

Esercizio 1. Calcolare le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ della disequazione

$$\frac{\log(\sqrt{2x-1} + \sqrt{1-x})}{(1-x)(9x-5)} \geq 0.$$

Risposta: $5/9 < x < 1$.

Esercizio 2. Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = -1$ sia radice del polinomio complesso

$$P(z) = z^3 + \lambda z^2 + (2-i)z + 2.$$

Per tale λ , calcolare le altre radici di P . Risposta: $\lambda = 1 - i$, $z_1 = 2i$, $z_2 = -i$.

Esercizio 3. Determinare $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $z_0 = i$ sia radice del polinomio complesso

$$P(z) = z^5 + \lambda z^4 + iz^2 + z.$$

Per tale λ , calcolare le altre radici di P . Risposta: $\lambda = -i$, $z_1 = 0$, $z_2 = i$ (quindi doppia), $z_3 = -\sqrt{3}/2 - i/2$, $z_4 = \sqrt{3}/2 - i/2$.

Esercizio 4. Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ delle seguenti equazioni in campo complesso:

1) $z^2 + 5 = |z - 3i|^2$. Risposta: $z_1 = i$, $z_2 = 2i$.

2) $z^4 = |z|^2 + 2$.

3) $iz^2 - 2\bar{z} = 2 + i$. Risposta: $z_0 = -1$, $z_1 = (1 + \sqrt{2}) - i\sqrt{2}$, $z_2 = (1 - \sqrt{2}) + i\sqrt{2}$.

4) $(z+1)^4 = (2z-1)^4$.

Esercizio 5. i) Calcolare le radici $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^4 + 1 = 0$.

ii) Usare il punto i) per fattorizzare il polinomio $x^4 + 1$, con $x \in \mathbb{R}$ variabile reale, nel prodotto di due polinomi (reali) di secondo grado.

Esercizio 6. Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ soluzioni della disequazione $\operatorname{Re}(z + i\bar{z})\operatorname{Re}(z) \leq z\bar{z}$ e disegnarne l'insieme nel piano di Gauss.

Esercizio 7. Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ soluzioni della equazione

$$||z| - 4| = |z - 4i|$$

e disegnarne l'insieme nel piano di Gauss.

Esercizio 8. Determinare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ soluzioni della disequazione

$$\left| \frac{z+i}{i+1} \right| \geq \operatorname{Im}(2i-z),$$

e disegnarne l'insieme nel piano di Gauss.

Esercizio 9. Sia f la funzione della variabile complessa $z \in \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = \frac{i - z}{3i - \bar{z}}.$$

- i) Si determini il dominio $D \subset \mathbb{C}$ di f .
- ii) Determinare l'insieme degli $z \in D$ tali che $|f(z)| \leq 1$.
- iii) Esprimere in forma algebrica le radici terze del numero complesso $w = (f(2i))^3$.

Esercizio 10. Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ il disco complesso chiuso e sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione complessa

$$f(z) = \frac{1 - 2z}{z - 2}.$$

- i) Verificare che $|z| \leq 1$ se e solo se $|f(z)| \leq 1$.
- ii) Verificare che $|z| = 1$ se e solo se $|f(z)| = 1$.