Analisi Matematica 1 Foglio 7

Funzioni continue 22 Novembre 2012

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti 'risolvendo' le forme indeterminate del tipo $[1^\infty]$:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{x^2-1}{x^2+1}\Big)^{\frac{x^3+1}{x+2}};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}}\quad \text{(visto in classe).}$$

Risposte: 1) $\frac{1}{e^2}$.

Esercizio 2. Sia data la funzione

$$f(x) = 2x + \arctan\Big(\frac{2x}{2x^2-1}\Big).$$

i) Determinare il dominio di f; ii) Studiare eventuali simmetrie di f; iii) Posto $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, calcolare i quattro limiti

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f(x), \qquad \lim_{x\to -x_0^\pm} f(x).$$

Esercizio 3. Determinare gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & \text{per } x \le -\frac{\pi}{2} \\ \alpha + \beta \sin x & \text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x & \text{per } x \ge \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente sia continua

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x) & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ |x|^{-2\alpha}\arctan(x) & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Risposta: $0 < \alpha < 1/2$. Sia noto che $\arctan(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$.

Esercizio 5. i) Dimostrare che l'equazione $1 - x^4 = \log(1 + x^2)$ ha esattamente due soluzioni $x \in \mathbb{R}$. ii) Sia $f(x) = x^7 + x^5 + e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che per ogni fissato $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ha una ed una sola soluzione $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(\alpha x) - x^2}{\sin^2(x) - \alpha x^2}.$$

Risposta. Per $\alpha = 1$ il limite vale 1. Per $\alpha \neq 1$ il limite vale $-1-\alpha$.