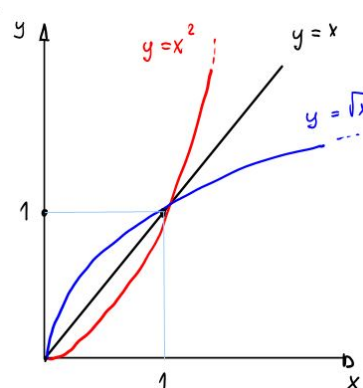
Se $0 < x < 1$ definiamo:

$$\begin{aligned} x^\alpha &= \inf \{x^\beta \in \mathbb{R} : \beta \in \mathbb{Q}, 0 < \beta < \alpha\} \\ &= \lim_{\substack{\beta \rightarrow \alpha \\ \beta < \alpha}} x^\beta. \end{aligned}$$

Gli estremi superiore e inferiore considerati sopra esistono per l'Assioma di Completezza. Abbiamo usato il linguaggio dei limiti, che non è stato ancora introdotto, ma lo si può evitare.

Riportiamo il grafico della funzione x^α quando $\alpha > 0$, nei tre casi modello $\alpha = 1/2, 1, 2$.

Si noti che quando $x > 1$ si hanno le disuguaglianze $\sqrt{x} < x < x^2$. Quando $0 < x < 1$, le disuguaglianze si rovesciano.

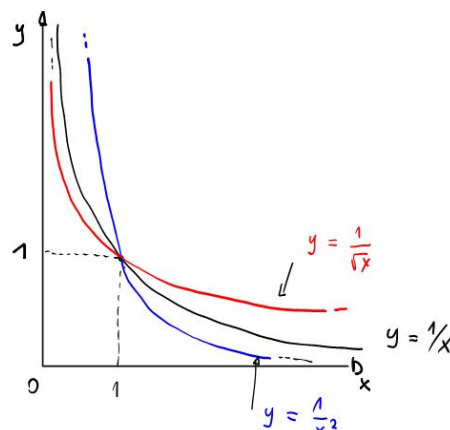


5° *Passo*: Per $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha < 0$ definiamo per ogni $x > 0$:

$$x^\alpha = \left(\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}.$$

Con questo abbiamo terminato la costruzione di tutte le potenze.

Per completezza e chiarezza, riportiamo il grafico della funzione $(1/x)^\alpha = 1/x^\alpha$ con $\alpha > 0$, nei tre casi modello $\alpha = 1/2, 1, 2$.



Nei seguenti teoremi elenchiamo le proprietà delle potenze.

TEOREMA 3.17 (Proprietà aritmetiche delle potenze). Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:

- 1) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;
- 2) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
- 3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
- 4) $x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$.

La dimostrazione del teorema è elementare quando $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ (1° Passo). Il caso generale si ottiene con pazienti verifiche basate sulla costruzione.

TEOREMA 3.18 (Proprietà di monotonia delle potenze). Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:

- 1) $0 < x < y$ e $\alpha > 0 \Rightarrow x^\alpha < y^\alpha$ (funzione crescente della base);
- 2) $0 < x < y$ e $\alpha < 0 \Rightarrow x^\alpha > y^\alpha$ (funzione decrescente della base);
- 3) $x > 1$ e $\alpha < \beta \Rightarrow x^\alpha < x^\beta$ (funzione crescente dell'esponente);
- 4) $0 < x < 1$ e $\alpha < \beta \Rightarrow x^\alpha > x^\beta$ (funzione decrescente dell'esponente).

Di nuovo, la dimostrazione del teorema è elementare quando $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ (1° Passo). Il caso generale si ottiene con pazienti verifiche basate sulla costruzione.

7. Esponenziali e logaritmi

Sia $a > 0$ un numero reale fissato (la *base*). La funzione $f_a : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$

$$f_a(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

si chiama *funzione esponenziale* di base a . Per le affermazioni 3) e 4) del teorema 3.18, si ha:

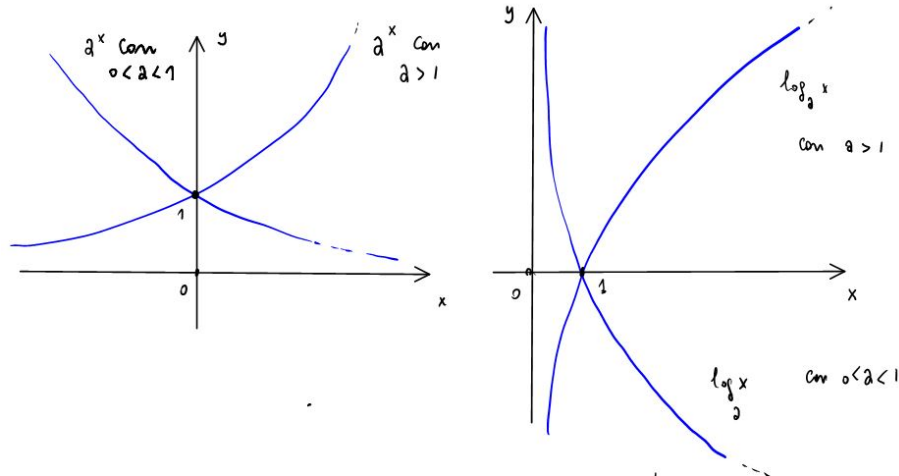
$$\begin{aligned} a > 1 &\Rightarrow f_a \text{ è strettamente crescente,} \\ 0 < a < 1 &\Rightarrow f_a \text{ è strettamente decrescente.} \end{aligned}$$

Dunque, per $a > 0$ con $a \neq 1$ possiamo definire la funzione inversa $f_a^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, che si chiama *logaritmo in base a*:

$$\log_a(x) = f_a^{-1}(x), \quad x > 0.$$

Useremo la seguente notazione: $\log_e(x) = \log(x) = \ln(x)$, logaritmo naturale. Definiremo il numero di Nepero $2 < e < 3$ in seguito.

L'andamento delle funzioni esponenziale e logaritmo è descritto nelle seguenti figure.



TEOREMA 3.19 (Proprietà dei logaritmi). Per $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ si ha:

- 1) $a^{\log_a(x)} = x$ e $\log_a(a^x) = x$; in particolare, $\log_a(1) = 0$;
- 2) $\log_a(x^\beta) = \beta \log_a(x)$;
- 3) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ e $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$;
- 4) $\log_a(x) = \log_a(b) \log_b(x)$ (formula del cambio di base).

DIM. L'affermazione 1) esprime il fatto che logaritmo ed esponenziale sono funzioni l'una inversa dell'altra.

Verifichiamo 2):

$$\log_a(x^\beta) = \beta \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^{\log_a(x^\beta)} = a^{\beta \log_a(x)} = [\text{Proprietà potenze}] = (a^{\log_a(x)})^\beta = x^\beta,$$

e quindi otteniamo l'identità valida $x^\beta = x^\beta$.

Verifichiamo la prima affermazione in 3):

$$\begin{aligned} \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) &\Leftrightarrow a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a(x) + \log_a(y)} \\ &\Leftrightarrow xy = a^{\log_a(x)} a^{\log_a(y)} \\ &\Leftrightarrow xy = xy. \end{aligned}$$

Anche la verifica di 4) è elementare:

$$\log_a(b) \log_b(x) = \log_a(b^{\log_b(x)}) = \log_a(x).$$

□

ESEMPIO 3.20 (Dominio di funzione). Vediamo un esempio (molto artificiale) sulla corretta individuazione del dominio di una funzione con potenze e logaritmi.

Vogliamo identificare il dominio della funzione

$$f(x) = \log \left(\left(\frac{x}{x-1} \right)^x - 1 \right).$$

Devono essere verificate tutte e tre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} x \neq 1 & \text{denominatore diverso da zero} \\ \frac{x}{x-1} \geq 0 \text{ e } x \neq 0 & \text{potenza ben definita} \\ \left(\frac{x}{x-1}\right)^x - 1 > 0 & \text{argomento del logaritmo positivo.} \end{cases}$$

Iniziamo a studiare la disequazione

$$\frac{x}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Dunque, per $x \in [0, 1]$ la funzione non è definita.

Studiamo la terza disequazione

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{x}{x-1}\right)^x > \log 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \log\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0.$$

Studiamo il segno del fattore non banale del prodotto:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0 & \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - 1 > 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1. \end{aligned}$$

La conclusione è che il dominio di f è:

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

8. Esercizi

ESERCIZIO 3.21. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$.

- 1) Calcolare il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f , ovvero il più grande insieme di numeri reali su cui f è definita.
- 2) Calcolare l'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}$.
- 3) Stabilire se f è iniettiva.
- 4) Al variare di $y \in \mathbb{R}$ calcolare le "fibre" $f^{-1}(\{y\}) \subset A$.

ESERCIZIO 3.22. Calcolare la funzione inversa del seno iperbolico $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Questa funzione si chiama settore seno iperbolico, $\text{settsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o anche arcoseno iperbolico, $\text{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3.23. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ la funzione $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

- 1) Dimostrare che f è strettamente crescente e quindi iniettiva.
- 2) Determinare l'immagine di f .
- 3) Dimostrare che f è biiettiva da $\mathbb{R}$ su $(0, \infty)$.
- 4) Calcolare la funzione inversa.
- 5) Verificare che $f(x) = \exp(\text{arsinh}(x))$.

ESERCIZIO 3.24. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}.$$

- 1) Determinare $\sup_{\mathbb{R}} f$ e $\inf_{\mathbb{R}} f$.
- 2) Stabilire se la funzione ammette massimo o minimo.
- 3) Calcolare l'immagine $f(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 3.25. Calcolare il dominio delle seguenti funzioni:

- i) $f(x) = \log_{x-1}(x^2 - 5x + 6)$;
- ii) $f(x) = \sqrt{\arcsin(2x - 1)}$;
- iii) $f(x) = \log \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} - \frac{1}{2} \right)$.

ESERCIZIO 3.26. Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due funzioni iniettive. Provare che $g \circ f : A \rightarrow C$ è iniettiva. È vero il viceversa?

ESERCIZIO 3.27. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione.

- 1) Provare che per ogni insieme $C \subset A$ si ha

$$C \subset f^{-1}(f(C)).$$

Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia iniettiva.

- 2) Provare che per ogni insieme $D \subset B$ si ha

$$f(f^{-1}(D)) \subset D.$$

Tramite un esempio provare che l'inclusione può essere stretta. Discutere il caso in cui f sia suriettiva.

ESERCIZIO 3.28. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione e siano $B_\lambda \subset B$, $\lambda \in \Lambda$. Provare che

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

ESERCIZIO 3.29. Siano $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ il disco unitario, $z_0 \in \mathbb{C}$ con $|z_0| < 1$, ed $f : D \rightarrow D$ la funzione della variabile complessa $z \in D$

$$f(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}.$$

- 1) Verificare che f è definita su tutto D e che $f(D) \subset D$;
- 2) Provare che f è iniettiva e suriettiva e calcolare la funzione inversa $f^{-1} : D \rightarrow D$.

ESERCIZIO 3.30. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

e siano $z_0 \in \mathbb{C}$ ed $r > 0$ tali che $r \neq |z_0|$. Verificare che l'immagine rispetto a f della circonferenza $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ è ancora una circonferenza. Calcolarne il raggio e il centro.

ESERCIZIO 3.31. Stabilire se esiste o meno una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f \circ f(x) = -x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3.32. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una funzione iniettiva tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Z}$ si abbia

$$|x - y| \leq 10 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq 10.$$

Determinare la funzione f .

CAPITOLO 4

Limiti di funzione

1. Definizione di limite

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto di accumulazione* di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ se

$$A \cap \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} \neq \emptyset$$

per ogni $\delta > 0$. Si può avere sia $x_0 \in A$ sia $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$.

DEFINIZIONE 4.1 (Limite). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f tende a $L \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow x_0$ (“per x che tende a x_0 ”) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$(4.1) \quad 0 < |x - x_0| < \delta, \quad x \in A, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Scriveremo in questo caso

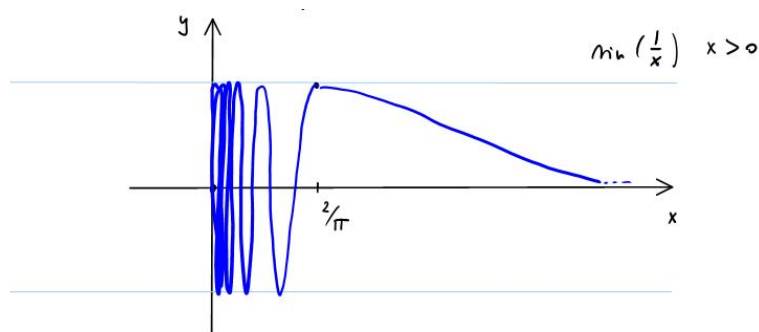
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

La funzione f non è necessariamente definita nel punto x_0 , che potrebbe essere fuori dal dominio. Se f ha limite per $x \rightarrow x_0$, allora questo limite è unico. La prova è lasciata come esercizio, e serve il fatto che x_0 sia un punto di accumulazione.

ESEMPIO 4.2. La funzione $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0,$$

non ha limite per $x \rightarrow 0$.



PROPOSIZIONE 4.3 (Permanenza del segno). Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e x_0 un punto di accumulazione di A . Se esiste il limite ed è positivo

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0,$$

allora esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in A$, con $0 < |x - x_0| < \delta$.

DIM. Scegliamo $\varepsilon = L/2$ e sia $\delta > 0$ tale che valga (4.1). Allora per $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha:

$$f(x) = (f(x) - L) + L \geq -|f(x) - L| + L \geq -\varepsilon + L = \frac{L}{2} > 0.$$

□

Ora definiamo la nozione di limite infinito per $x \rightarrow x_0$.

DEFINIZIONE 4.4 (Limite infinito). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad x \in A, \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

Il limite finito per $x \rightarrow \infty$ (“ x tende a più infinito”) si definisce nel seguente modo.

DEFINIZIONE 4.5. Sia $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, una funzione. Diciamo che f tende al limite $L \in \mathbb{R}$ per $x \rightarrow \infty$ e scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > a$ tale che

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

ESERCIZIO 4.6. Scrivere la definizione dei seguenti limiti:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$.

2. Calcolo dei limiti con la definizione

Il calcolo dei limiti con la definizione si riduce a studiare disequazioni con parametro. Questo approccio presuppone la conoscenza del limite ed è laborioso.

ESEMPIO 4.7. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{1+2x} = 1.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, cerchiamo $\delta > 0$ tale che valga la seguente implicazione:

$$(4.2) \quad 0 < |x| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x+1}{1+2x} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Studiamo la seguente disequazione:

$$(4.3) \quad \left| \frac{x+1}{1+2x} - 1 \right| = \left| \frac{x+1-1-2x}{1+2x} \right| = \left| \frac{x}{1+2x} \right| < \varepsilon.$$

Supponendo, come è lecito in questo caso, che $1+2x \neq 0$, la disequazione è equivalente a

$$x^2 < \varepsilon^2(1 + 4x^2 + 4x) \Leftrightarrow (1 - 4\varepsilon^2)x^2 - 4\varepsilon^2x - \varepsilon^2 < 0.$$

Le radici del polinomio in x di grado 2 associato alla disequazione sono

$$x_{\pm} = \frac{2\varepsilon^2 \pm \varepsilon}{1 - 4\varepsilon^2}.$$

Qui e nel seguito possiamo supporre che $0 < \varepsilon < 1/2$. La disequazione precedente è verificata per $x_- < x < x_+$ e dunque la disequazione (4.3) è equivalente a

$$\left| \frac{x}{1+2x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} = \frac{2\varepsilon^2 - \varepsilon}{1 - 4\varepsilon^2} < x < \frac{2\varepsilon^2 + \varepsilon}{1 - 4\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{1 - 2\varepsilon}$$

Con la scelta di δ

$$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{1-2\varepsilon} \right\} = \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}$$

l'implicazione (4.2) è verificata.

ESEMPIO 4.8. Usando la definizione verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^4} = \infty.$$

Fissato $M > 0$, cerchiamo $\delta > 0$ tale che valga la seguente implicazione:

$$(4.4) \quad 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \frac{x}{(1-x)^4} > M.$$

Studiamo la seguente disequazione:

$$(4.5) \quad \frac{x}{(1-x)^4} > M \Leftrightarrow x > M(x-1)^4.$$

Non è possibile risolvere tale disequazione in modo esatto. Riduciamo la sua complessità nel seguente modo. Supponiamo che $0 < \delta \leq 1/2$. In questo caso si ha:

$$|x-1| < \delta \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

Dunque, usando l'informazione $x > 1/2$ si ottiene

$$\frac{x}{(x-1)^4} > \frac{1}{2(x-1)^4}.$$

Risolviamo allora la disequazione semplificata

$$(4.6) \quad \frac{1}{2(x-1)^4} > M.$$

Chiaramente, per la proprietà transitiva, se x verifica la disequazione (4.6) allora verifica anche la disequazione (4.5). D'altra parte, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2(x-1)^4} > M &\Leftrightarrow 1 > 2M(x-1)^4 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^4 < \frac{1}{2M} \\ &\Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt[4]{2M}}. \end{aligned}$$

Se ora scegliamo

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2M}} \right\}$$

tutte le deduzioni fatte sono valide e si ottiene l'implicazione

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{(x - 1)^4} > M.$$

3. Operazioni con i limiti

In questa sezione introduciamo vari strumenti per calcolare i limiti di funzione in modo più efficiente che non con la definizione.

TEOREMA 4.9. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che esistano e siano finiti i limiti

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R},$$

$$M = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \in \mathbb{R}.$$

Allora si ha:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = L + M;$
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = LM.$

Inoltre, se $M \neq 0$ allora si ha anche:

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

DIM. Proviamo 1). Fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che per ogni $x \in A$ si hanno le implicazioni

$$(4.7) \quad \begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Con la scelta $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se $x \in A$ verifica $0 < |x - x_0| < \delta$ allora avremo:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Proviamo 2). Partiamo dalla seguente stima:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L|. \end{aligned}$$

Siano $\delta_1, \delta_2 > 0$ come in (4.7). Possiamo anche supporre che $|f(x)| \leq |L| + 1$ per $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Questo segue dalla permanenza del segno o dalla definizione di limite. Dunque, per $0 < |x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ si ha

$$|f(x)g(x) - LM| \leq (|L| + 1)\frac{\varepsilon}{2} + |M|\frac{\varepsilon}{2} = \frac{|L| + |M| + 1}{2}\varepsilon.$$

La prova di 3) è lasciata al lettore.

□

OSSERVAZIONE 4.10. Lasciamo al lettore la verifica delle seguenti affermazioni:

- 1) Il Teorema 4.9 vale anche con $\pm\infty$ al posto di x_0 .
- 2) Il punto 1) del Teorema 4.9 vale anche con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$, con la regola $\pm\infty + M = \pm\infty$.
- 3) Il punto 2) del Teorema 4.9 vale anche con $L = \pm\infty$ ed $M \in \mathbb{R}$ tale che $M \neq 0$, con la regola:

$$\pm\infty \cdot M = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } M > 0, \\ \mp\infty & \text{se } M < 0. \end{cases}$$

- 4) Se f è una funzione limitata e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0.$$

ESEMPIO 4.11 (Esempi fondamentali). I seguenti limiti sono fondamentali.

- 1) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ \infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che quando $\alpha = 0$ non si presenta forma indeterminata $[0^0]$, perchè $|x|^0 = 1$ per ogni $x \neq 0$, e dunque il limite per $x \rightarrow 0$ è 1. Nella forma indeterminata $[0^0]$ si ha una base che tende a 0 ed un esponente che tende a 0 senza essere già 0.

Nel caso $\alpha > 0$, basta usare la definizione osservando che

$$|x|^\alpha < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \delta := \varepsilon^{1/\alpha}.$$

- 2) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Nel caso $\alpha > 0$, basta osservare che $x^\alpha > M$ se e solo se $x > \bar{x} := M^{1/\alpha}$.

- 3) Sia ora $a > 0$ una base fissata. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Osserviamo che quando $a = 1$ non si ha forma indeterminata $[1^\infty]$, perchè $1^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e dunque il limite per $x \rightarrow \infty$ è 1. Nella forma indeterminata $[1^\infty]$ si ha una base che tende ad 1 senza essere già 1 ed un esponente che tende a ∞ .

Verifichiamo il limite nel caso $a > 1$. Avremo $a = 1 + b$ con $b > 0$, e dalla disuguaglianza di Bernoulli segue che

$$a^x = (1 + b)^x \geq (1 + b)^{[x]} \geq 1 + [x]b.$$

Fissato $M > 0$, la disuguaglianza $1 + [x]b \geq M$ è verificata per $[x] \geq \frac{M-1}{b}$ e dunque si ha $a^x \geq M$ per $x \geq \bar{x} := \frac{M-1}{b} + 1$.

- 4) Se, infine, si ha $a > 1$ allora:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty.$$

La verifica è lasciata al lettore.

□

Per il calcolo dei limiti può essere utile il teorema del confronto.

TEOREMA 4.12 (del confronto). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione dell'insieme $A \subset \mathbb{R}$ e siano $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ tre funzioni tali che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad x \in A.$$

Se esistono e sono uguali i limiti

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x),$$

allora si ha anche

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

DIM. Infatti si ha, per $x \in A$,

$$g(x) - L \leq h(x) - L \leq |h(x) - L| \leq \varepsilon \quad \text{per } 0 < |x - x_0| < \delta,$$

e analogamente

$$g(x) - L \geq f(x) - L \geq -|f(x) - L| \geq -\varepsilon \quad \text{per } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

□

Il teorema del confronto vale anche quando $x \rightarrow \infty$.

OSSERVAZIONE 4.13. Direttamente dalla definizione di limite segue questa doppia implicazione:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0.$$

Se il limite è 0 (e solo in questo caso) il limite non dipende dalla presenza o meno del valore assoluto.

Usiamo il teorema del confronto per calcolare i limiti trigonometrici elementari.

TEOREMA 4.14. Si hanno i seguenti limiti trigonometrici notevoli:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

DIM. Si osservi la seguente figura.

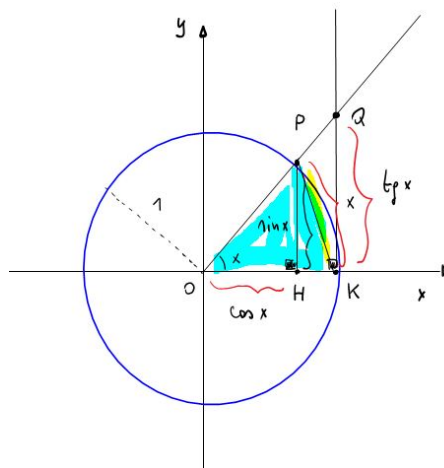
Per definizione, avremo:

- $x = \widehat{POK}$ angolo in radianti
- $\sin x = \overline{PH}$ lunghezza con segno
- $\cos x = \overline{OH}$ lunghezza con segno
- $\tan x = \overline{QK}$ lunghezza con segno

Dalla figura sono chiare le seguenti inclusioni:

$$\widehat{POK} \subset \widehat{POK} \subset \widehat{QOK},$$

dove $\widehat{POK}$ e $\widehat{QOK}$ sono triangoli mentre $\widehat{POK}$ indica il settore circolare.



Quindi si hanno le disuguaglianze delle aree (quando sono positive)

$$\text{Area}(\widehat{POK}) \leq \text{Area}(\widehat{POK}) \leq \text{Area}(\widehat{QOK}).$$

Per $0 \leq x < \pi/2$, le aree sono:

$$\text{Area}(\widehat{POK}) = \frac{1}{2} \sin x, \quad \text{Area}(\widehat{POK}) = \frac{1}{2}x, \quad \text{Area}(\widehat{QOK}) = \frac{1}{2} \tan x.$$

Deduciamo che per $0 \leq x < \pi/2$ si hanno le disuguaglianze

$$(4.8) \quad \sin x \leq x \leq \tan x.$$

Di conseguenza, per $|x| < \pi/2$ avremo

$$|\sin x| \leq |x|$$

e per confronto segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0.$$

Questo prova l'affermazione 1). Passiamo all'affermazione 2). Sempre per $|x| < \pi/2$ avremo

$$0 \leq 1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \leq \sin^2 x,$$

e dunque per confronto deduciamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0.$$

Infine, ripartendo dalla (4.8) si trova

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

e, ancora una volta per confronto, deduciamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

4. Analisi locale delle funzioni. Sviluppi asintotici

Introduciamo la nozione di “o piccolo” e i simboli $o(1)$ e $o(x^n)$, talvolta chiamati “simboli di Landau”.

DEFINIZIONE 4.15. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme tale che 0 sia un suo punto di accumulazione e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

1) Diciamo che f è infinitesima per $x \rightarrow 0$ se

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Scriveremo in questo caso $f(x) = o(1)$ per $x \rightarrow 0$ (“ f è un o piccolo di 1 per x che tende a 0”).

2) Diciamo che f ha ordine di infinitesimo $n \in \mathbb{N}$ per $x \rightarrow 0$ se esiste finito e diverso da 0 il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} \neq 0.$$

- 3) Sia $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che $f(x) = o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$ (“ f è un o piccolo di x^n per x che tende a 0”) se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

- 4) Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow 0$ se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Dunque, $o(1)$ indica una generica (non meglio precisata) funzione infinitesima per $x \rightarrow 0$; $o(x^n)$ indica una generica (non meglio precisata) funzione che per $x \rightarrow 0$ tende a 0 più velocemente di x^n .

Chiariamo alcune regole algebriche per lavorare con i simboli di Landau.

TEOREMA 4.16. Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ e per $x \rightarrow 0$ si ha:

- 1) $o(x^n) = x^n \cdot o(1)$;
- 2) Se $n \leq m$ allora $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$;
- 3) Se $n < m$ allora $o(x^n) + x^m = o(x^n)$;
- 4) $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$;
- 5) Regola di sostituzione: se $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + o(x^n)$, con $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, allora

$$f(x^m) = a_1x^m + a_2x^{2m} + \dots + a_{n-1}x^{(n-1)m} + o(x^{nm}).$$

DIM. Proviamo ad esempio 1). Sia $f(x) = o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$, ovvero per definizione si abbia

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$

Questo significa che $f(x)/x^n$ è infinitesima, ovvero $f(x)/x^n = o(1)$ per $x \rightarrow 0$, ovvero $f(x) = x^n o(1)$.

Proviamo ora 4). Siano $f(x) = o(x^n)$ e $g(x) = o(x^m)$ per $x \rightarrow 0$, ovvero per definizione si abbia

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^m} = 0.$$

Allora si ha anche, per il teorema sul prodotto dei limiti,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^{n+m}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^m} = 0.$$

Questo significa che $f(x)g(x) = o(x^{n+m})$ per $x \rightarrow 0$.

Lasciamo le altre verifiche al lettore.

□

OSSERVAZIONE 4.17. Nella pratica sono utili queste osservazioni:

- 1) Non si distingue fra $o(x^n)$, $ko(x^n)$ e $o(kx^n)$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$, ovvero $o(x^n) = ko(x^n) = o(kx^n)$.
- 2) Se $f(x) = o(o(x^n))$ per $x \rightarrow 0$, allora è anche $f(x) = o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$.

5. Calcolo dei limiti con gli sviluppi asintotici

In questa sezione illustriamo la tecnica di calcolo dei limiti con forme indeterminate $\left[\frac{0}{0}\right]$ usando l'analisi locale delle funzioni. Useremo liberamente le seguenti formule per gli sviluppi delle funzioni elementari, che saranno dimostrate nel Capitolo 7. Tutti gli sviluppi sono per $x \rightarrow 0$.

Funzione e sviluppo	Note
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	dispari pari
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$ $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	dispari pari
$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$	

Le funzioni pari hanno nel loro sviluppo solo le potenze pari. Le funzioni dispari hanno nel loro sviluppo solo le potenze dispari. La funzione $\log x$ non ha sviluppo per $x \rightarrow 0$.

ESERCIZIO 4.18. A titolo di esempio, risolviamo il seguente esercizio:

- 1) Sviluppare la funzione $[\log(1+x)]^2$ per $x \rightarrow 0$ in modo preciso fino al terzo ordine.
- 2) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\alpha x^2} - \cos x + [\log(1+x)]^2}{x^3}.$$

Soluzione. 1) Partiamo dallo sviluppo noto per $x \rightarrow 0$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Dunque, si ha

$$\begin{aligned} [\log(1+x)]^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 \\ &= x^2 + \frac{x^4}{4} + o(x^2)^2 - x^3 + 2xo(x^2) + x^2o(x^2) \\ &= x^2 + o(x^3) + o(x^4) - x^3 + o(x^3) + o(x^4) \\ &= x^2 - x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

2) Partendo dallo sviluppo noto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

con la regola di sostituzione si ottiene

$$e^{\alpha x^2} = 1 + \alpha x^2 + \alpha^2 \frac{x^4}{2} + o(\alpha^2 x^4) = 1 + \alpha x^2 + o(x^3).$$

Inoltre, è noto anche lo sviluppo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

In conclusione, il numeratore si sviluppa nel seguente modo:

$$\begin{aligned} N(x) &= e^{\alpha x^2} - \cos x + [\log(1+x)]^2 \\ &= 1 + \alpha x^2 + o(x^3) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + x^2 - x^3 + o(x^3) \\ &= \left(\frac{3}{2} + \alpha\right)x^2 - x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Ora è facile calcolare il limite al variare di α :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)x^2 - x^3 + o(x^3)}{x^3} = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha + \frac{3}{2} > 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha + \frac{3}{2} < 0 \\ -1 & \text{se } \alpha + \frac{3}{2} = 0. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 4.19. Quando si calcola un limite con gli sviluppi asintotici, fino a quale ordine è necessario spingersi? La risposta è che occorre capirlo caso per caso. Una regola orientativa è la seguente: se, una volta scritti gli sviluppi e fatte le semplificazioni algebriche, rimangono solo gli “o piccoli”, allora almeno uno degli sviluppi che si erano scritti era troppo corto.

6. Gerarchia degli infiniti

In questa sezione studiamo alcuni casi della forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$ stabilendo una “gerarchia” fra gli infiniti.

TEOREMA 4.20. Valgono i seguenti limiti:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0$ per ogni $\beta > 0$ e $a > 1$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ per ogni $\alpha, \beta > 0$ e $a > 1$.

DIM. Ricordiamo che la parte intera $[x]$ verifica le seguenti proprietà:

- i) $[x] \leq x < [x] + 1$;
- ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} [x] = \infty$ e quindi $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{[x]} = 0$.

È sufficiente provare l'affermazione 1) nel caso $\beta = 1$. Sia $\sqrt{a} = 1 + h$ con $h > 0$, in quanto $a > 1$. Allora si ha

$$a^x = (\sqrt{a})^{2x} = [(1+h)^x]^2 \geq [(1+h)^{[x]}]^2 \geq [1 + [x]h]^2,$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Bernoulli, e di conseguenza

$$0 < \frac{x}{a^x} \leq \frac{[x] + 1}{(1 + [x]h)^2} = \frac{1}{[x]} \frac{1 + 1/[x]}{(1/[x] + h)^2} \rightarrow 0$$

per $x \rightarrow \infty$, e per il Teorema del Confronto si deduce che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a^x} = 0.$$

Proviamo l'affermazione 2). Vogliamo calcolare il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log_a x)^\beta}{x^\alpha}.$$

Calcoliamo il limite con la seguente sostituzione

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = a^{\log_a x} = x,$$

e osserviamo che $x \rightarrow \infty$ se e solo se $y \rightarrow \infty$. Dunque, si ha

$$L = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^\beta}{(a^y)^\alpha} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^\beta}{(a^\alpha)^y} = 0,$$

in quanto $a^\alpha > 1$ essendo $a > 1$ ed $\alpha > 0$. □

7. Asintoti obliqui

Nello studio di funzione, il calcolo dei limiti è utile quando si devono calcolare gli asymptoti.

DEFINIZIONE 4.21 (Asintoto). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. La retta di equazione $y = mx + q$, con $m, q \in \mathbb{R}$, si dice asintoto di f a ∞ (asintoto destro) se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + q)) = 0.$$

La retta si dice asintoto di f a $-\infty$ (asintoto sinistro) se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0.$$

OSSERVAZIONE 4.22 (Calcolo di m e q). Per stabilire l'esistenza di un eventuale asintoto obliquo (destro) si procede nel seguente modo. Si cerca in primo luogo il coefficiente angolare $m \in \mathbb{R}$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Se un tale $m \in \mathbb{R}$ esiste, si cerca $q \in \mathbb{R}$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx.$$

Se anche $q \in \mathbb{R}$ esiste (finito), si ha l'asintoto destro $y = mx + q$.

ESERCIZIO 4.23. Calcolare gli asintoti a $\pm\infty$ della funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}.$$

Soluzione. La funzione è definita per $x^2 + x \geq 0$ ovvero per $x(x+1) \geq 0$ ovvero per $x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$.

Cerchiamo un eventuale asintoto destro:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 2,$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 + x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 1/x}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi c'è l'asintoto destro

$$y = 2x + \frac{1}{2}.$$

Cerchiamo un eventuale asintoto sinistro:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 0.$$

Il fatto che $m = 0$ suggerisce la possibile esistenza di un asintoto orizzontale sinistro. Cerchiamo q :

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + 1/x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + 1/x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi c'è un asintoto orizzontale sinistro $y = -1/2$.

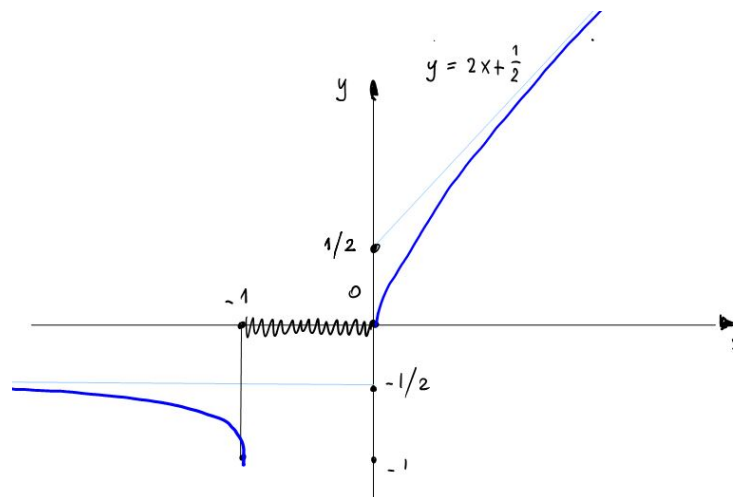


FIGURA 1

8. Esercizi

ESERCIZIO 4.24. Usando la definizione di limite verificare che

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^4} = -\infty, \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+1} = 2.$$

ESERCIZIO 4.25. i) Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x = -\frac{1}{2}.$$

ii) Calcolare il limite precedente usando le operazioni elementari sui limiti.

ESERCIZIO 4.26. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{(x^3 + x^2)^{3/2}}.$$

ESERCIZIO 4.27. Calcolare i seguenti limiti ‘risolvendo’ le ‘forme indeterminate’:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(\pi-x)^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x^2}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}, \text{ dove } x_0 > 0;$$

Risposte: 1) -1 ; 2) $3/2$; 3) $1/8$; 4) $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$; 5) $\frac{1}{3}x_0^{-2/3}$. Al punto 3): sostituzione.

ESERCIZIO 4.28. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3}.$$

ESERCIZIO 4.29. Verificare che per ogni $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta \log x = 0$$

Suggerimento: Sostituzione $y = -\log x$.

ESERCIZIO 4.30. Verificare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = 0.$$

ESERCIZIO 4.31. Al variare di $\alpha > 0$ calcolare il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x}) + e^{-1/x}}{x^\alpha}.$$

ESERCIZIO 4.32. Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$f(x) = x \sin(x^2) + \sin(x/2) \sin^2(x).$$

ESERCIZIO 4.33. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\cosh x - 1) \log x + x^{x+1} - x}{\sin^2(x) \log x}.$$

ESERCIZIO 4.34. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2 \sin^2 x) - ax^2 - bx^4}{x^4} = 0.$$

ESERCIZIO 4.35. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{1+\sin x}{1+x}\right)}{\sin x + \log(1-x) + 1 - \cos x}.$$

ESERCIZIO 4.36. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2(e^x + x^2)}{x + \sin x + \log_2 x}.$$

ESERCIZIO 4.37. Calcolare il seguente limite:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2x} + |\sin x|^{x^2}}{(2^{x \log x} + e^x)^2}.$$

ESERCIZIO 4.38. Determinare gli asintoti della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x \arctan x$$

per $x \rightarrow +\infty$ e per $x \rightarrow -\infty$.

CAPITOLO 5

Successioni reali

1. Successioni numeriche

Una *successione* (reale) è una funzione $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Indicheremo con $a_n = a(n) \in \mathbb{R}$ l'*elemento n -esimo* della successione. La successione si indica con il simbolo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e si può anche definire elencando in modo ordinato i suoi elementi. Ad esempio, la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è formata dagli elementi

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

La restrizione di una funzione $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ai numeri naturali $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$ è una successione. Tutte le definizioni e i teoremi sui limiti di funzione per $x \rightarrow \infty$ si riformulano in modo identico per le successioni.

DEFINIZIONE 5.1 (Successione convergente). Diciamo che una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge ad un limite* $L \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Diremo in questo caso che la successione è *convergente* e scriveremo anche

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L.$$

Il numero L si dice *limite della successione*.

PROPOSIZIONE 5.2 (Unicità del limite). Se una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha limite $L \in \mathbb{R}$ allora questo limite è unico.

DIM. Siano L ed M entrambi limiti della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Fissato $\varepsilon > 0$ a piacere, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|a_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$|L - M| = |L - a_n + a_n - M| \leq |L - a_n| + |a_n - M| < 2\varepsilon.$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo implica che $|L - M| = 0$ e quindi $L = M$. $\square$

DEFINIZIONE 5.3. Diremo che una successione *reale* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge a ∞* (“più infinito”) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Analogamente, diremo che una successione reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge a $-\infty$* (“meno infinito”) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ (arbitrariamente grande) esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leq -M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Scriveremo in questo caso $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

ESEMPIO 5.4. Verifichiamo usando la definizione che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 1} = \infty.$$

Fissato $M > 0$ arbitrariamente grande, dobbiamo trovare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$(5.1) \quad \frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 1} \geq M \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Usiamo il *metodo delle maggiorazioni* e riduciamo la disuguaglianza data ad una disuguaglianza elementare. Come primo passo stimiamo il logaritmo con la disuguaglianza fondamentale

$$\log(1+x) \leq x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ con } x > -1.$$

In effetti, ci basta la disuguaglianza $\log(1+n) \leq n$ per $n \in \mathbb{N}$, che può essere verificata per induzione. Usando questa informazione, si ottiene

$$\frac{n^3 - n \log(1+n)}{n^2 + 1} \geq \frac{n^2(n-1)}{n^2 + 1} \geq \frac{n-1}{2},$$

per $n \geq 1$. Dunque ci siamo ridotti alla disuguaglianza elementare

$$\frac{n-1}{2} \geq M \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2M + 1.$$

Con una scelta di $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \geq 2M + 1$, la (5.1) è verificata.

Delle successioni reali che non cadono nè nel caso della Definizione 5.1 (successione convergente) nè nei casi della Definizione 5.3 diremo che *non hanno limite*, nè finito nè $\pm\infty$.

Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice *limitata* se l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in $\mathbb{R}$. Equivalentemente, la successione è limitata se esiste $C > 0$ tale che

$$|a_n| \leq C < \infty \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

PROPOSIZIONE 5.5. Se una successione reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente allora è limitata.

DIM. Sia L il limite della successione. Fissiamo a nostro piacere un $\varepsilon > 0$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Scegliamo

$$C = \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}}|, |L| + \varepsilon\}.$$

Allora $|a_n| \leq C$ per ogni $n = 1, \dots, \bar{n}$, elementarmente. Inoltre, per $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L| \leq C.$$

□

TEOREMA 5.6 (Operazioni coi limiti). Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni convergenti. Allora:

- 1) La successione somma $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- 2) La successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

- 3) Se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e il limite di $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è 0, allora la successione quoziente $(a_n/b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

DIM. Indichiamo con $L, M \in \mathbb{R}$ i limiti delle successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|b_n - M| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$.

- 1) Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$|a_n + b_n - (L + M)| \leq |a_n - L| + |b_n - M| < 2\varepsilon.$$

- 2) Per la Proposizione 5.5, esiste $C > 0$ tale che $|a_n| \leq C$ e $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - LM| &= |a_n b_n - L b_n + L b_n - LM| \\ &\leq |b_n| |a_n - L| + |L| |b_n - M| \leq C\varepsilon + |L|\varepsilon = (C + |L|)\varepsilon. \end{aligned}$$

- 3) Per il punto 2), è sufficiente provare l'affermazione nel caso $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome $M \neq 0$ per ipotesi, esiste $\hat{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \hat{n}$ si ha

$$|b_n| = |b_n - M + M| \geq |M| - |b_n - M| \geq \frac{|M|}{2}.$$

Dunque, per $n \geq \max\{\bar{n}, \hat{n}\}$ si ha

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{M} \right| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} \leq \frac{2\varepsilon}{M^2}.$$

□

TEOREMA 5.7 (Teorema del confronto). Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successioni reali tali che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ si abbia

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Supponiamo che esistano i limiti $L, M \in \mathbb{R}$ delle successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, rispettivamente. Se $L = M$, allora anche $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$.

DIM. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ e $|c_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha anche

$$\begin{aligned} b_n - L &\leq c_n - L \leq |c_n - L| < \varepsilon, \\ L - b_n &\leq L - a_n \leq |L - a_n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

e quindi $|b_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq \bar{n}$. □

DEFINIZIONE 5.8. Sia $A(n)$ un'affermazione che riguarda il generico numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $A(n)$ è vera per ogni $n \geq \bar{n}$ diremo che l'affermazione $A(n)$ è vera *definitivamente*.

Il teorema sulle operazioni coi limiti e il teorema del confronto coprono solo alcuni dei casi che si possono presentare. Nel seguito discutiamo alcune altre situazioni esemplari.

PROPOSIZIONE 5.9. Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione infinitesima (ovvero $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata. Allora la successione prodotto $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesima.

DIM. Sia $C > 0$ una costante tale che $|b_n| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Allora si ha

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq C\varepsilon, \quad \text{per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Questo prova che la successione prodotto è infinitesima. $\square$

ESERCIZIO 5.10. Provare le seguenti affermazioni.

- 1) Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$$

- 2) Siano $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni reali tali che $b_n \leq c_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$$

- 3) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione che diverge a ∞ e sia $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata. Provare che la successione somma $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a ∞ .
 4) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale che diverge a ∞ , e sia $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione positiva, staccata da 0 ovvero: esiste $\delta > 0$ tale che $b_n \geq \delta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la successione prodotto $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge a ∞ .

2. Esempi di successioni elementari

ESEMPIO 5.11 (Quoziente di polinomi). Siano P e Q polinomi (a coefficienti reali) nella variabile $x \in \mathbb{R}$ di grado p e q , rispettivamente, con $p, q \in \mathbb{N}$. Precisamente, supponiamo di avere

$$\begin{aligned} P(x) &= a_p x^p + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R} \\ Q(x) &= b_q x^q + \dots + b_1 x + b_0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Avremo $a_p \neq 0$ e $b_q \neq 0$ e senza perdere di generalità supponiamo che $a_p > 0$ e $b_q > 0$. Allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \infty & \text{se } p > q, \\ \frac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q, \\ 0 & \text{se } q > p. \end{cases}$$

La verifica è elementare e utilizza il teorema sulle operazioni con i limiti partendo dalla seguente identità:

$$\frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} + \dots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \dots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}.$$

ESEMPIO 5.12 (Successione geometrica). Sia $q \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Studiamo la convergenza delle successione geometrica $a_n = q^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Verificheremo le seguenti affermazioni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ \infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

L'ultima affermazione significa che il limite non esiste nè in $\mathbb{R}$ nè $\pm\infty$. Talvolta il numero q si dice *ragione* della progressione geometrica.

Esaminiamo il caso $-1 < q < 1$. È sufficiente considerare il caso $0 < q < 1$. Allora si ha $q = 1 - x$ con $x \in (0, 1)$. Per tali x valgono le disuguaglianze

$$0 \leq (1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + nx}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La disuguaglianza a destra può essere verificata per induzione (esercizio). Siccome

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + nx} = 0,$$

dal teorema del confronto segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x)^n = 0.$$

Nel caso $q > 1$ si può scrivere $q = 1 + x$ con $x > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli si ottiene

$$q^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

e per confronto si trova $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$.

ESEMPIO 5.13 (Radice n -esima). Per ogni numero reale $p > 0$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

È sufficiente considerare il caso $p > 1$. Il caso $0 < p < 1$ si riduce a questo passando ai reciproci. Se $p > 1$ si ha $\sqrt[n]{p} = 1 + a_n$ con $a_n > 0$. Dalla disuguaglianza di Bernoulli

$$p = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

si ottiene

$$0 < a_n \leq \frac{p - 1}{n},$$

e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ESEMPIO 5.14 (Radice n -esima di una potenza di n). Per ogni numero reale $\beta > 0$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\beta} = 1.$$

Proviamo l'affermazione nel caso $\beta = 1$. Si ha certamente $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq 1$. Usando nuovamente la disuguaglianza di Bernoulli si trova

$$\sqrt{n} = (1 + a_n)^n \geq 1 + na_n,$$

e quindi

$$0 \leq a_n \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n}.$$

Dal teorema del confronto segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. In conclusione, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^2 = 1.$$

ESEMPIO 5.15 (Confronto fra potenze ed esponenziali). Siano $a, \beta \in \mathbb{R}$ numeri reali tali che $a > 1$ e $\beta > 0$. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{n^\beta}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\beta a^n}{a^{n+1} n^\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\beta = \frac{1}{a} < 1,$$

fissato $\frac{1}{a} < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Iterando tale disuguaglianza si ottiene

$$0 \leq b_n \leq qb_{n-1} \leq \dots \leq q^{n-\bar{n}} b_{\bar{n}} = q^n \cdot \frac{b_{\bar{n}}}{q^{\bar{n}}}.$$

Per confronto con la successione geometrica si deduce che $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

ESEMPIO 5.16 (Confronto fra esponenziale e fattoriale). Sia $a \in \mathbb{R}$ un numero reale tale che $a > 0$. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esaminiamo la successione

$$b_n = \frac{a^n}{n!} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dal momento che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

fissato $0 < q < 1$, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $b_{n+1} < qb_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Come sopra, si conclude che $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

ESEMPIO 5.17 (Confronto fra potenze e logaritmi). Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha, \beta > 0$ risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0.$$

Con la sostituzione $x_n = \log n$, ovvero $n = e^{x_n}$, si ottiene per $n \geq 1$

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = \frac{x_n^\beta}{e^{x_n \alpha}} \leq \frac{([x_n] + 1)^\beta}{(e^\alpha)^{[x_n]}}.$$

Siccome $e > 1$ e $\alpha > 0$, la base dell'esponenziale verifica $e^\alpha > 1$. Dunque, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che risulti

$$\frac{([x_n] + 1)^\beta}{(e^\alpha)^{[x_n]}} < \varepsilon$$

non appena $[x_n] > M$. Ma siccome

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\log n] = \infty,$$

esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $[x_n] > M$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Abbiamo così provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$0 \leq \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} < \varepsilon.$$

3. Successioni monotone

Le successioni reali *monotone* sono interessanti perchè hanno sempre limite, finito o infinito.

DEFINIZIONE 5.18 (Successioni monotone). Una successione reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice:

- i) *crescente* se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- ii) *strettamente crescente* se $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- iii) *decrescente* se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- iv) *strettamente decrescente* se $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Una successione crescente o decrescente si dice *monotona*.

PROPOSIZIONE 5.19. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione crescente e (superiormente) limitata. Allora la successione è convergente e inoltre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

DIM. L'insieme $A = \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato e quindi esiste finito

$$L = \sup A \in \mathbb{R}.$$

Siccome L è un maggiorante di A si ha $a_n \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Siccome L è il minimo dei maggioranti di A , esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$. Dal fatto che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente, si deduce che per $n \geq \bar{n}$ si ha:

$$a_n \geq a_{\bar{n}} > L - \varepsilon.$$

Abbiamo dunque provato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq \bar{n}$ risulta

$$L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon.$$

Questa è la tesi della proposizione. □

Se una successione crescente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è superiormente limitata, allora un argomento analogo al precedente prova che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Per le successioni decrescenti valgono affermazioni analoghe. Ad esempio, se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e inferiormente limitata, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Nella dimostrazione della Proposizione 5.19 abbiamo usato l'Assioma di completezza dei numeri reali per assicurarci dell'esistenza del numero $L \in \mathbb{R}$. La Proposizione 5.19 implica a sua volta l'Assioma di completezza. La dimostrazione di questo fatto è lasciata come esercizio.

4. Un limite notevole

In questa sezione vogliamo dimostrare che esiste finito il seguente limite

$$(5.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

dove il numero di Nepero $e \in (2, 3)$ è definito proprio in questo modo.

TEOREMA 5.20. La successione

$$(5.3) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

è (strettamente) crescente e superiormente limitata e dunque converge.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è strettamente crescente. Infatti, dalla formula del binomio di Newton segue che:

$$\begin{aligned} (5.4) \quad a_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] \\ &< \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \\ &= a_{n+1}. \end{aligned}$$

Ora dimostriamo che la successione è superiormente limitata. Nella seguente stima usiamo la disuguaglianza $k! \geq 2^{k-1}$ valida per $k \in \mathbb{N}$, di facile verifica:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] \\ &< \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

D'altra parte, $a_n \geq a_1 = 2$.

□

OSSERVAZIONE 5.21. Usando la teoria delle serie, si può dimostrare che

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

come suggerito dalle formule in (5.4).

ESERCIZIO 5.22. Usando il limite (5.3) e le operazioni elementari sui limiti, verificare che

$$(5.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Ora passiamo dalle successioni alle funzioni: il limite notevole (5.2) continua a valere quando $n \rightarrow \infty$ è sostituito da $x \rightarrow \infty$.

COROLLARIO 5.23. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

DIMOSTRAZIONE. Partiamo dal caso $k = 1$. Si considerino le funzioni $f, g : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x.$$

Nell'Esempio ??¹ mostreremo che f è crescente, mentre g è decrescente. Dunque esistono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x,$$

che devono essere e ed e^{-1} , rispettivamente.

Quando $k > 0$, basta fare il cambiamento di variabile $x = kt$ nell'operazione di limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{kt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^k = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^k = e^k.$$

Stiamo usando il fatto che la funzione $x \mapsto x^k$ è continua per portare il limite dentro la potenza.

¹REF

Quando $k < 0$ si procede in modo analogo.

□

5. Successioni ricorsive

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $a_0 \in \mathbb{R}$ un numero assegnato. Una successione tale che $a_n = a_0$ per $n = 0$ e

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad \text{per } n \geq 0$$

si dice definita in modo ricorsivo.

In questa sezione illustriamo tramite un esempio alcune tecniche per studiare le successioni ricorsive. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la seguente successione definita tramite la relazione ricorsiva:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \text{per } n \geq 0.$$

Vogliamo provare che la successione converge e calcolarne il limite.

La successione è crescente e superiormente limitata. Sia $f(x) = \sqrt{2 + x}$ la funzione, definita per $x \geq -2$, che interviene nella definizione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$. Studiamo la disuguaglianza

$$f(x) > x \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 2.$$

Dunque, fintantochè $0 \leq a_n < 2$ risulta $a_{n+1} > a_n$. Proviamo per induzione che $0 \leq a_n < 2$. Per $n = 0$ questo è chiaro. Inoltre, si ha

$$a_{n+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2 + a_n} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_n < 2.$$

Questo prova che la successione è crescente (strettamente) e superiormente limitata. Dunque esiste finito

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Passando al limite nella relazione ricorsiva $a_{n+1} = f(a_n)$ ed usando la continuità di f (chiariremo il concetto di continuità nel prossimo capitolo) si trova

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = f(L).$$

Le soluzioni dell'equazione $L = f(L)$ sono $L = -1$ che è da scartare ed $L = 2$. Dunque, il limite è $L = 2$.

6. Esercizi

ESERCIZIO 5.24. Verificare che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n+3}} - 1 \right) = -2; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 1} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} \right) = -1.$$

ESERCIZIO 5.25. 1) Usando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 4}{3n^2 + 2 \cos n} = \frac{2}{3}.$$

2) Usando il teorema sulle operazioni elementari coi limiti, calcolare il valore $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ del seguente limite:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2 - n} \right).$$

Verificare la correttezza del risultato utilizzando la definizione.

ESERCIZIO 5.26. Usando la definizione, verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{e^{n/2} + e^{-n/2}}}{e^{n/4}} = 1.$$

ESERCIZIO 5.27. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right).$$

ESERCIZIO 5.28. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 3^n + n^2 \sin(n) + 1}{n^3 2^n + n^2 + (-1)^n}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^4(n) + n \arctan(n)}{n^2 + \log n}; \\ 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n+1]{n+1} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{2n}; \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 \log n + 1/n}; \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.29. Risolvendo le forme indeterminate, calcolare i seguenti limiti:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^3}{2n+1}}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^n} \right)^{n!}; \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n + n! \log(n+1)}{2^n + (n+1)^n}.$$

ESERCIZIO 5.30. Al variare dei numeri reali $\alpha, \beta > 0$ studiare la convergenza della successione reale

$$a_n = \frac{2^{n^\alpha}}{(n!)^\beta}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ESERCIZIO 5.31. Consideriamo la successione

$$a_n = \binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- i) Verificare che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente;
- ii) Verificare (per induzione) che $a_n \geq 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- iii) Dedurre dal punto ii) che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

ESERCIZIO 5.32. Al variare di $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$, studiare la convergenza della successione numerica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con

$$a_n = \frac{1}{b^n} \binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ESERCIZIO 5.33. Sia $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$. Calcolare tutti i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ in funzione di m tali che il limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta \left(\sqrt[m]{n+1} - \sqrt[m]{n} \right)$$

esista finito e risulti $L \neq 0$.

ESERCIZIO 5.34. Determinare tutte le coppie di numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$ tali che risulti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^{2n} + y^{4n}} = x^2.$$

Risposta: $x \geq y^2$ oppure $x \leq -y^2$.

ESERCIZIO 5.35. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista finito

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Provare allora che anche $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Applicare questo risultato al calcolo del limite della successione $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

ESERCIZIO 5.36. Al variare del parametro reale $\alpha > 0$ calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n!}{n^\alpha}.$$

ESERCIZIO 5.37. Al variare dei numeri naturali $k, m \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ calcolare il limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^m}{(2kn)!}.$$

ESERCIZIO 5.38. Sia $\alpha > 0$ un parametro e si consideri la successione

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare i limiti:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ per ogni $\alpha > 0$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ per $\alpha = 2$.

ESERCIZIO 5.39. Studiare la convergenza della successione $a_n = \sqrt{2\sqrt{3}\dots\sqrt{n}}$, $n \geq 2$, e della successione $a_n = \sqrt{1!\sqrt{2!}\dots\sqrt{n!}}$, $n \geq 1$.

ESERCIZIO 5.40. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n \in \mathbb{R}$ l'unica radice positiva del polinomio $p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$ nella variabile $x \in \mathbb{R}$. Provare che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.

ESERCIZIO 5.41. Studiare segno, monotonia e convergenza della successione

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n.$$

ESERCIZIO 5.42. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $\varphi(x) = x - x^3$. Assegnato $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in modo ricorsivo tramite la relazione

$$a_{n+1} = \varphi(a_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Provare che se $a_0 \in [-1, 1]$ la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e calcolarne il limite.
- 2) Provare che la successione converge se e solo se $|a_0| < \sqrt{2}$.

ESERCIZIO 5.43. Siano $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$. Definiamo in modo ricorsivo la successione

$$a_{n+1} = \frac{\beta a_n^2}{1 + a_n^2}, \quad n \geq 0.$$

Discutere al variare di $\beta > 0$ e $a_0 \geq 0$ la convergenza della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e, se esiste, calcolarne il limite. Studiare prima il caso $0 < \beta < 2$, poi il caso $\beta = 2$ e infine $\beta > 2$.

ESERCIZIO 5.44. Provare che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definita ricorsivamente da

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = 2^{a_n/2}, \quad n \geq 1,$$

è convergente e calcolarne il limite.

ESERCIZIO 5.45. Dato un numero reale $a_0 \in \mathbb{R}$, definiamo per ricorsione la successione numerica

$$a_{n+1} = \arctan(a_n + 1), \quad n \geq 0.$$

Dimostrare che la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

ESERCIZIO 5.46. Sia $a_0 \in (-1, 1]$ e si consideri la successione ricorsiva

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}, \quad n \geq 0.$$

- i) Provare che $a_{2n} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che la successione $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente.
- ii) Studiare l'andamento della successione $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- iii) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Suggerimento: studiare la relazione ricorsiva che lega a_{n+1} con a_{n-1} .

ESERCIZIO 5.47. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita ricorsivamente nel seguente modo: $a_0 \in (0, 1)$ è un numero fissato e $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ per $n \geq 0$.

- 1) Provare che il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ esiste e calcolarlo.
- 2) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$.

ESERCIZIO 5.48. 1) Sia a_n , $n \geq 2$, la successione definita in modo ricorsivo da

$$a_2 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = (n+1)^{\frac{1}{2^n}} a_n, \quad n \geq 2.$$

Stabilire se la successione $(a_n)_{n \geq 2}$ converge.

- 2) Studiare la convergenza della successione $a_n = \sqrt{1! \sqrt{2!} \dots \sqrt{n!}}$, $n \geq 1$.

ESERCIZIO 5.49. 1) Siano $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$. Provare l'identità

$$\varepsilon_0 \sqrt{2 + \varepsilon_1 \sqrt{2 + \dots + \varepsilon_n \sqrt{2}}} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \sum_{i=0}^n \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}{2^i} \right).$$

2) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione definita in modo ricorsivo da $a_0 = 0$ e $a_{n+1} = (a_n + 2)^{1/2}$. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (2 - a_n)^{1/2}.$$

ESERCIZIO 5.50. Siano $a_0, a_1 > 0$ e per $n \geq 1$ si definisca in modo ricorsivo $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$.

- i) Supponendo che $a_{n+1} \geq 2$ provare che

$$|\sqrt{a_{n+1}} - 2| \leq \frac{|\sqrt{a_n} - 2| + |\sqrt{a_{n-1}} - 2|}{2 + \sqrt{2}}.$$

- ii) Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

ESERCIZIO 5.51. Sia $0 < x_0 < \pi$ e per $n \geq 1$ sia $x_n = \sin x_{n-1}$. Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} x_n = 1.$$

ESERCIZIO 5.52. Si consideri la successione di numeri reali

$$a_n = \sqrt[n]{n} \sqrt[n+1]{n+1} \cdots \sqrt[2n]{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calcolare i due limiti:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{1/3}} \quad \text{ed} \quad L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{3/2}}.$$

Sugg.: Opportuni confronti.

ESERCIZIO 5.53. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j,k > 1, j+k=n} \frac{1}{jk}.$$

ESERCIZIO 5.54. Sia $k > 0$. Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (2k^{1/n} - 1)^n$.

ESERCIZIO 5.55. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale che verifica $a_1 > 1$ e $a_1 + \dots + a_{n-1} < a_n$ per ogni $n \geq 2$. Provare che esiste un numero reale $q > 1$ tale che $a_n > q^n$ per ogni $n \geq 1$.

ESERCIZIO 5.56. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$.

Provare che $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n)^{\frac{1}{3}} a_n = 1$.

ESERCIZIO 5.57. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione positiva, $a_n > 0$, convergente ad $L \in \mathbb{R}$. Provare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n} = L.$$

ESERCIZIO 5.58. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (2\sqrt[n]{n} - 1)^n.$$

ESERCIZIO 5.59. Siano $a_n, b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, tali che $a_n \rightarrow a > 0$ e $b_n \rightarrow b > 0$. Siano $p, q > 0$ tali che $p + q = 1$. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (pa_n + qb_n)^n.$$

ESERCIZIO 5.60. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx.$$