

Esercizio 1. Risolvere il seguente sistema di equazioni nelle incognite $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \\ xy^2 + x + 1 = 0. \end{cases}$$

Risposta: $x = -1, y = 0$.

Esercizio 2. Studiare la convergenza delle serie numeriche

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + e^n}{(n+1)!}; \quad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n + 5^n}; \quad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

Risposte: i) converge (Criterio del rapporto); ii) converge (Criterio della radice oppure confronto con la serie geometrica di ragione $4/5$); iii) converge (Criterio del rapporto).

Esercizio 3. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta delle serie

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}; \quad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n (\sin(2x))^n}{n^2 + 1}; \quad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^{2n} + |2x|^n}.$$

Risposte: i) converge assolutamente e semplicemente per $x \in (-\infty, -3/2) \cup (-3/4, +\infty)$, non converge (né semplicemente né assolutamente) per $x \in [-3/2, -3/4]$; ii) discutere i casi $|\sin 2x| < 1/2$, $|\sin 2x| > 1/2$, $\sin 2x = 1/2$, $\sin 2x = -1/2$. Nell'ultimo caso c'è convergenza semplice (Leibniz) ma non assoluta (Criterio del confronto). iii) converge per $|x| < 1/2$, diverge altrimenti.

Esercizio 4. Studiare la convergenza (semplice e assoluta, se è il caso) delle seguenti serie

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2 + 1}; \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \log(n+1)}; \quad \text{iii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}.$$

Risposte: i) converge (Criterio del confronto, usare $\log n \leq \sqrt{n}$ per $n \geq \bar{n}$); ii) diverge (confronto); iii) converge semplicemente (Leibniz) ma non assolutamente (Confronto con la serie armonica).

Esercizio 5. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} (\sqrt{1+n^4} - n^2)$$

converga. Risposta: $\alpha > -1$ (Criterio del confronto).

Esercizio 6. La rappresentazione decimale di un numero reale $x \in [0, 1]$ è un'espressione del tipo

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \dots$$

dove $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ è l' n -esima cifra decimale dopo la virgola, $n \geq 1$. Per definizione, il numero x è dato da

$$(*) \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

i) Verificare che la serie in (*) converge;

ii) Verificare che il numero x dato da (*) verifica effettivamente $0 \leq x \leq 1$.

Esercizio 7. Verificare che le seguenti serie convergono assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n; \quad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}; \quad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Osservazione: Verificheremo nelle prossime settimane che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Esercizio 8. Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$. Risposta: $3/4$. (Cfr. serie telescopiche).