

# Analisi Matematica 1, 28/01/25

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

1. Data  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e dato  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dare la definizione di
  - a.  $x_0$  punto di minimo locale per  $f$ .
  - b.  $x_0$  punto di accumulazione per  $A$ .
2. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale e illustrarlo su un esempio.
3. Enunciare il teorema sulla somma dei limiti per le funzioni e dimostrarlo
4. La successione reale  $(a_n)_{n \geq 1}$ , con  $a_n = \frac{\sin(e^n)}{\cos(e^{-n})}$ , ammette una sottosuccessione convergente?

# Analisi Matematica 1, 28/01/25

Parte di esercizi.

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Calcolare l'insieme di tutte le primitive della funzione

$$\int \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$$

(B) Utilizzando l'espressione della primitiva trovata al punto (A), stabilire se il seguente limite è finito o infinito e, nel primo caso, calcolare il valore

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$$

**Esercizio 2** [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\log(e^{2x} - 1)}\right)$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*)  $D$  di  $f$ , i *limiti notevoli* di  $f$ , gli eventuali asintoti .

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata,  $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di  $f$ , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di  $f$ :

*\*usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio\**

**Esercizio 3** [senza svolgimento, 4 punti]

- 1) Determinare tutte le soluzioni complesse della equazione

$$z^4 - 9|z|^2 = 0$$

- 2) Disegnare le soluzioni nel piano complesso.

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

(i) Sia  $\alpha > 0$ . Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 4 in  $x_0 = 0$  delle funzioni seguenti

$$f(x) = e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x$$

$$g(x) = \log(1 - \sin x)$$

(ii) Calcolare in funzione di  $\alpha > 0$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \log(1 - \sin x) - 1}{x(e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x)}$$

# Analisi Matematica 1, 13/02/25

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

1. Sia  $A \subset \mathbb{R}$  non vuoto e limitato.
  - Dare la definizione di estremo inferiore di  $A$ .
  - Fornire un esempio di tale  $A$  il cui estremo inferiore non sia punto di accumulazione.
2. Enunciare il teorema di Lagrange. Indicare poi una ipotesi del teorema che è necessaria, fornendo un controesempio.
3. Enunciare il teorema di Weierstrass. Dare un esempio, se esiste, in cui la conclusione del teorema è vera ma le ipotesi non sono soddisfatte.
4. Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni continue e sia  $f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .  
Dimostrare che vale la disuguaglianza  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ .

# Analisi Matematica 1, 13/02/25

Parte di esercizi.

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Calcolare una primitiva  $F$  della funzione

$$f(x) = e^{2x} \cos(5e^x + 3)$$

(B) Stabilire se il limite seguente esiste e, nel caso, calcolarlo:

$$L = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{2x} \cos(5e^x + 3) dx$$

**Esercizio 2** [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x}{|x-1|} \log |x|$$

*Indicazione: lo studio degli zeri e del segno della derivata richiede una analisi.*

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*)  $D$  di  $f$ , i *limiti notevoli* di  $f$ , gli eventuali asintoti .

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata,  $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di  $f$ , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di  $f$ :

**Esercizio 3** [senza svolgimento, 4 punti]

- 1) Scrivere tutte le soluzioni della equazione differenziale omogenea

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

- 2) Scrivere tutte le soluzioni della equazione differenziale non omogenea

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

- 2) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2x} - 1 - x \log(x^2)}{\log x (x^2 \log x - \sin^2 x)}$$

# Analisi Matematica 1, 18/06/25

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

1. Una successione monotona decrescente e limitata è convergente. Quale è il suo limite? Giustificare la propria affermazione.
2. Dare la definizione di funzione composta. Enunciare il teorema sul limite della funzione composta.
3. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile. E vero che se  $f(x) = o(x)$  allora  $f(0) = 0$  e  $f'(0) = 0$ ? Giustificare.
4. Dare la definizione di  $f$  strettamente crescente su un intervallo. Dimostrare che se  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile e  $f'(x) > 0$  per  $x \in ]a, b[$ , allora  $f$  è strettamente crescente nel medesimo intervallo.

# Analisi Matematica 1, 18/06/25

Parte di esercizi.

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Dato  $\alpha > 0$  trovare lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 (con il polinomio di Taylor di grado 4) della seguente funzione a partire da  $x_0 = 0$

$$f(x) = e^{1-\cos x} - \cosh(\alpha x)$$

(B) Al variare di  $\beta > 0$  calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\beta}{e^{1-\cos x} - \cosh(\alpha x)}$$

per i due valori  $\alpha = 1$  e poi  $\alpha = 2$ .

**Esercizio 2** [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = -\arctan\left(\sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x - 2}}\right).$$

*Indicazione: lo studio degli zeri e del segno della derivata richiede una analisi.*

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*)  $D$  di  $f$ , i *limiti notevoli* di  $f$ , gli eventuali asintoti .

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata,  $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di  $f$ , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di  $f$ :

*\*usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio\**

**Esercizio 3** [senza svolgimento, 4 punti]

1) Risolvere l'equazione

$$z^3 - (\bar{z})^2 = 0$$

2) disegnare le soluzioni nel piano complesso

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

1. Tra le primitive seguenti

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} \arctan x \, dx$$

determinare quella che vale 2 in  $x = 0$ .

2. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} \arctan x \, dx$$

# Analisi Matematica 1, 02/07/25

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

1. Sia  $(a_n)$  successione limitata e  $(b_n)$  successione convergente a un limite  $L \in \mathbb{R}, L \neq 0$ . E' vero che la successione  $(c_n)$  definita da  $c_n = a_n/b_n$  è limitata? Giustificare
2. Enunciare il teorema sulla permanenza del segno per i limiti di funzione. Illustrarlo su un esempio.
3. Enunciare il teorema di Taylor con resto in forma di Lagrange. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 3 di  $f(x) = \log x$  nel punto  $x_0 = 2$ .
4. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa e giustificare:  
se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile e  $f'(x) \geq \frac{1}{2}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $f(x) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow -\infty$ .

# Analisi Matematica 1, 02/07/25

Parte di esercizi.

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Trovare  $a, \gamma \in \mathbb{R}$  tali che per  $x \rightarrow 0$

$$e^{2x^2} - \cos x - \frac{5}{2} \sin^2 x = ax^\gamma + o(x^\gamma)$$

(B) al variare di  $\alpha > 0$  calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha + x^6}{e^{2x^2} - \cos x - \frac{5}{2} \sin^2 x}$$

**Esercizio 2** [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \left| 1 - \sqrt{2} \arctan \frac{1}{x} - \sqrt{1+x^2} \right|$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*)  $D$  di  $f$ , i *limiti notevoli* di  $f$ , gli eventuali asintoti .
- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata,  $f'(x) =$
- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di  $f$ , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di  $f$ :

*\*usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio\**

**Esercizio 3** [senza svolgimento, 4 punti]

1) Risolvere l'equazione differenziale

$$u'' - 5u' + 6u = 0$$

2) Risolvere l'equazione differenziale

$$u'' - 5u' + 6u = \sin t$$

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

Tra tutte le primitive seguenti

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx$$

- (i) determinare quella primitiva  $F$  che soddisfa  $F(0) = -\log \sqrt{2}$ ,
- (ii) mostrare che  $F(x) = o(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

# Analisi Matematica 1, 28/08/25

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

1. Dato  $A \subset \mathbb{R}$  dare la definizione di massimo di  $A$ . Dimostrare che se l'insieme  $A$  ammette massimo, allora il massimo è unico.
2. Enunciare il teorema di Rolle e dimostrarlo.
3. Usare un risultato del corso, di cui si scriverà l'enunciato, per giustificare la disuguaglianza

$$0 < \int_1^2 e^{-x^2} dx < \frac{1}{2}$$

4. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile due volte. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa e giustificare:

se  $f(x) = -x^2 + o(x^2)$  per  $x \rightarrow 0$ , allora 0 è un punto di massimo locale per  $f$ .

# Analisi Matematica 1, 28/08/25

Parte di esercizi.

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ... Fisica – Astronomia ... Anno accademico 24/25 – precedente .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Trovare tutte le primitive seguenti

$$\int (1 - 2x) \log(1 + \sqrt{x}) \, dx$$

(B) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = (1 + y^2)(1 - 2x) \log(1 + \sqrt{x}). \quad (1)$$

(C) Trovare le soluzioni della equazione (1) che soddisfano la condizione iniziale  $y(1) = \tan(11/12)$ .

**Esercizio 2** [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt{3 - 4 \sin^2(x)}$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*)  $D$  di  $f$ , i *limiti notevoli* di  $f$ , gli eventuali asintoti .
- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata,  $f'(x) =$
- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di  $f$ , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di  $f$ :

*\*usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio\**

**Esercizio 3** [senza svolgimento, 4 punti]

Dato  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\bar{z}$  è il suo coniugato, mentre  $|z|$  denota il suo modulo.

1) Risolvere l'equazione seguente in  $\mathbb{C}$

$$\bar{z}^4 = (1 + \sqrt{3}i)^2 |z|^2$$

2) Disegnare le soluzioni nel piano complesso

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

(i) Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 4 in  $x_0 = 0$  delle funzioni seguenti

$$f(x) = (e^{2x} - 1)^2$$

$$g(x) = \sinh^2(2x)$$

(ii) Calcolare in funzione di  $\alpha > 0$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(e^{2x} - 1)^2 - \sinh^2(2x)}{\sin(2x^\alpha) - x^3}$$

# Analisi Matematica 1, 27/01/26

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

# Analisi Matematica 1, 28/01/25

Parte di esercizi.

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Stabilire se la funzione

$$f : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(2x) \log(\sin x)$$

si può estendere per continuità in  $x = 0$  e in  $x = \pi$  ad una funzione continua  $\tilde{f}$ . In caso affermativo, dire se la  $\tilde{f}$  così estesa soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle.

(B) Determinare tra tutte le primitive della funzione

$$\int \sin(2x) \log(\sin x) dx$$

la primitiva  $F$  che soddisfa  $F(0) = 0$ .

**Esercizio 2** [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = (|x| + |x - 1|)e^{-1/x}$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*)  $D$  di  $f$ , i *limiti notevoli* di  $f$ , gli eventuali asintoti .

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata,  $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di  $f$ , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di  $f$ :

*\*usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio\**

**Esercizio 3** [senza svolgimento, 4 punti]

- 1) Determinare tutte le soluzioni complesse della equazione

$$z = \frac{1 + iz}{i + iz^2}$$

- 2) Disegnare le soluzioni nel piano complesso.

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

(i) Sia  $\alpha > 0$ . Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 4 in  $x_0 = 0$  della funzioni seguenti

$$f(x) = \arctan(\sin x) - \sinh x$$

(ii) Calcolare in funzione di  $\alpha > 0$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arctan(\sin x) - \sinh x}{x^\alpha (1 - \cos^2(2x))}$$

# Analisi Matematica 1, 12/02/26

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

1. Per  $A \subset \mathbb{R}$  non vuoto, dare la definizione di estremo inferiore e di minimo di  $A$ .  
Dimostrare che se  $A$  ammette minimo, allora l'estremo inferiore coincide col minimo.
2. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale
3. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, e sia  $f$  derivabile su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dire se le seguenti affermazione sono vere o false e giustificare:
  - a) se  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$  allora  $f$  è derivabile in  $x = 0$  e vale  $f'(0) = \ell$ .
  - b) se  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  non esiste allora  $f$  non è derivabile in  $x = 0$ .
4. Enunciare il teorema del confronto asintotico (o del rapporto) per successioni reali  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

# Analisi Matematica 1, 12/02/26

Parte di esercizi.

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(i) Scrivere lo sviluppo di Taylor di grado 4 in  $x_0 = 0$  della funzione

$$f(x) = (\cos x - e^x)^3$$

(ii) Dato  $\alpha > 0$ , trovare  $c \neq 0$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$  tali che per  $x \rightarrow 0^+$  valga

$$(\sin x)^\alpha - x^\alpha = cx^\gamma + o(x^\gamma)$$

(iii) Calcolare in funzione di  $\alpha > 0$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin x)^\alpha - x^\alpha}{x^4 \cos(\log x) + (\cos x - e^x)^3}$$

**Esercizio 2** [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \log \left( e^x - \frac{|x|}{e} \right)$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*)  $D$  di  $f$ , i *limiti notevoli* di  $f$ , gli eventuali asintoti **orizzontali**, **verticali** ed **obliqui**, studiando se necessario prima  $g(x) = e^x - \frac{|x|}{e}$ .

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata, i *limiti notevoli* della derivata: (cioè i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità)

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di  $f$ , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di  $f$ :

*\*usare questo spazio per eventuali calcoli supplementari: indicare l'esercizio\**

**Esercizio 3** [senza svolgimento, 4 punti]

- 1) Determinare  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $z = 1 - i$  sia soluzione di

$$z^2|z|^2 - \lambda\bar{z} = 0$$

- 2) Determinare tutte le soluzioni complesse della equazione precedente per la scelta di  $\lambda$  e disegnare le soluzioni nel piano complesso.

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

(A) Determinare il valore del seguente integrale

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dt$$

(B) Determinare la soluzione  $u(x)$  della equazione differenziale

$$u' = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \sqrt{u},$$

che soddisfa la condizione iniziale  $u(0) = 1$

# Analisi Matematica 1, 17/06/26

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

1. Enunciare il principio di induzione e usarlo per dimostrare che la successione per ricorrenza

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$$

soddisfa le disuguaglianze  $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange
3. Enunciare il teorema di Taylor
4. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile tale che  $f(0) = 1$  e  $f(2) = 1$ . Dire se l'affermazione seguente è vera o falsa e giustificare

esiste  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = x^2$

# Analisi Matematica 1, 17/06/26

Parte di esercizi.

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **120 minuti**.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 5 punti]

(A) Determinare l'insieme delle primitive

$$\int \sin(\log^2(x)) \frac{\log(x)}{x} dx$$

(B) Determinare tutte le soluzioni di

$$y' = (y + 1) \sin(\log^2(x)) \frac{\log(x)}{x}$$

e poi la soluzione al problema di Cauchy con condizione iniziale  $y(1) = 0$ .

(A) Poniamo

$$t = \log^2 x.$$

Allora

$$dt = 2 \log x \frac{1}{x} dx,$$

quindi

$$\frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2} dt.$$

Pertanto

$$\int \sin(\log^2 x) \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C.$$

Ritornando alla variabile  $x$ , otteniamo

$$\boxed{\int \sin(\log^2 x) \frac{\log x}{x} dx = -\frac{1}{2} \cos(\log^2 x) + C}$$

con  $x > 0$ .

(B) L'equazione è a variabili separabili. Scriviamo

$$\frac{dy}{y+1} = \sin(\log^2 x) \frac{\log x}{x} dx$$

Se  $y \neq -1$ , integrando si ha

$$\int \frac{y'}{y+1} dx = \int \sin(\log^2 x) \frac{\log x}{x} dx.$$

Quindi

$$\log |y+1| = -\frac{1}{2} \cos(\log^2 x) + C.$$

Esponenziando,

$$|y+1| = e^C e^{-\frac{1}{2} \cos(\log^2 x)}.$$

Assorbendo il segno nella costante, otteniamo

$$y+1 = C e^{-\frac{1}{2} \cos(\log^2 x)}.$$

Dunque

$$y(x) = Ce^{-\frac{1}{2} \cos(\log^2 x)} - 1$$

con  $C \in \mathbb{R}$ . Questa famiglia comprende anche la soluzione costante

$$y(x) = -1$$

per  $C = 0$ . Ora imponiamo la condizione iniziale

$$y(1) = 0.$$

Poiché

$$\log 1 = 0,$$

si ha

$$0 = Ce^{-\frac{1}{2} \cos 0} - 1.$$

Ma

$$\cos 0 = 1,$$

quindi

$$0 = Ce^{-1/2} - 1.$$

Da cui

$$C = e^{1/2}.$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \cos(\log^2 x)} - 1 = e^{\frac{1 - \cos(\log^2 x)}{2}} - 1$$

## Esercizio 2 [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = e^{-1+x \log |x|}$$

### • Dominio, limiti notevoli e asintoti.

Il dominio naturale e'  $\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ .

Studiamo i limiti principali. Per  $x \rightarrow 0^\pm$ , sappiamo che

$$x \log |x| \rightarrow 0.$$

Quindi  $-1 + x \log |x| \rightarrow -1$ , e pertanto

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^{-1}.$$

Dunque in  $x = 0$  la funzione non e' definita, ma ha una discontinuita' eliminabile.

Per  $x \rightarrow +\infty$ , si ha  $x \log x \rightarrow +\infty$ , quindi  $-1 + x \log x \rightarrow +\infty$  e

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Per  $x \rightarrow -\infty$ , ponendo  $|x| = -x$ , si ha  $x \log |x| \rightarrow -\infty$ , quindi  $-1 + x \log |x| \rightarrow -\infty$  e dunque

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Quindi la funzione ha un asintoto orizzontale a sinistra:

$$\boxed{y = 0 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.}$$

Non ci sono asintoti verticali, perche'  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = e^{-1}$  e' finito.

### • Derivabilita' e calcolo della derivata.

La funzione e' derivabile in tutto il suo dominio, cioe' in  $\boxed{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}$ .

Poniamo

$$g(x) = -1 + x \log |x|.$$

Allora

$$f(x) = e^{g(x)}.$$

Calcoliamo

$$g'(x) = \frac{d}{dx} (-1 + x \log |x|).$$

Poiche'

$$\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \log(-x) = \frac{1}{x},$$

si ottiene

$$g'(x) = \log |x| + x \cdot \frac{1}{x} = \log |x| + 1.$$

Dunque per ogni  $x \neq 0$

$$\boxed{f'(x) = e^{-1+x \log |x|} (\log |x| + 1)}$$

Studiamo i limiti notevoli della derivata in  $x = 0$ . Poiche'

$$e^{-1+x \log |x|} \rightarrow e^{-1}, \quad \log |x| + 1 \rightarrow -\infty,$$

segue che

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty}, \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty}.$$

Inoltre,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

• **Segno della derivata, monotonia ed estremi locali.**

Poiche'  $e^{-1+x \log |x|} > 0$  per ogni  $x \neq 0$ , il segno di  $f'(x)$  dipende solo da  $\log |x| + 1$ .

Studiamo quindi

$$\log |x| + 1 > 0. \quad \Leftrightarrow \quad |x| > e^{-1}.$$

Dunque

$$f'(x) > 0 \iff |x| > \frac{1}{e}.$$

Quindi i punti critici sono

$$\boxed{x = -\frac{1}{e}} \quad \text{e} \quad \boxed{x = \frac{1}{e}}.$$

Riassumendo il segno di  $f'$ :

|                          |                           |                |                     |                    |               |
|--------------------------|---------------------------|----------------|---------------------|--------------------|---------------|
| $x$                      | $(-\infty, -\frac{1}{e})$ | $-\frac{1}{e}$ | $(-\frac{1}{e}, 0)$ | $(0, \frac{1}{e})$ | $\frac{1}{e}$ |
| $(\frac{1}{e}, +\infty)$ |                           |                |                     |                    |               |
| $f'(x)$                  | +                         | 0              | -                   | -                  | 0             |
| +                        |                           |                |                     |                    |               |

Studiamo ora il comportamento della derivata vicino al punto di non derivabilit  $x = 0$ . Poiche'

$$x \log |x| \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0^\pm,$$

si ha

$$e^{-1+x \log |x|} \rightarrow e^{-1}.$$

Inoltre

$$\log |x| + 1 \rightarrow -\infty \quad \text{per } x \rightarrow 0^\pm.$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty}.$$

Quindi in  $x = 0$  la funzione non e' derivabile, e la derivata esplode a  $-\infty$  da entrambi i lati.

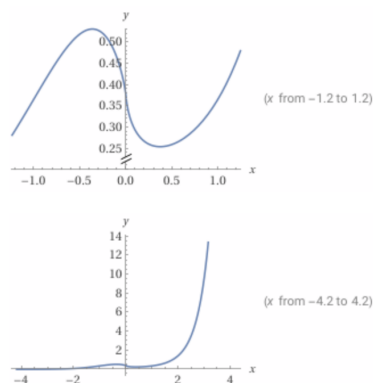


Figure 1: Studio della funzione

**Esercizio 3** [con svolgimento, 5 punti]

Calcolare l'integrale

$$\int_2^3 \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx$$

Poniamo

$$t = e^x.$$

Allora

$$dt = e^x dx = t dx, \quad dx = \frac{dt}{t}.$$

Inoltre

$$e^{2x} + e^x - 2 = t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1).$$

Gli estremi diventano

$$x = 2 \Rightarrow t = e^2, \quad x = 3 \Rightarrow t = e^3.$$

Quindi

$$\int_2^3 \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx = \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{t(t+2)(t-1)} dt.$$

Scomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{t(t+2)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t-1}.$$

Allora

$$1 = A(t+2)(t-1) + Bt(t-1) + Ct(t+2).$$

Ponendo  $t = 0$ , otteniamo

$$1 = -2A, \quad A = -\frac{1}{2}.$$

Ponendo  $t = -2$ , otteniamo

$$1 = 6B, \quad B = \frac{1}{6}.$$

Ponendo  $t = 1$ , otteniamo

$$1 = 3C, \quad C = \frac{1}{3}.$$

Pertanto

$$\frac{1}{t(t+2)(t-1)} = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{6(t+2)} + \frac{1}{3(t-1)}.$$

Dunque

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{t(t+2)(t-1)} dt = \left[ -\frac{1}{2} \log t + \frac{1}{6} \log(t+2) + \frac{1}{3} \log(t-1) \right]_{e^2}^{e^3}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx &= -\frac{1}{2} \log(e^3) + \frac{1}{6} \log(e^3 + 2) + \frac{1}{3} \log(e^3 - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \log(e^2) - \frac{1}{6} \log(e^2 + 2) - \frac{1}{3} \log(e^2 - 1). \end{aligned}$$

Poiche'

$$-\frac{1}{2} \log(e^3) + \frac{1}{2} \log(e^2) = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2},$$

otteniamo

$$\boxed{\int_2^3 \frac{1}{e^{2x} + e^x - 2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \log\left(\frac{e^3 + 2}{e^2 + 2}\right) + \frac{1}{3} \log\left(\frac{e^3 - 1}{e^2 - 1}\right)}$$

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

Calcolare al variare di  $\gamma > 0$  il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sinh x)^2 - x^\gamma}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x}.$$

Usiamo gli sviluppi di Taylor per  $x \rightarrow 0^+$ :  $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ . Quindi

$$x - \sinh x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \Rightarrow \quad (x - \sinh x)^2 = \frac{x^6}{36} + o(x^6).$$

Per il denominatore abbiamo

$$\cos(4x) = 1 - \frac{(4x)^2}{2} + o(x^2) = 1 - 8x^2 + o(x^2).$$

Inoltre vale che  $x^{7/3} \log x = o(x^2)$ , perche'

$$\frac{x^{7/3} \log x}{x^2} = x^{1/3} \log x \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Pertanto

$$\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x = -8x^2 + o(x^2).$$

Il limite diventa quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^6}{36} + o(x^6) - x^\gamma}{-8x^2 + o(x^2)}.$$

**Caso 1:**  $0 < \gamma < 2$ .

In questo caso  $\gamma < 6$  quindi il termine dominante al numeratore e'  $-x^\gamma$ . Quindi

$$\frac{(x - \sinh x)^2 - x^\gamma}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = \frac{-x^\gamma + o(x^\gamma)}{-8x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{8} x^{\gamma-2} + o(x^{\gamma-2}).$$

Poiche'  $\gamma - 2 < 0$ , si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sinh x)^2 - x^\gamma}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = +\infty.$$

**Caso 2:**  $\gamma = 2$ .

Ancora  $\gamma < 6$  quindi il termine dominante al numeratore e'  $-x^\gamma$ . Allora per  $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{(x - \sinh x)^2 - x^2}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{-8x^2 + o(x^2)} \rightarrow \frac{1}{8}.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sinh x)^2 - x^2}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = \frac{1}{8}.$$

**Caso 3:**  $\gamma > 2$ .

Se  $2 < \gamma$ , il numeratore e'  $o(x^2)$ , percio'

$$\frac{(x - \sinh x)^2 - x^\gamma}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = \frac{o(x^2)}{-8x^2 + o(x^2)} \rightarrow 0.$$

In conclusione,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \sinh x)^2 - x^\gamma}{\cos(4x) - 1 + x^{7/3} \log x} = \begin{cases} +\infty, & 0 < \gamma < 2, \\ \frac{1}{8}, & \gamma = 2, \\ 0, & \gamma > 2. \end{cases}$$

# Analisi Matematica 1, 01/07/26

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

1. Dare la definizione di estremo inferiore per  $A \subset \mathbb{R}$  non vuoto. Dare due esempi di insieme  $A$ , uno in cui l'estremo inferiore di  $A$  sia un punto di accumulazione, e uno in cui non lo sia.

2. Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat.

3. Data  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \geq 0 \\ \sin(x), & x < 0 \end{cases}$ , scrivere esplicitamente  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

La  $F$  è continua? È questo coerente col teorema fondamentale del calcolo integrale?

4. Dire se la seguente disuguaglianza per numeri complessi è vera o falsa, e giustificare

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

### 1. Estremo inferiore.

Definizione: si veda le lezioni. Un esempio in cui l'estremo inferiore è punto di accumulazione è  $A = (0, 1)$ . Infatti  $\inf A = 0$ , e 0 è punto di accumulazione di  $A$ , perché ogni intorno di 0 contiene punti di  $A$  diversi da 0.

Un esempio in cui l'estremo inferiore non è punto di accumulazione è  $A = \{0\} \cup [1, 2]$ . Infatti  $\inf A = 0$  ma 0 non è punto di accumulazione di  $A$ , perché esiste un intorno di 0 che non contiene punti di  $A$  diversi da 0, ad esempio

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

### 2. Teorema di Fermat.

**Enunciato.** Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile in  $x_0 \in (a, b)$ . Se  $f$  ha in  $x_0$  un massimo locale o un minimo locale, allora  $f'(x_0) = 0$ .

**Attenzione:** se si enuncia con  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  allora  $x_0$  deve essere interno all'intervallo.

**Dimostrazione.** Si veda le lezioni.

### 3. Calcolo di $F(x)$ .

Vogliamo scrivere esplicitamente  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

Se  $x \geq 0$ , allora nell'intervallo  $[0, x]$  vale  $f(t) = \cos t$ , quindi

$$F(x) = \int_0^x \cos t dt = \sin x.$$

Se invece  $x < 0$ , allora

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = - \int_x^0 f(t) dt.$$

quindi

$$F(x) = - [-\cos t]_x^0 = - (-\cos 0 + \cos x) = 1 - \cos x.$$

Pertanto

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & x < 0, \\ \sin x, & x \geq 0. \end{cases}$$

E' facile vedere la continuità in 0. Si ha  $F(0) = \sin 0 = 0$ . Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos x) = 0,$$

Questo è coerente con il teorema fondamentale del calcolo integrale: infatti, anche se  $f$  non è continua in 0, è comunque limitata e integrabile su  $[-1, 1]$ . La funzione integrale  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  è continua.

#### 4. Disuguaglianza complessa.

La disuguaglianza proposta è

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

Questa affermazione è falsa. Infatti prendiamo, ad esempio,  $z = 1, w = 1$ . Allora

$$|z + w|^2 = |1 + 1|^2 = |2|^2 = 4,$$

mentre

$$|z|^2 + |w|^2 = |1|^2 + |1|^2 = 1 + 1 = 2.$$

**Nota.** La formula corretta (cf. disuguaglianza triangolare fatta a lezione) è

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w}).$$

Quindi la disuguaglianza

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2$$

vale solo quando

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq 0.$$

(che in effetti non e' mai verificata se  $z, w$  sono due numeri reali entrambi positivi).

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

(A) Determinare l'insieme delle primitive seguenti

$$\int x e^{-x} \cos(x) dx$$

*Indicazione: si può iniziare calcolando  $\int e^{-x} \cos(x) dx$*

(B) Calcolare quindi il limite della successione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n x e^{-x} \cos(x) dx$$

Iniziamo calcolando  $\int e^{-x} \cos(x) dx$ . Integrando per parti due volte, otteniamo

$$\int e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-x}}{2} (-\cos(x) + \sin(x)).$$

Ora integriamo per parti:

$$\int x e^{-x} \cos(x) dx.$$

Poniamo  $u = x, v' = e^{-x} \cos(x)$ . Quindi

$$\int x e^{-x} \cos(x) dx = x \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) - \int \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) dx.$$

Calcoliamo l'integrale rimanente:

$$\int \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) dx = \frac{1}{2} \int e^{-x} \sin(x) dx - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos(x) dx.$$

Si ha

$$\int e^{-x} \sin(x) dx = \frac{e^{-x}}{2} (-\sin(x) - \cos(x)),$$

e

$$\int e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)).$$

Dunque

$$\int \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) dx = -\frac{e^{-x}}{2} \sin(x).$$

Pertanto

$$\int x e^{-x} \cos(x) dx = \frac{x e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) + \frac{e^{-x}}{2} \sin(x) + C.$$

Quindi

$$\int x e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-x}}{2} ((x+1) \sin(x) - x \cos(x)) + C$$

con  $C \in \mathbb{R}$ . Dobbiamo calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n x e^{-x} \cos(x) dx.$$

Usiamo la primitiva trovata:

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{2} ((x+1) \sin(x) - x \cos(x)).$$

Allora

$$\int_0^n x e^{-x} \cos(x) dx = F(n) - F(0).$$

Calcoliamo  $F(0)$ :

$$F(0) = \frac{e^0}{2} ((0+1) \sin(0) - 0 \cos(0)) = 0.$$

Quindi

$$\int_0^n x e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-n}}{2} ((n+1) \sin(n) - n \cos(n)).$$

Ora osserviamo che

$$|(n+1) \sin(n) - n \cos(n)| \leq (n+1) |\sin(n)| + n |\cos(n)| \leq 2n+1.$$

Pertanto

$$\left| \frac{e^{-n}}{2} ((n+1) \sin(n) - n \cos(n)) \right| \leq \frac{e^{-n}}{2} (2n+1).$$

Poiché

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} (2n+1) = 0,$$

per il teorema del confronto otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n}}{2} ((n+1) \sin(n) - n \cos(n)) = 0.$$

**Esercizio 2** [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{x+1} e^{\arctan(x)}$$

**Dominio e segno**

La funzione è definita per  $x+1 \neq 0$ . Poiché c'è il valore assoluto, scriviamo la funzione per casi:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1} e^{\arctan x}, & x < 0, \ x \neq -1, \\ \frac{x}{x+1} e^{\arctan x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Poiché  $e^{\arctan x} > 0$  per ogni  $x$ , il segno dipende da

$$\frac{|x|}{x+1}.$$

Si ha  $f(0) = 0$  e inoltre

$$f(x) < 0 \quad \text{se } x < -1, \quad f(x) > 0 \quad \text{se } x > -1, \ x \neq 0,$$

**Limiti e asintoti**

Siccome  $e^{\arctan x}$  resta limitato e positivo per  $x \rightarrow -1$  si vede facilmente

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

Quindi  $x = -1$  è un asintoto verticale. Ora studiamo i limiti all'infinito. Per  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{|x|}{x+1} = \frac{x}{x+1} \rightarrow 1, \quad e^{\arctan x} \rightarrow e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Con questo e ragionamento analogo a  $-\infty$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Notiamo che  $f$  è continua su tutto il dominio  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

**Derivata prima**

Per  $x > 0$ , si ha

$$f(x) = \frac{x}{x+1} e^{\arctan x}.$$

Derivando:

$$f'(x) = e^{\arctan x} \left[ \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x}{x+1} \frac{1}{1+x^2} \right].$$

Quindi

$$f'(x) = \frac{e^{\arctan x} (2x^2 + x + 1)}{(x+1)^2 (1+x^2)}.$$

Con calcoli analoghi (per  $x < 0$  la funzione è l'opposta e  $(-h(x))' = -h'(x)$ )

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{\arctan x} (2x^2 + x + 1)}{(x+1)^2 (1+x^2)}, & x < 0, \ x \neq -1, \\ \frac{e^{\arctan x} (2x^2 + x + 1)}{(x+1)^2 (1+x^2)}, & x > 0. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$2x^2 + x + 1 > 0$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , perché il discriminante è  $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ . Quindi

$$f'(x) < 0 \quad \text{per } x < 0, \quad x \neq -1, \quad f'(x) > 0 \quad \text{per } x > 0.$$

Calcoliamo le derivate laterali in  $x = 0$  si vede che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1.$$

quindi la funzione non è derivabile in  $x = 0$ , dove c'è un punto angoloso di minimo relativo. Non ci sono massimi o minimi assoluti, perché la funzione è illimitata sia inferiormente sia superiormente.

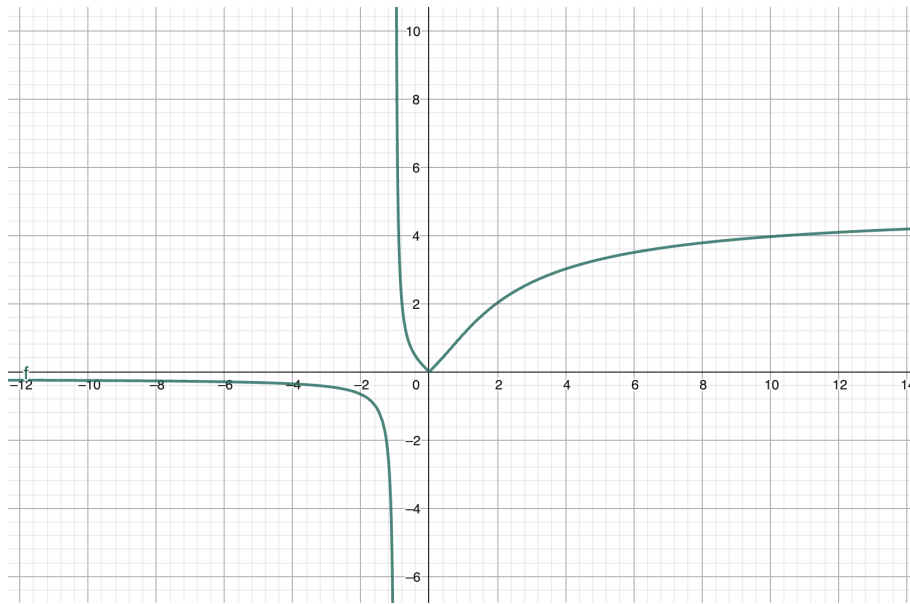


Figure 1: Grafico della funzione

### Esercizio 3 [con svolgimento, 4 punti]

Si consideri l'equazione

$$y''(x) + Ky'(x) + 4y(x) = \cos(2x). \quad (1)$$

(a) Determinare  $K \in \mathbb{R}$  in modo che la funzione  $y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  sia soluzione dell'equazione (1).

(b) Per tale valore di  $K$ , scrivere l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) + Ky'(x) + 4y(x) = \cos(2x).$$

(c) La soluzione  $y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  trovata al punto (a) soddisfa  $y(0) = y(\pi) = 0$ . Ce ne sono altre?

Vogliamo determinare  $K \in \mathbb{R}$  in modo che  $y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  sia soluzione dell'equazione. Calcoliamo le derivate:

$$y'(x) = \cos(2x), \quad y''(x) = -2 \sin(2x).$$

Sostituendo nell'equazione otteniamo

$$-2 \sin(2x) + K \cos(2x) + 2 \sin(2x) = \cos(2x).$$

Pertanto deve essere  $\boxed{K = 1}$ . Per  $K = 1$ , l'equazione diventa

$$y''(x) + y'(x) + 4y(x) = \cos(2x).$$

Una soluzione particolare è già data da  $y_p(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ . Ora risolviamo l'equazione omogenea associata:

$$y'' + y' + 4y = 0.$$

L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$ . Il discriminante è  $\Delta = 1 - 16 = -15$ . Quindi

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}.$$

Dunque l'integrale generale dell'equazione completa è

$$\boxed{y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) \right) + \frac{1}{2} \sin(2x),}$$

con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Vogliamo capire se esistono altre soluzioni che soddisfano

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Imponiamo la condizione  $y(0) = 0$ . Si ha  $y(0) = C_1$ . Quindi  $C_1 = 0$ . Ora imponiamo  $y(\pi) = 0$ . Si ha

$$y(\pi) = C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\pi\right) + \frac{1}{2} \sin(2\pi).$$

Poiché  $\sin(2\pi) = 0$  otteniamo

$$C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\pi\right) = 0.$$

Ora  $e^{-\frac{\pi}{2}} \neq 0$ . Inoltre  $\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\pi\right) \neq 0$ , perché  $\frac{\sqrt{15}}{2}$  non è un numero intero. Dunque deve essere  $C_2 = 0$ .

Quindi l'unica soluzione che soddisfa  $y(0) = y(\pi) = 0$  è  $y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ .

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

(A) Determinare il polinomio di Taylor di grado 4 in  $x = 0$  della funzione

$$f(x) = \sin(\ln(x+1)) - \sin(x)$$

(B) Calcolare per  $\alpha > 0$  il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\ln(x+1)) - \sin(x)}{x^\alpha \arctan(\ln(x^2+1))}$$

Usiamo gli sviluppi notevoli:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4), \quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4).$$

Poniamo  $t = \ln(1+x)$ . Allora

$$t = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Calcoliamo ora  $t^3$  fino all'ordine 4. Poiché  $t^3 = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3$ , si ha

$$t^3 = x^3 + 3x^2 \left(-\frac{x^2}{2}\right) + o(x^4) = x^3 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4).$$

Pertanto

$$\frac{t^3}{6} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

Sostituendo gli sviluppi trovati:

$$\sin(\ln(1+x)) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4}\right) + o(x^4).$$

Quindi il termine di ordine 4 si semplifica

$$\sin(\ln(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Pertanto  $f(x) = \sin(\ln(1+x)) - \sin x$  diventa

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Ora studiamo il denominatore. Poiché

$$\ln(1+x^2) = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+, \quad \arctan y = y + o(y) \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

si ha

$$\arctan(\ln(1+x^2)) = x^2 + o(x^2).$$

Quindi

$$x^\alpha \arctan(\ln(1+x^2)) = x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2}).$$

Pertanto

$$\frac{\sin(\ln(1+x)) - \sin(x)}{x^\alpha \arctan(\ln(1+x^2))} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{x^\alpha + o(x^\alpha)}$$

Poiché  $\alpha > 0$  e  $x \rightarrow 0^+$ , si ha  $x^\alpha \rightarrow 0^+$ , quindi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\ln(x+1)) - \sin(x)}{x^\alpha \arctan(\ln(x^2+1))} = -\infty \quad \forall \alpha > 0.}$$

# Analisi Matematica 1, 27/08/26

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

Punteggio indicativo tra parentesi quadre. Tempo a disposizione: **40 minuti**.

## Tema A

**Domande di Teoria** [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

*Le domande sono indipendenti. Giustificare le risposte; enunciare i risultati/teoremi utilizzati.*

1. Dare la definizione di successione di Cauchy. La successione  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  è di Cauchy?
2. Enunciare il teorema di Rolle e dimostrarlo.
3. Spiegare cosa è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Illustrarne dunque il metodo generale di risoluzione.
4. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile due volte. Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa e giustificare:

se  $f''(x) > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $f(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

# Analisi Matematica 1, 27/08/26

Parte di esercizi.

Cognome ..... Nome ..... Matr. ....  
Corso di studi ..... Docente del corso .....

**Nota:** nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

## Tema A

### Esercizio 1 [con svolgimento, 6 punti]

1. Trovare l'insieme delle primitive seguente

$$\int \cos^2(\log x) dx$$

*Indicazione: può essere utile scrivere  $\cos^2(x)$  in termini di  $\cos(2x)$  e/o  $\sin(2x)$*

2. Calcolare quindi l'integrale definito

$$\int_1^{e^\pi} \cos^2(\log x) dx.$$

**Esercizio 2** [con svolgimento, 8 punti]

Si studi la funzione

$$f(x) = x + 2 \arctan |x - 1|$$

Discutere nella zona sottostante (dare il risultato **con i calcoli necessari a una minima giustificazione** rispettando gli spazi):

- il dominio (o *dominio naturale*)  $D$  di  $f$ , i *limiti notevoli* di  $f$ , gli eventuali asintoti.

- i punti di derivabilità e il calcolo della derivata,  $f'(x) =$

- i *limiti notevoli* della derivata: i limiti destro e sinistro della derivata nei punti di possibile non derivabilità;

- il segno della derivata, gli intervalli di monotonia di  $f$ , i punti di estremo locale e la loro natura:

- tracciare il grafico qualitativo di  $f$ :

**Esercizio 3** [con svolgimento, 4 punti]

- 1) Determinare  $\lambda \in \mathbb{C}$  tale che  $z = \frac{1+i}{2}$  sia soluzione di

$$\left( \frac{z-i}{z} \right)^4 = \lambda$$

- 2) Determinare tutte le soluzioni complesse della equazione precedente per la scelta di  $\lambda$  determinata e disegnarle nel piano complesso. .

**Esercizio 4** [con svolgimento, 6 punti]

(a) Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 4 in  $x_0 = 0$  di

$$f(x) = 5^{1+\sin^2(x)}$$

(b) Per  $\alpha > 0$ , calcolare il limite seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5^{1+\sin^2(x)} - 5}{1 - \cos(x^\alpha)}$$