# Analisi Matematica 1 — Foglio 10

Convessità. Studio di funzione — 14 Dicembre 2012

**Esercizio 1.** Sia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Verificare che, comunque presi $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, si verifica

$$f\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_1\right) \leq \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1).$$

**Esercizio 2.** Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^4\left(\frac{\log x}{12} - \frac{7}{144}\right) - \alpha x^2\left(\frac{\log x}{2} - \frac{3}{4}\right),$$

sia convessa su $(0, \infty)$.

**Esercizio 3.** Studiare le seguenti funzioni:

1) $f(x) = \dfrac{|x|}{|x+1|}$; 2) $f(x) = (2x - \arcsin x)^{-1}$; 3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$;
4) $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \log|x|$, $\alpha \in \mathbb{R}$; 5) $f(x) = x^n(\log|x| - 1)$, $n \in \mathbb{N}$;
6) $f(x) = e^{\frac{1}{2}\sin x}\cos x$; 7) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - x$; 8) $f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{x-1}}$;
9) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-5}$; 10) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2|x|}{1+x^2}\right)$; 11) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\left|\dfrac{3-x}{1+x}\right|}\right)$.

Articolare lo studio nei seguenti punti:
a) dominio;
b) eventuali simmetrie ed eventuali periodicità;
c) segno (non sempre possibile);
d) continuità ed eventuali prolungamenti per continuità;
e) limiti significativi;
f) asintoti;
g) derivabilità e calcolo della derivata prima;
h) limiti della derivata prima, eventuali punti di cuspide e di angolo;
i) monotonia, massimi e minimi (relativi e assoluti);
l) derivata seconda, convessità e punti di flesso (non sempre possibile);
m) disegno del grafico.

Commenti: 1) $x = 0$ punto di angolo; 2) saltare studio del segno; 4) Distinguere i casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$, studiare anche $f''$, saltare studio del segno; 5) Per $n \geq 1$, $f$ si prolunga in modo continuo in $x = 0$, per $n \geq 2$ anche $f'$ si prolunga in $x = 0$; 7) C'è un asintoto obliquo; 8) Esaminare con cura i limiti per $x \to 1^{\pm}$ di $f$ ed $f'$; 10) I punti $x = \pm 1$ sono di cuspide; 11) Esaminare con cura i limiti di $f'$, i punti $x = 3$ e $x = -1$ sono di cuspide.