Di conseguenza

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\left(\log(n+1) - \log n\right)}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}} = \frac{\frac{1}{n}(1+o(1))\ \frac{1}{n}(1+o(1))}{\frac{1}{n^{3/4}}\left(\frac{1}{4}+o(1)\right)}$$

$$= \frac{1+o(1)}{n^{2-3/4}\left(\frac{1}{4}+o(1)\right)} = \frac{1+o(1)}{n^{5/4}\left(\frac{1}{4}+o(1)\right)}$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{5/4}}} = 4 \neq 0.$$

Deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

$$\Uparrow$$

$$\alpha = 5/4 > 1$$

$\square$

Esercizio Stabilire per quali $\alpha > 0$ converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left| \sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right| .$$

Soluzione. Sviluppiamo il sinh e il log:
$$\sinh x = x + \frac{1}{3!} x^3 + o(x^4)$$
e quindi, poiché $\frac{1}{n} \to 0$,
$$\sinh\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{3!} \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Scriviamo almeno due termini precisi nello sviluppo perché il primo potrebbe semplificarsi con termini provenienti dal logaritmo:
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
e quindi, poiché $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ per $\alpha > 0$,
$$\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$
Di conseguenza:
$$a_n = \sqrt{n} \left| \sinh\left(\frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \right|$$
$$= \sqrt{n} \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \right.$$

Dobbiamo distinguere questi casi:

(1) $\alpha = 1$, c'è una semplificazione.

(2) $\alpha < 1$,

(3) $\alpha > 1$.

(1) $\alpha = 1$,

$$a_n = \sqrt{n} \left| \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|$$

$$= \sqrt{n} \left| \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|$$

$$= \frac{1}{n^{3/2}} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right).$$

Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$, per il Teorema del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(2) $\alpha < 1$. Il termine dominante dentro $|\cdots|$ è $\frac{1}{n^\alpha}$. Dunque

$$a_n = \sqrt{n} \left| \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right|$$

$$= \frac{1}{n^{\alpha - 1/2}} \left(1 + o(1) \right)$$

Siccome $\alpha - \frac{1}{2} < 1$, per confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(3) $\alpha > 1$. Il termine dominante dentro $|\dots|$ è $1/n$. Dunque

$$a_n = \sqrt{n} \; \left| \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \; (1 + o(1)).$$

Per confronto asintotico la serie data diverge.

$\square$

<u>Esercizio</u> Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log\left(\dfrac{1 + \sin x}{1 + x}\right)}{\sin x + \log(1-x) + 1 - \cos x}.$$

Soluzione. Il numeratore è

$$N = \log\left(\frac{1+\sin x}{1+x}\right) = \log(1+\sin x) - \log(1+x)$$

Lo sviluppo del logaritmo è

$$\log(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Siccome $\sin x \to 0$ per $x \to 0$, per la regola di sostituzione

$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} +$$
$$+ o(\sin^3 x).$$

Sviluppiamo il seno:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 =$$
$$= x^2 + o(x^3)$$

$$(\sin x)^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = x^3 + o(x^3)$$

Infine osserviamo che $o(\sin^3 x) = o(x^3)$, infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(\sin^3 x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} \cdot o(1) = 0.$$

Il numeratore è :

$$N = \sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} + o(\sin^3 x)$$

$$- \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)$$

$$= \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3) + \frac{1}{3} x^3 + o(x^3) + o(x^3)$$

$$- \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$= x^3 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) + o(x^3)$$

$$= -\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

Sviluppiamo il denominatore :

$$D = \sin x + \log(1-x) + 1 - \cos x$$

$$= \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) + \left(\cancel{(-x)} - \cancel{\frac{1}{2}(-x)^2} + \frac{1}{3}(-x)^3 + o(x^3) \right)$$

$$+ \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3) \right)$$

$$= x^3 \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) + o(x^3)$$

$$= -\frac{1}{2} x^3 + o(x^3).$$